Boson Expansion Methods on Light Front

東大教養　板倉数記

光円錐量子化法において、多体問題でよく使われる「ボゾン展開法」が利用できることを説明する。これは通常、いわゆる Tamm-Dankoff 近似を超える手法として考えられているものである。実際に 2 次元 QCD に対してボゾン展開法を適用し、ボゾンの Hamiltonian を導く。

1　序と動機

光円錐量子化法は、相対論的束縛状態を非摂動的に取り扱う方法として最近再び注目を集めている [1]。その中でも、光円錐上で Tamm-Dankoff 近似を用い、Constituent Quark Model(CQM) 的な描像に帰着させせようという大きな流れがある [2]。2 次元の模型では、この方法によってメソンの低励起状態がよく記述されることがわかっている [3]。特に最低励起状態はこれが著しく、quark と antiquark の 2 体のみの成分

$$|q\bar{q}>=\sum_i\int_0^P dk_-\phi(k_-)a^{i\dagger}_{k_-}d^{i\dagger}_{P-k_-}|0> \tag{1}$$

で記述できることが知られている。本来ならば $|\mathrm{meson}>=|q\bar{q}>+|q\bar{q}q\bar{q}>+\cdots$ と様々な成分が許されるのであるが。真空の”triviarity” が反映しているのであろうが、何故 Tamm-Dankoff 近似がそれほど良いのかは明確には分かっていない。従って Tamm-Dankoff によらない方法で、理論の構造を調べることは重要である。

一方、低エネルギーの有効理論としては、CQM や、Nambu,Jona-Lasinio 模型のように quark の自由度を残したものの他に Skyrme 模型のように hadron そのものを自由度としたものがある。これはカイラル対称性の破れに伴なう Nambu-Goldstone 粒子を記述するのに便利な模型である。現状では NG boson を光円錐上で記述する方法は知られていないが、同じ低エネルギーを記述するものであるならば光円錐上でも上記の CQM 的描像から boson 理論へ移行する何らかの方法があるのではないかという疑問が生じる。いや、そもそも NG boson は Tamm-Dankoff 的に書けるのかという疑問もある。実際にπ中間子は CQM 的描像では表せないし、上記の 2 次元での成功は、NG bosn がどう書けるかについては残念ながら何も教えてくれない。

2　2 体状態とボゾン展開法

少なくとも 2 次元のモデルではメソンの最低励起状態が 2 体で書けることから、(Tamm-Dankoff 近似からの流れとしては) この 2 体状態から boson 理論を得ることが出来るのではないかと考えるのが自然であろう。そこで 2 体状態について詳しく見てみよう。まず、次のような bilocal operator を導入する。(簡単のため 2 次元にしているが以下の議論は 4 次元でも成り立つ。4 次元での違いについては後述する)

$$M(x,y)=\sum_{i=1}^N\psi_i^\dagger(x)\psi_i(y), \tag{2}$$

$$M(p_1,p_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}}\frac{dx_2}{\sqrt{2\pi}}\quad M(x_1,x_2)e^{ip_1x_1+ip_2x_2}. \tag{3}$$

ここでは $U(N)$ や $SU(N)$ などの内部対称性を仮定し、その下で不変な演算子を考えた。また、$\psi(x)$ は上成分のスピノルであり、Hamiltonian 形式で議論をするので各 operator は同時刻のものである。この 2 体演算子 $M(p,q)$ は boson ではありえず、従って 2 体状態も boson ではあり得ないことが、$M(p,q)$ の algebra を計算することでわかる（ normal order は Fock vacuum に対してのもの ）。

$$\begin{aligned}
&[:M(p_1,p_2):,:M(q_1,q_2):] \\
&\quad= \ :M(p_1,q_2):\delta(p_2+q_1)-:M(q_1,p_2):\delta(p_1+q_2) \\
&\quad+ \ N\delta(p_1+q_2)\delta(q_1+p_2)\{\theta(p_1)\theta(p_2)\theta(-q_1)\theta(-q_2)-\theta(-p_1)\theta(-p_2)\theta(q_1)\theta(q_2)\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

これは物理的には当然のことで、fermion 2 体系どうしには Hamiltonian とは関係なく、その統計性の効果が存在する。つまり、Pauli principle が働くことによって、2 体状態は同じ状態を取ることが出来ず、boson ではあり得ないのである。もし $M(p,q)$ を何らかの boson operator で表現することができたなら、この Pauli 原理の効果をその boson 間の相互作用として取り扱うことができるだろう。こう考えた時、実は多体問題における手法として古くから知られている「ボゾン展開法」というものがまさに同じ動機で同様のことを行なっており、その手法が利用できるということがわかる [6]。

ボゾン展開法はもともと強磁性体のスピン波をボゾン的に取り扱う目的で導入された [7]。スピンは $SU(2)$ 代数のためにそのままでは取り扱いが難しいので、$SU(2)$ 代数を満たすようにスピンをボゾンを用いて表現したのである。また、原子核理論では集団運動を記述するには、粒子-空孔励起が重要であり、fermion bilinear operator をボゾンで表現するボゾン展開が用いられた。これは、粒子を quark、空孔を antiquark とすれば我々の状況とほぼ同じである。ボゾン展開にはいくつかの方法があるが、ここでは特に Holstein-Primakoff 型を用いよう。まず、次のような boson operator を導入する。

$$[B(p_1,p_2),B^\dagger(q_1,q_2)]=\delta(p_1-q_1)\delta(p_2-q_2),\quad [B(p_1,p_2),B(q_1,q_2)]=0, \tag{5}$$

ここで、原子核の場合と違って、index は連続である。この boson を用いると 2 体演算子: $M(p,q):$ は次の様にあらわせる。

$$:M_{-+}(p_1,p_2): \ = \ \int_0^\infty dq \ \ B^\dagger(-p_1,q)B(p_2,q)\equiv\mathcal{A}(p_2,-p_1) \tag{6}$$

$$:M_{+-}(p_1,p_2): \ = \ -\int_0^\infty dq \ \ B^\dagger(q,-p_2)B(q,p_1) \tag{7}$$

$$:M_{++}(p_1,p_2): \ = \ \int_0^\infty dq \ \ (\sqrt{N-\mathcal{A}})(p_2,q)B(q,p_1) \tag{8}$$

$$:M_{--}(p_1,p_2): \ = \ \int_0^\infty dq \ \ B^\dagger(q,-p_2)(\sqrt{N-\mathcal{A}})(q,-p_1) \tag{9}$$

M_{-+}などの添字は各運動量の正負を表している。負の値を取り得るのは M の Fourie 変換の定義 (3) のためである。この式の意味は、(5) を使えば、式 (6) ~ (9) の右辺を (4) に代入したものが成り立つことが示せる、ということである。また、上で (8) と (9) にルートが入っているが、それは展開で定義する。このルートが定義できる部分空間は物理的部分空間と呼ばれる。さらに $N\to\infty$ とすると、M_{--}と M_{++}とが bosonic な交換関係を満たすことが (4) からわかるが、これが上でも見てとれる。$:M_{++}(p,q):\to\sqrt{N}B(q,p)$ これは $N\to\infty$ とすると許される状態の数が無限になって Pauli 原理が効かなくなるからである。このようにして 2 体演算子をボゾンで表現することが出来た。従って、もし Hamiltonian が 2 体演算子のみで表されるならば、容易にボゾンの Hamiltonian を得ることが出来る。具体的にこれを 2 次元 QCD を用いて次節で示す。

3　2次元QCDへの応用[4]

2次元QCDのラグランジアンは次で与えられる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi, \tag{10}$$

ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ は場の強さ、 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$ は共変微分を表す。なお、以下簡単のために対称性は $U(N)$ とし、空間は無限とする。2次元のゲージ理論では空間が無限だとゲージ場に伝播自由度がなく、本質的にquarkの自由度(光円錐上なら、スピノルの上成分)だけが物理的な自由度となる。ゲージ場を消去してやると、光円錐上ではHamiltonianが上で定義したゲージ不変な $M(p,q)$ のみによって次のように簡単に書かれる[5]。

$$\begin{aligned} H &= -\frac{g^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 dq_1 dq_2\ \delta(p_1+p_2+q_1+q_2)\frac{\mathcal{P}}{(p_1+q_2)^2} : M(p_1,p_2) :: M(q_1,q_2) : \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{g^2 N}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dq\ \frac{\mathcal{P}}{q} : M(q,-q) :, \end{aligned} \tag{11}$$

ここで $\mathcal{P}$ は主値積分をあらわす。このHamiltonianは M について高々2次ではあるが、その運動方程式を見ることで M どうし(つまり2体状態間)に相互作用があることが分かり、それはalgebraに起因したものだと言える。なお、この運動方程式は $N \to \infty$ で、いわゆる'tHooft方程式を与える。この相互作用をHamiltonianであからさまに見るためにボゾン展開を適用する[4]。やはりHolstein-Primakoff型(6) ~ (9)にし、ルートを展開することで $1/N$ の各オーダーのHamiltonianが

$$\begin{aligned} H_{HP}^{(0)} &= -\frac{g^2 N}{8\pi}\int_0^{\infty} dp_1 dp_2 dq_1 dq_2\ \delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\frac{\mathcal{P}}{(p_1-q_2)^2} B^\dagger(p_1,p_2)B(q_2,q_1) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{g^2 N}{2\pi}\right)\int_0^{\infty} dq dq'\ \left(\frac{\mathcal{P}}{q} + \frac{\mathcal{P}}{q'}\right) B^\dagger(q,q')B(q,q') \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} H_{HP}^{(1)} &= \frac{g^2\sqrt{N}}{4\pi}\int_0^{\infty} dp_1 dp_2 dq_1 dq_2 dk\ \ \delta(p_1-p_2+q_1+q_2)\ \ \frac{\mathcal{P}}{(p_1+q_2)^2}\times \\ &\quad \left\{B^\dagger(k,p_2)B(k,p_1)B(q_2,q_1) - B^\dagger(p_2,k)B(p_1,k)B(q_1,q_2) + \mathrm{h.c.}\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

のように得られる。さらに、ボゾン展開で導入したbosonはbilocalであったが、localなbosonを

$$b_r^\dagger = \sqrt{r}\int_0^1 dz\ \ \phi(z)B^\dagger(rz,(1-z)r) \tag{14}$$

の様に導入し、波動関数 $\phi(z)$ を $H_{HP}^{(0)}$ を対角化するように決定する。(これは多体問題の言葉で言えば、集団状態を導入したことに相当する。)すると最低次のHamiltonianは'tHooft方程式の固有値 μ_n を質量に持った自由スカラー場のもの

$$H_{HP}^{(0)} = \sum_n \int_0^{\infty} dr \frac{\mu_n^2}{2r}\ \ b_r^{(n)\dagger} b_r^{(n)} \tag{15}$$

となり、$H_{HP}^{(1)}$ は、その各boson間の3点相互作用になる。結局、無限種のスカラー粒子が互いに相互作用している系のHamiltonianを得たことになる。

4　議論と展望

ここでは光円錐上でボゾン展開を用いることにより、系統的にボゾン理論を得る方法を示した。具体的には 2 次元 QCD において、相互作用のあるボゾン系の Hamiltonian を得ることができた。ボゾン展開自身は通常の座標で摂動論の枠でなら同様に適用できるが、光円錐上で実行した方が、すでに 2 体状態がメソンをよく近似すると期待されるのでボゾン展開で導入したボゾンもメソンを記述するのに良い変数であると期待される。また、ここでは 2 次元でしか見なかったが、4 次元でも fermion 2 体演算子の代数は添字が増える程度で本質的に変わらないので、ボゾン展開は同様に適用できる。しかし、ゲージ理論で、M をゲージ不変な演算子にしようとすると quark と antiquark の間に Wilson line を入れなくてはならず、その経路依存性があるので、このままでは適用できない。光円錐上では、Gauss law が比較的容易に解け、余分な自由度のない Hamiltonian から start するので、その際には間にゲージ場を飛ばさなくとも、意味のある結果を得られるかも知れない。

QCD の場合は N というパラメータがあったので $1/N$ 展開が使え、Holstein-Primakoff 展開がうまくいったが、Schwinger model のような場合は展開するのは不適当である。しかし、ボゾン展開には Holstein-Primakoff の様に展開が無限次のものだけでなく、有限で展開が止まる方法がある（例えば、Dyson 型や Schwinger 型）。従って、N の小さな理論や、Schwinger model などにもボゾン展開は適用可能である。

一番初めに用いられたスピン波がそうであったように、ボゾン展開で導入されたボゾンは自発的対称性の破れとともに生ずる NG boson を記述するのに便利な変数であると考えられている。従って光円錐上でもその可能性が期待される。そうなると NG boson は Tamm-Dankoff 的には書けないことになる。というのは、確かに我々は 2 体から出発したが、導入されたボゾンを逆に解けば、そのボゾンは fermion の多体効果を含むことがわかるからである。このように、このアプローチは NG boson の記述にも重要なヒントを与えるかもしれないので、今後、具体的に 4 次元の模型に応用してみるべきであろう。

参考文献

[1] K. G. Wilson, et al., Phys. Rev. **D49**, 6720 (1994)

[2] I. Tamm, J. Phys. (Moscow) **9**, 449 (1945); S. M. Dankoff, Phys. Rev. **78**, 382(1950); R. J. Perry, A. Harindranath, and K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **65**, 2959 (1990)

[3] K. Harada, T. Sugihara, M. Taniguchi, and M. Yahiro, Phys. Rev. **D49**, 4226 (1994);
K. Harada, A. Okazaki, and M. Taniguchi, Phys. Rev. **D52**, 2429 (1995);
K. J. Hornbostel, S. J. Brodsky, and H. C. Pauli, Phys. Rev. **D41**, 3814 (1994); K. J. Hornbostel, Ph. D. thesis, SLAC Report No. 333, (1988); T. Sugihara, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, Phys. Rev. **D50**, 5274 (1994)

[4] K. Itakura, *Boson Expansion Methods in Light-Front* QCD_{1+1}, hep-th/9604032

[5] K. Kikkawa, Ann. Phys. **66**, 3633 (1981)

[6] For a review, see A. Klein and E. R. Marshalek, Rev. Mod. Phys. **63**, 375 (1991)

[7] T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940)