



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Tesis Doctoral:
Cosmología y astrofísica de teorías
escalares tensoriales de gravitación

Diego F. Torres

Director: Prof. Héctor Vucetich
4 de Septiembre de 1998

A Ileana

Contents

1	Introducción	1
1.1	Algunos comentarios históricos	1
1.2	Aspectos técnicos	4
1.2.1	El significado de $\omega(\phi)$	4
1.2.2	El principio de equivalencia	5
1.2.3	El <i>Einstein frame</i> de la teoría	8
1.2.4	Teorías de unificación y límite de bajas energías	10
1.3	El status observacional	10
1.4	Sobre esta tesis	12
I	Cosmología	15
2	Gravitación Hiperextendida	16
2.1	Introducción	16
2.2	Sobre la equivalencia de teorías	17
2.3	Formalismo de gravitación hiperextendida	19
2.4	Modelos de Friedmann-Robertson-Walker	19
2.5	Soluciones cosmológicas	21
2.5.1	Soluciones de Vacío	22
2.5.2	Soluciones de radiación	22
2.5.3	Soluciones de un fluido <i>stiff</i>	23
2.6	Un ejemplo simple	24
2.7	Más sobre la equivalencia de teorías	24
2.8	Cosmologías anisotrópicas	25
2.8.1	Espacio-tiempos anisotrópicos	25
2.8.2	Soluciones en el <i>Einstein frame</i>	26
2.8.3	Modelo Bianchi I	28
2.9	Nociones de cosmologías inflacionarias	30
2.10	Slow roll y ecuaciones generales	33
2.11	Soluciones de slow roll para \mathcal{L}_2	34
2.11.1	$V(\sigma) = V_0 = \text{constante}$	35
2.11.2	$V(\sigma) = V_0 \exp(-\lambda\sigma)$; $V_0, \lambda = \text{constantes}$	35
2.11.3	$V(\sigma) = V_0 \sigma^{2r}$; $V_0, r = \text{constante}$ y $r \neq 1$	36
2.12	Algunos ejemplos	36
2.12.1	$G^{-1} = \phi^n$, $n \neq 2, 4$ y $V = V_0 = \text{constante}$	37
2.12.2	$G^{-1} = \phi^2$, $V = V_0 = \text{constante}$	37
2.12.3	$G^{-1} = \phi^4$, $V = V_0 = \text{constante}$	38
2.13	Soluciones de inflación intermedia	38

2.14	Conclusiones	39
3	Integrabilidad de modelos de dos fluidos	40
3.1	Introducción	40
3.2	Dos fluidos en Relatividad General	41
3.3	Integrabilidad	43
3.3.1	Consideraciones preliminares	43
3.3.2	Clasificación y análisis de las singularidades	44
3.4	Algunos ejemplos sencillos	47
3.5	Alrededor de lo básico	49
3.6	Dos fluidos en la teoría de Brans-Dicke	50
3.6.1	Análisis de las ecuaciones de movimiento	51
3.7	Conclusiones	53
4	Nucleosíntesis primordial	55
4.1	Introducción	55
4.2	Formación primordial de ${}^4\text{He}$	57
4.2.1	Nucleosíntesis como test del universo	60
4.3	Nucleosíntesis y teorías escalares tensoriales	62
4.3.1	Formalismo general	62
4.3.2	Teoría de Brans-Dicke	63
4.3.3	Teorías escalares tensoriales: acoplamientos potenciales	64
4.4	Nucleosíntesis y dimensiones extras	66
4.4.1	Formalismo general	67
4.4.2	Aplicaciones	69
4.5	Conclusiones	70
II	En la interfase	72
5	Wormholes en el espacio tiempo	73
5.1	Introducción	73
5.2	Wormholes estáticos en Relatividad General	79
5.2.1	Forma de la métrica	80
5.2.2	Tensor de curvatura y de Einstein	80
5.2.3	El tensor de energía-impulso	81
5.2.4	Ecuaciones de Einstein	81
5.2.5	Geometría espacial de wormhole: <i>Embeddings</i>	81
5.2.6	Condiciones de existencia de wormhole en la métrica	82
5.2.7	Sobre el tensor de energía-impulso	82
5.3	Condiciones de energía	84
5.3.1	Violaciones a las condiciones de energía	85
5.4	Wormholes en la teoría de Brans-Dicke	86
5.4.1	Universo vacío	87
5.4.2	Universo no vacío	88
5.5	U_4 : El espacio tiempo de Riemann-Cartan	94
5.5.1	Conexión, métrica y estructura de U_4	95
5.6	Teoría de Brans-Dicke en U_4	96
5.6.1	Wormholes estáticos en U_4	97

5.7	Conclusiones	99
6	Microlensing y Gamma Ray Bursts	102
6.1	Introducción	102
6.2	Microlensing gravitacional de masas negativas	103
6.2.1	Trayectorias de los rayos de luz	103
6.2.2	Ecuaciones geométricas y perfiles de intensidad	106
6.2.3	Cálculo de distancias cosmológicas	109
6.2.4	Número de eventos	111
6.3	Fenomenología de los Gamma Ray Bursts	112
6.3.1	Sobre el BATSE	115
6.4	Núcleos galácticos activos como fuentes	115
6.5	Masas negativas y wormholes	116
6.6	Cota superior a la cantidad de masa negativa	118
6.7	Detecciones en la muestra del BATSE	120
6.8	Conclusiones	121
III	Astrofísica	123
7	Estrellas de bosones	124
7.1	Introducción	124
7.2	Geones relativistas	126
7.3	Formalismo escalar tensorial	128
7.3.1	Teoría gravitacional y sistema bosónico	128
7.3.2	Procedimiento numérico y condiciones de contorno	130
7.4	Definiciones de masa en teorías escalares tensoriales	131
7.5	Elecciones para el acoplamiento $\omega(\Phi)$	132
7.6	Resultados	134
7.6.1	Acoplamientos de los Grupos I y II	134
7.6.2	Acoplamientos del Grupo III	138
7.7	Conclusiones	139
8	Memoria y evolución estelar	140
8.1	Introducción	140
8.2	Masa, número de partículas y constante gravitacional	142
8.3	Escenarios de evolución	143
8.3.1	Memoria estelar gravitacional	144
8.3.2	Evolución estelar gravitacional	144
8.3.3	Cambio del valor asintótico de $G?$	145
8.4	Teoría de catástrofes y estabilidad	145
8.4.1	Lenguaje y definiciones	146
8.4.2	Aplicación a estrellas	146
8.5	Resultados numéricos	147
8.6	Conclusiones	151
9	Epílogo	153

List of Figures

4.1	<i>A la izquierda, predicciones de abundancias primordiales de los elementos livianos (${}^4\text{He}$ está dado por su fracción de masa, el resto por sus valores relativos al hidrógeno). El ancho de las curvas indican incertidumbres teóricas. La banda vertical indica el intervalo en el que las abundancias medidas están de acuerdo con la predicción teórica y la línea vertical mas oscura, la última determinación de la abundancia de D. A la derecha, problemas concernientes a la cantidad de materia oscura: la mayor parte de la materia es no bariónica y la mayor parte de la materia bariónica es oscura.</i>	61
4.2	<i>Variación en la predicción de ${}^4\text{He}$ primordial como función del exponente de la ley de potencias del acoplamiento de la teoría escalar tensorial. Se muestran distintas curvas para distintos valores de $\Omega_o h^2$: de arriba a abajo, $\Omega_o h^2 = 1, 0.25$ y 0.008.</i>	65
5.1	<i>A la izquierda, topología del espacio-tiempo cerca de una singularidad. A la derecha, plano de coordenadas u y v de Kruskal. Las singularidades están señaladas con hipérbolas de línea gruesa. La región sombreada es la cubierta por las coordenadas de Schwarzschild, llamado también universo principal.</i>	75
5.2	<i>Evolución dinámica del puente de Einstein-Rosen. La línea horizontal representa un dado momento de tiempo. En A, el puente está cerrado, aislando dos singularidades. En B comienza a abrirse y en C el radio de apertura es máximo. Luego la recta horizontal corta al eje $+v$ en valores más positivos hasta que nuevamente se llega a la singularidad. Este proceso se hace tan rápidamente que ningún observador causal puede atravesar el puente.</i>	75
5.3	<i>Topología del espacio-tiempo: en la figura de la izquierda se observa un wormhole inter-universo, en el sentido de Einstein-Rosen. En la de la derecha, un wormhole intra-universo, en el sentido de Wheeler.</i>	76
5.4	<i>Máquina del tiempo introducida por Morris, Thorne y Yurtsever. Las líneas gruesas representan las historias de las bocas del wormhole; éste es una construcción mental que une puntos con igual tiempo propio en ambas historias. Mientras que la Boca 1 permanece inercial, la Boca 2 de este wormhole se acelera hasta alcanzar velocidades cercanas a la de la luz y luego se desacelera hasta volver a la posición original. El tiempo propio en un entorno de la boca acelerada es menor que en la que ha permanecido en reposo y luego, un viaje de la boca derecha hacia la izquierda podría violar causalidad. El horizonte cronológico es la línea tipo luz que une puntos con igual tiempo propio.</i>	77
5.5	<i>La geometría de la garganta del wormhole debe abrirse hacia afuera a ambos lados de la misma, haya o no espacio-tiempos asintóticamente planos.</i>	83

5.6	<i>Regiones de violación de la primera condición de WEC para distintos valores en el espacio de parámetros. La ecuación de estado está representada por ϵ y la teoría de gravitación por el acoplamiento ω. Las regiones se naladas cumplen con la primer desigualdad de WEC para el sector de materia pero viola la condición que incluyen al campo ϕ.</i>	93
6.1	<i>Geometría del efecto de microlensing debido a una masa negativa. El observador O, recibe la luz de la fuente S, desviada por la lente de masa M.</i>	106
6.2	<i>Ampliación de la sección eficaz de un haz de luz cuando es desviado por un masa positiva, izquierda, y por una masa negativa, derecha. La posiciones esquemáticas de las masas están se naladas por un peque no círculo en cada dibujo.</i>	107
6.3	<i>Perfil de intensidad para el fenómeno de lentes gravitacionales coando la masa-lente es positiva (izquierda) y negativa (derecha). Los valores de B_1 son 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.2 para el caso con $M > 0$, correspondiendo a las curvas observadas desde arriba hacia abajo. Para el caso con $M < 0$ se muestran las curvas, desde afuera hacia adentro, para $B_0=0.5, 0.75, 1, 8$ y 2.2.</i>	109
6.4	<i>BATSE trigger #257. Los círculos representan la suma total de las cuentas de todos los canales de los dos detectores que observaron el fenómeno (det. 1 y 2). La curva de puntos es una curva teórica I_{neg} con los siguientes valores $T = 1.09 \times 10^8\text{s}$, $I_0 = 2.81$. La posición de la caústica es 1.63s. A la derecha, explicación pictórica del fenómeno.</i>	120
7.1	<i>Teoría 1, a la izquierda: $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5, 1, 1.5$; y a la derecha: $\alpha = 2$ y $B_1 = 5, 10, 15$.</i>	133
7.2	<i>Teoría 2, a la izquierda: $B_2 = 5$ y $\delta = 0.75, 1, 1.25$; y a la derecha: $\delta = 2$ y $B_2 = 5, 10, 15$.</i>	133
7.3	<i>Teoría 3, a la izquierda: $B_3 = 5$ y $\beta = 0.5, 1, 1.5$; y a la derecha: $\beta = 2$ y $B_3 = 5, 10, 15$.</i>	133
7.4	<i>Masa de las estrellas de bosones para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 2$ y diferentes valores de Λ y $\sigma(0)$. Se representan 34 modelos para cada valor de Λ. Los resultados numéricos de este gráfico resultan ser muy similares a aquellos que se derivan para Relatividad General.</i>	135
7.5	<i>Comportamiento de σ como una función de la coordenada radial para dos modelos típicos de estrellas de bosones escalares tensoriales, Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. La curva superior corresponde a $\Lambda = 0$ y la inferior a $\Lambda = 100$.</i>	136
7.6	<i>Comportamiento del escalar Φ como una función de la coordenada radial para dos modelos típicos de estrellas de bosones escalares tensoriales, Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. La curva superior corresponde a $\Lambda = 100$ y la inferior a $\Lambda = 0$.</i>	137
8.1	<i>Masas de las estrellas de bosones como función de $\Phi(\infty)$; cuadrados son para modelos en la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$ y triángulos para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. El panel izquierdo muestra modelos con $\Lambda = 100$ y $\sigma(0) = 0.06$. El derecho lo hace con modelos dados por $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.1$.</i>	143
8.2	<i>Masas de las estrellas de bosones como función del número de partículas para la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$ (cuadrados) y la Teoría 1 con parámetros $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$ (triángulos). Ambos casos tienen $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.1$. El punto más a la izquierda corresponde a $\Phi(\infty) = 0.9$ y el más a la derecha a $\Phi(\infty) = 1.1$. Como $M(N)$ es simplemente valuada, no puede haber cambio en la estabilidad.</i>	144

8.3	<i>Configuraciones de equilibrio de estrellas de bosones. Se muestran configuraciones con distintos valores de $\Phi(\infty)$ y auto-interacción. De las dos líneas para cada caso, la superior es la asociada al número de partículas. $\sigma(0)$ está en el intervalo $(0, 0.75)$ y hay 50 modelos por curva.</i>	148
8.4	<i>Curvas típicas para la masa como función de $\Phi(0)$, con $\Phi(\infty) = 0.95$. Nótese el pequeño rango del eje x.</i>	148
8.5	<i>El panel izquierdo muestra la energía de ligadura como función del número de partículas para distintos valores de $\Phi(\infty)$ y Λ. El panel derecho muestra las masas de las estrellas de bosones alrededor del intervalo de $\sigma(0) \in [0.265, 0.275]$ para $\Phi(\infty) = 1.05$ (arriba), $\Phi(\infty) = 1.0$ (medio) y $\Phi(\infty) = 0.95$ (abajo). Los modelos corresponde a la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$.</i>	149
8.6	<i>Radio de configuraciones de equilibrio en la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$. El rango de $\sigma(0)$ es $(0, 0.75)$.</i>	150
8.7	<i>Comportamiento de la diferencia entre el valor central y asintótico del escalar de Brans-Dicke para $\omega = 400$ como función de $\sigma(0)$ y diferentes valores de $\Phi(\infty)$. Nótese el eje y ampliamente expandido.</i>	151
8.8	<i>Características de las estrellas de bosones para una dada densidad central como función de $\Phi(\infty)$.</i>	152
8.9	<i>Energías de ligadura de las estrellas de bosones como función del parámetro w, en el rango 50 a 50000. El panel superior muestra modelos con $\Phi(\infty) = 0.98$, y el inferior con $\Phi(\infty) = 1$. Los valores de $\sigma(0)$ están en el rango $(0, 0.3)$.</i>	152

List of Tables

1.1	Algunas cotas sobre \dot{G}/G [yr ⁻¹].	11
4.1	Valores mínimos del exponente α que son compatibles con la abundancia observada de ⁴ He primordial	64
4.2	Comportamiento característico de δY_p producido por distintos valores del exponente de la ley de potencias.	66
6.1	Masas negativas necesarias para obtener cada una de las escalas de variabilidad. La configuración de redshifts lente-fuente está dada por $z_l = 0.25$ y $z_s = 2.5$. Se muestran también los correspondientes radios de Einstein y se supone una velocidad extragaláctica igual a 1000km s ⁻¹	117
6.2	Masas del wormhole absurdamente benigno.	118
7.1	Masas de las estrellas de bosones para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$	135
7.2	Dependencia de las masas de las estrellas de bosones sobre el espacio de parámetros de la Teoría 1 con $\Lambda = 100$, $\sigma(0) = 0.100$	137
7.3	Masas de las estrellas de bosones como función de la condición de contorno para Φ . El primer conjunto muestra el modelo con $\Lambda = 100$ y $\sigma(0) = 0.100$, el segundo: $\Lambda = 10$ y $\sigma(0) = 0.225$, mientras que el tercero lo hace para, $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.325$. Estos modelos son para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$	138
7.4	Masas de las estrellas de bosones para funciones acoplamiento implícitamente definidas. Se muestran los resultados para el modelos con $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.325$. Una pequeña estrella señala que la función Φ es no-monótona, típicamente en la región más interior. La condición de contorno sobre el escalar de Brans-Dicke es igual a 1 aunque se aceptaron desviaciones de orden 10^{-4}	138

Agradecimientos

*Y no perdió la amistad, porque la amistad
es una noble y humilde cenicienta, acostumbrada a las privaciones.*

Adolfo Bioy Casares
El sue no de los héroes

Quisiera expresar aquí mi agradecimiento a aquellas personas e instituciones que hicieron posible que esta tesis fuera escrita. Ante todo, mi reconocimiento a la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), especialmente al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. En ambos lugares estudié cursos de grado y de posgrado y el primero es mi lugar de trabajo actual. De los profesores de ambas casas de estudio, agradezco especialmente a mi Director, Héctor Vucetich, con quien, además de haber sido coautor en partes de esta tesis, me inicié en el estudio de las teorías de gravitación y me diera la libertad necesaria para llevar adelante los proyectos de los que doy cuenta aquí. Su generoso apoyo es algo sin lo cual esta tesis no hubiese sido escrita nunca.

Varias instituciones me apoyaron económicamente para posibilitar dedicarme a tiempo completo a la investigación. Le estoy especialmente agradecido a la Fundación Antorchas, a la UNLP y al CONICET. El Observatorio Vaticano (USA, Italia), el Centro Ettore Majorana (Italia), el Observatorio de Paris (Francia), la Fundación Rosemblum (USA), la Universidad de Potsdam (Alemania) y la Universidad de Córdoba subvencionaron mi asistencia a distintas escuelas y congresos de la especialidad que jugaron un papel importante en mi formación. Finalmente, al British Council y a la Embajada del Reino Unido en Argentina, quienes me distinguieron como Chevening Fellow y posibilitaron un periodo de investigación de posgrado en el Astronomy Centre de la Universidad de Sussex (UK). A este centro le agradezco haber puesto generosamente todos sus recursos a mi disposición, además de proveer de un ambiente inmejorable para trabajar y aprender.

Agradezco también el apoyo computacional brindado por D. Krmpotic y el grupo Mösbauer del Departamento de Física, liderado por el Dr. R. Mercader, quienes me brindaron acceso a sus computadoras durante toda esta investigación. Luis Anchordoqui, Ileana Andruchow y Santiago Perez-Bergliaffa realizaron lecturas críticas de los primeras versiones de esta tesis.

Hay quienes piensan que cuantos más nombres se encuentran en los agradecimientos de un trabajo menos responsable quiere sentirse el autor del mismo. Ante esto, yo prefiero evitar la frase habitual de que todos los errores me pertenecen, por obvia. Los nombres que figuran a continuación lo hacen porque de ellos aprendí lo poco que pueda conocer y, por sobre todo, aquello sobre lo que me gustaría saber más. Vaya entonces mi agradecimiento a Héctor Vucetich, con quien analizamos lagrangianos genéricos y me ense no aspectos experimentales de la gravitación. A John D. Barrow (SUSSEX), quien supervisó mi trabajo en el Astronomy Centre y me acercó su visión contextual de las teorías escalares tensoriales. A Andrew Liddle y Franz Schunck (SUSSEX) por valiosas discusiones sobre estrellas de bosones. A todo el *wormhole team* (UNLP) y particularmente a Luis Anchordoqui, por acercarme a la física de los wormholes. A Omar Benvenuto (UNLP), quien me ense no estructura y evolución estelar. A

Amina Helmi (LEIDEN), quien hizo lo propio con conceptos de integrabilidad de ecuaciones diferenciales. A Gustavo Romero (IAR), quien me acercó a la física de los Gamma Ray Bursts y AGNs. A William Stoeger (ARIZONA), por nuestra colaboración en los problemas de promediado en espacios curvos. A Salvatore Capozziello (SALERNO), por haberme inmerso en los métodos de simetrías de Noether en situaciones cosmológicas.

Invariablemente aprendí de mis coautores: Leandro Althaus, Luis Anchordoqui, Omar Benvenuto, Santiago Perez-Bergliaffa, Ana Grunfeld, Amina Helmi, Andrew Liddle, Angel Plastino, Gustavo Romero, Franz Schunck, Ugur Tirnakli, Marta Trobo y Héctor Vucetich. Por su paciencia, profesionalismo y compañerismo, estoy en deuda con ellos.

Quisiera recordar además a algunas personas que me ayudaron especialmente en distintas etapas de este trabajo. Vale aquí expresar mi agradecimiento a Juan García Bellido (CERN), quien me ayudó a entender la forma de obtener límites de nucleosíntesis en las primeras etapas de mi investigación de tesis. A Jose Mimoso (LISBOA) y Alan Goriely (ARIZONA), quienes me enviaron sus tesis de Doctorado y posibilitaron generosas discusiones sobre las mismas. A David Wands (PORTSMOUTH), por sus valiosos comentarios sobre las teorías lagrangianas genéricas. A Bernard Carr y Andrew Whinnett (QMW) por las discusiones sobre los procesos de memoria estelar.

Jamás estarían completos mis agradecimientos sin nombrar a mis amigos y a mi familia. Sin los primeros, los momentos de alegría serían vanos y los de tristeza insoportables. A Mayte, con quien entrañablemente compartí los últimos doce años. A Silvana, con quien, en la misma oficina, superamos los periodos de *depresión* y de *cero ideas*. A Gabriela, por su cariño y su constante apoyo. A Luis, Marta y Santiago con quienes cada minuto de estudio fue uno de diversión. A Gustavo, con quien nos permitimos soñar con un futuro mejor. Al Chufo, por su compañerismo y sus mates. A Bárbara, por su confianza y amistad.

Sin mi familia podría haberse escrito una tesis, pero el autor sería otra persona. A ellos les debo, sin duda, todo lo bueno que pueda haber en mí. Mi madre me enseñó que la vida sin coraje es una vida a medias; mi padre me enseñó que el coraje sin sacrificio ni objetivo no es más que una amenaza inútil; mi hermano me enseñó que la lealtad es un concepto *a priori*. Ante esto, escribir *gracias* en una página de tesis se diluye y pierde sentido, pero no hacerlo es impensable. A Francisco, Cristina, Vanesa, Valeria, Reina y Tobías les agradezco su apoyo permanente. Lo mismo es válido para Juan, Nelly, Toto, Sarah y Juana. Y un agradecido recuerdo para mis amigos Adso y Julia.

Finalmente, hay una persona especial. Una persona que me acompañó en cada uno de los detalles. Una persona a la que no puedo ni quiero asociarle una descripción completa. A una sola persona, a esa a cuya magia espero asistir por siempre, está dedicada esta tesis.

Diego F. Torres
La Plata, 4 de Septiembre de 1998.

Prefacio

Esta tesis es el resultado de poco más de tres años de investigación, desarrollada en el Departamento de Física de la Universidad Nacional de La Plata y, por un periodo de cinco meses, en el Astronomy Centre de la Universidad de Sussex en el Reino Unido. El tema de la misma es la influencia de la teoría de la gravitación en modelos cosmológicos y objetos astrofísicos, con particular atención a las teorías escalares tensoriales. Estas teorías, véase la Introducción, son la alternativa más seria al modelo standard y constituyen formas viables para describir los fenómenos gravitatorios.

Hemos intentado escribir esta tesis en forma autocontenida. Esto significa que, aunque se suponen conocidos algunos conceptos y prácticas operativas de la Relatividad General y también algunos aspectos observacionales, en cada capítulo introducimos los elementos fundamentales para que puedan seguirse, tanto las ideas como los cálculos, en forma efectiva. Las nociones de base de las teorías escalares tensoriales se discuten en una introducción general (Capítulo 1) que da cuenta de las herramientas que se usarán a lo largo de la tesis. Todos los capítulos tienen además una introducción al tema particular que pone en evidencia el status actual de las investigaciones y da un marco de referencia para analizar los resultados originales. También en cada capítulo se dan las conclusiones a las que el estudio conduce. Es por esto que, a modo de síntesis, la tesis cuenta con un breve Epílogo y no con un capítulo general de conclusiones.

La tesis está basada en una serie de artículos publicados en revistas internacionales con referato y en *proceedings* de congresos; véase los agradecimientos. Las publicaciones en revistas son las Refs. [79, 80, 81, 123, 167, 168, 240, 241, 292, 291, 356, 380]. Actualmente en referato (a la fecha de la firma en los Agradecimientos) se encuentra la Ref. [381]. Los trabajos publicados en *proceedings* son [242, 357]. Otros trabajos a los que se hace mención en la tesis pero sobre los que no se discute en detalle son [14, 208, 209, 210, 276, 390].

Las unidades que se utilizan en la tesis son en general tales que $\hbar = c = 1$. Esto hace que las densidades de masa y de energía sean intercambiables. Además se utilizará $G = 1$, que con la convención anterior es $G = M_{\text{Pl}}^{-2}$. Cualquier modificación a esta convención será aclarada convenientemente. La signatura del tensor métrico es $(-, +, +, +)$ y otras convenciones siguen, a menos que se señale explícitamente, al libro de Landau y Lifshitz [1] sobre teoría de campos.

El idioma en que está escrita la tesis es el castellano, pero hemos tratado de respetar esto de manera eficiente. Esto significa que no hemos traducido palabras cuya significado conceptual y su aceptación convencional es clara en inglés u otros idiomas. Por ejemplo, *wormhole* no es traducida como agujero de gusano, o *gamma ray burst* no lo es como explosiones de rayos gamma. Hemos optado por presentar las palabras en caracteres itálicos y luego simplemente utilizarlas como parte del lenguaje usual.

Finalmente, notemos que para hacer la presentación más clara, hemos adaptado los siguientes gráficos de sus respectivas referencias originales: Fig. 4.1 de la Ref. [176]; Fig. 5.5 de [244]; Fig. ?? de [329]; la parte derecha de la Fig. 6.7 de la Ref. [293] y las Figs. 7.1, 7.2 y 7.3 de [362].

Chapter 1

Introducción

*Donde se visita el scriptorium, y se conocen
muchos estudiosos, copistas y rubricantes.*

Umberto Eco
El nombre de la rosa

1.1 Algunos comentarios históricos

Las primeras ideas relacionadas con teorías alternativas de gravitación, en especial con aquellas que se estudiarán en esta tesis, son las referentes a la naturaleza del espacio [2]. En mecánica Newtoniana, se supone la existencia de un espacio físico absoluto, caracterizado por una geometría Euclidiana, con respecto al cual se define el movimiento. El concepto de sistema inercial es relativo a este espacio, y serán aquellos sistemas que se encuentren en reposo o en movimiento uniforme con respecto a él. Sin embargo, algunas objeciones de carácter filosófico aparecieron en contra de la existencia de un espacio con propiedades independientes de la materia que lo habita. Ya Berkeley [3] se negaba que su *opinión es que no puede existir el movimiento si no es relativo*. Y agregaba luego que *para concebir el movimiento se precisa que haya por los menos dos cuerpos cuyas distancias relativas experimenten variación. Si sólo existiera un cuerpo sería imposible que se moviera*. Mach [4] fue el primero en intentar dar una interpretación física a estas ideas, postulando que las fuerzas inerciales observadas localmente en sistemas acelerados deberían interpretarse como efectos gravitacionales con origen en la distribución de materia. La afirmación de que los efectos inerciales dependen de la interacción mutua de la materia es conocida como principio de Mach. En cierto sentido, el principio de Mach está muy relacionado con el principio de equivalencia de la Relatividad General [5]. Sin embargo, como Einstein mismo reconoció, su teoría no contiene en forma exacta estas ideas. La geometría del espacio, que es afectada por la distribución de masas, no está únicamente determinada por ésta, i.e. no hay un mecanismo dentro de la teoría que permita eliminar las soluciones de vacío.

A pesar de no tener una teoría relativista de campo, Dirac [6] comenzó a pensar que una de las formas de incorporar las ideas de Mach a la gravitación era a través de una variación de la *constante* de Newton. Incidentalmente, también encontró una serie de coincidencias numéricas para las razones de las constantes fundamentales relacionadas con la micro y macrofísica. Estas habían sido señaladas tiempo atrás por otros, especialmente por Eddington [7], pero Dirac fue el primero en intentar darle una interpretación física basada en una teoría subyacente. Esta la resumió en la *hipótesis de los grandes números* [8]: *Cualquiera dos de los grandes números adimensionales que ocurren en la naturaleza están conectados por una relación matemática*

simple, en la cual los coeficientes son de orden 1. Ejemplos de estos *grandes números* son la razón entre la edad del universo y un tiempo atómico característico $N_1 = t_0/(e^2/m_e c^3) \sim 6 \times 10^{39}$ o entre la fuerza eléctrica y gravitatoria entre el protón y el electrón $N_2 = e^2/Gm_p m_e \sim 2.3 \times 10^{39}$. Aquí, G es la constante de gravitación, m_p es la masa del protón, m_e la masa del electrón, e su carga y t_0 la edad del universo. Debido a que Dirac introdujo un factor dependiente del tiempo (t_0) entre sus combinaciones de parámetros fundamentales, la hipótesis de los grandes números tiene variadas consecuencias. Cualquier magnitud proporcional a N_1 también debe reflejar esta variación: todos los números de orden $(10^{39})^n$ deben variar como t^n y son *grandes* porque el universo es viejo. Ya que admitir que m_p, m_e o e implicaría una gran reforma a una bien testeada microfísica, Dirac suscribió a una variación temporal de G . Por consistencia con la hipótesis de Dirac, la gravitación debe hacerse más débil con el paso del tiempo, en la forma $G \propto t^{-1}$. Esto generó todo un modelo cosmológico cuyas consecuencias observables pueden ser analizadas, véase por ejemplo la Ref. [9]. Además de su dudosa fundamentación teórica, entre sus problemas prácticos, la cosmología de Dirac conduce a una edad del universo menor que la edad geológica de la Tierra [10].

Otras teorías de gravitación, particularmente las propuestas por Sciama [11] y Whitrow y Randall [12], han intentado sin éxito acercarse aún más a la visión del espacio-tiempo de Mach. En general, cuando se las compara con la elegancia formal y el poder predictivo de la Relatividad General, todos estos formalismos preliminares palidecen. En éstas, y en general a partir de argumentos dimensionales simples [13], o de la hipótesis de los grandes números, la suposición de validez del principio de Mach implica que la constante de gravitación G está relacionada con la distribución de masa en un universo en expansión uniforme por medio de la relación $GM/R \sim 1$, donde M es la masa finita contenida en una esfera de radio igual al del universo causalmente conectado. Esto también sugiere una variación temporal de G .¹

El próximo gran avance en la consolidación de teorías alternativas de gravitación fue dado por el desarrollo de las ideas tendientes a unificar la gravitación con el electromagnetismo, tarea esencialmente asociada a los nombres de Kaluza y Klein. La idea básica de Kaluza-Klein es realizar un *embedding* del potencial electromagnético en la misma métrica, mediante un número mayor de dimensiones, e insertar el tetra-potencial electromagnético como

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} V^2 & V^2 A_\beta \\ V^2 A_\alpha & g_{\alpha\beta} + V^2 A_\alpha A_\beta \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

El vector tangente a la dimensión extra es un vector de Killing, de forma que todas las variables dependen sólo de las coordenadas espacio-temporales. Contando las variables, vemos las usuales componentes de la métrica, las cuatro componentes de A_α , y una cantidad escalar extra V . Es por esto que desde el punto de vista de esta tesis, las teorías de Kaluza-Klein son históricamente importantes [15, 16, 17]. Aunque discutiremos sobre algunas versiones de estas teorías en partes del Capítulo 4, no las analizaremos con mayor detalle en esta tesis.

Jordan [18] fue uno de los primeros en interesarse en el nuevo campo escalar de las teorías de Kaluza-Klein y en su posible rol como constante gravitacional generalizada. Poco tiempo después, Robert Dicke y Carl Brans [19] arribaron a la primera teoría relativista de campo basada en la existencia de un campo escalar en un espacio-tiempo Riemanniano. Esta teoría iba a resistir más de cuarenta a nos de experimentos y observaciones y a convertirse en la alternativa más seria del modelo standard. Brans y Dicke estaban especialmente motivados por introducir una teoría de gravitación acorde al principio de Mach, y buscaban un mecanismo teórico para generar las fuerzas inerciales que eran experimentadas durante la aceleración de un sistema de referencia. Así, las fuerzas gravitatorias en el marco de la teoría deberían depender de

¹Un estudio analítico de la relación anterior en el marco de la teoría de Brans-Dicke fue publicado en la Ref. [14].

la posición en el espacio-tiempo. En notación usual, tales teorías introducen un campo escalar, ϕ , que juega, localmente, el rol de la inversa de la constante de Newton. Una motivación para que sea la inversa G^{-1} y no G el parámetro directamente asociado con ϕ –aunque esto puede asumirse como una cuestión de interpretación– aparece de la siguiente manera. A partir de la relación $GM/R \sim 1$, y si la teoría fuera lineal –algo que nadie espera–, se tendría que la suma de cada una de las contribuciones de las masas causalmente conectada otorgaría un valor $G^{-1} \sim \sum_i (m_i/r_i c^2)$. Así, sería la recíproca de G el parámetro determinado localmente y la idea era entonces que éste satisficiera una ecuación de campo con la materia como fuente. En el lagrangiano usual de la Relatividad General, G multiplica en forma directa el término de materia. Pero si ahora G es variable en el espacio-tiempo, encontraríamos cambios en el comportamiento local de la materia. Consecuentemente, con el objeto de preservar las leyes locales, se deben hacer ciertas modificaciones sobre la acción de la Relatividad General. Comencemos por escribir esta acción,

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi} R + G \mathcal{L}_m \right), \quad (1.2)$$

donde \mathcal{L}_m (S_m) es la densidad lagrangiana (acción) de materia y R el escalar de curvatura. Siguiendo el proceso de Brans y Dicke, se aislará a G del término de materia, dividiendo,

$$\delta S_m + \frac{1}{16\pi} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \phi R = 0, \quad (1.3)$$

donde $\phi \equiv 1/G$ y se ha tenido en cuenta el principio variacional. De esta forma, se han mantenido las ecuaciones de las geodésicas para partículas de prueba, y el principio de equivalencia débil, algo sobre lo que volveremos en detalle más adelante. Como ya hemos anticipado, es necesario que aparezca una ecuación de campo para ϕ , por lo que debe agregarse una acción adicional,

$$\delta S_m + \frac{1}{16\pi} \delta \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R + \mathcal{L}_\phi) = 0. \quad (1.4)$$

El requerimiento usual de que las ecuaciones de campo sean de segundo orden conduce a que

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}). \quad (1.5)$$

Aparte de esto, hay pocas restricciones sobre \mathcal{L}_ϕ . La elección standard para un campo escalar es,

$$\mathcal{L}_\phi = -\omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

pero generaría que el parámetro ω tuviera que tener dimensiones (como las de G). Como parece razonable requerir que toda constante de acoplamiento (en este caso, entre la métrica y el campo escalar) sea adimensional, se introduce

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{\omega}{\phi} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Sumando todos los términos, se llega a la acción de Jordan-Brans-Dicke²,

$$\delta S_m + \frac{1}{16\pi} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (1.8)$$

²A lo largo de esta tesis nos referiremos a ella simplemente como la acción de Brans-Dicke.

La utilización del principio variacional respecto a las dos variables dinámicas de la teoría ($g^{\mu\nu}$ y ϕ) conduce a las ecuaciones de campo. Por completitud, y aunque volveremos a ellas repetidas veces en esta tesis, las introduciremos aquí,

$$\phi G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}^m + \frac{\omega}{\phi} \left(\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} \right) + (\phi_{;\alpha;\beta} - g_{\alpha\beta}\square\phi), \quad (1.9)$$

$$\omega \left(\frac{2\square\phi}{\phi} - \frac{\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}}{\phi^2} \right) + R = 0, \quad (1.10)$$

donde $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - (1/2)g_{\alpha\beta}R$ es el tensor de Einstein, con $R_{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci y R el escalar de curvatura. En (1.9), $T_{\alpha\beta}^m$ son las componentes del tensor de energía-impulso de la materia derivada de su propio lagrangiano \mathcal{L}_m en la manera usual,

$$T^{m;\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g_{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}} \right]. \quad (1.11)$$

El lado izquierdo de (1.9) es el usual de la Relatividad General multiplicado por el campo ϕ . De los segundos dos términos del lado derecho, el primero es el correspondiente al tensor de energía-impulso del campo escalar con lagrangiano \mathcal{L}_ϕ y el último proviene de la existencia en R de derivadas segundas de la métrica y del proceso de integración por partes. La ecuación (1.9) puede reescribirse como,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\phi} [T_{\alpha\beta}^m + t_{\alpha\beta}^\phi], \quad (1.12)$$

definiendo $t_{\alpha\beta}^\phi$ como todos aquellos términos asociados al campo escalar del lado derecho de (1.9). Esta forma sugiere que $1/\phi$ actúa como constante gravitatoria generalizada, y que ambos, el campo escalar y los términos de materia sirven como fuente para la métrica. El rol de ϕ sobre la materia y la métrica será discutido en detalle a lo largo de esta introducción.

Un paso adicional en la generalización de la acción fue dado por Bergmann [20], Nordvedt [21] y Wagoner [22], quienes consideraron una función arbitraria $\omega(\phi)$. Aunque durante breve tiempo, estas teorías fueron conocidas como BWN, son ahora llamadas teorías escalares tensoriales. Luego, la teoría de Brans-Dicke es el ejemplo más simple del formalismo escalar tensorial. También es posible considerar una función potencial para ϕ en \mathcal{L}_ϕ , que cumple el rol de constante cosmológica generalizada. Diferentes extensiones de \mathcal{L}_ϕ serán estudiadas más adelante en esta tesis.

A continuación, y antes de analizar el status observacional y experimental de la variación de G , veremos varios aspectos técnicos que nos servirán de base para el estudio práctico de estas teorías. Mayores comentarios históricos pueden obtenerse de las Refs. [2, 8].

1.2 Aspectos técnicos

1.2.1 El significado de $\omega(\phi)$

Comentaremos ahora brevemente sobre el significado del acoplamiento $\omega(\phi)$. Lo primero a tener en cuenta aquí es que la función $\omega(\phi)$ no está definida *a priori*. No hay nada, en el momento de introducir la teoría, que haga suponer alguna forma especial o valor particular de ω . Es así que el acoplamiento es un parámetro libre que debe ajustarse para que la evidencia observacional y experimental no esté en contradicción con las predicciones de la teoría.

A partir de las ecuaciones de campo, es posible utilizar la contracción de (1.9) en (1.10) para obtener la ecuación para ϕ en una forma más operativa,

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega(\phi) + 3} \left[8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right], \quad (1.13)$$

donde T es la traza del tensor de energía-impulso de la materia. Utilizando esta forma de la ecuación y el límite débil, sobre el que discutiremos en la sección referente al status observacional, se puede ver que cuando ω tiende a infinito, el acoplamiento entre la métrica y el campo crece hasta hacerse universal, y es compatible con una solución $\phi = \text{constante}$. De (1.13), es aparente que para un valor de T finito, $\square\phi = O(1/\omega)$ para $\omega \rightarrow \infty$ y de allí, $\phi \sim \phi_0 + O(1/\omega)$. Sin embargo, algunos casos de interés han sido señalados en el que las soluciones de la teoría de Brans-Dicke no tienden a las de Relatividad General en el límite de grandes ω . El primer ejemplo fue citado por Romero y Barros [23], en el caso de vacío de un universo de Friedmann-Robertson-Walker. La solución cosmológica fue dada por O'Hanlon y Tupper [24] y en el límite $\omega \rightarrow \infty$ conduce a $\phi = \text{constante} + O(1/\sqrt{\omega})$. Con esta solución, las ecuaciones (1.9) y (1.10) tienen una contribución no trivial del campo escalar y la situación se hace diferente del caso standard. Otros ejemplos fueron dados por Banerjee y Sen [25], nuevamente por Romero y Barros [26] y otros. En todos ellos, el comportamiento del escalar es $\phi = \text{constante} + O(1/\sqrt{\omega})$ en lugar de $\phi = \text{constante} + O(1/\omega)$ y tienen en común que $T = 0$. Recientemente, Faraoni [27] utilizó técnicas de transformaciones conformes, que introducimos más abajo, para dar el comportamiento asintótico de ϕ en todos los casos en que la traza del tensor de energía-impulso es nula, probando el orden de magnitud señalado anteriormente.

Luego, el significado de $\omega(\phi)$ es otorgar el grado de acoplamiento entre la métrica y el campo escalar. Para contenidos de materia con $T \neq 0$, cuanto mayor es ω más se parece la teoría a la Relatividad General. Para $T = 0$, la teoría puede mostrar diferencias con el caso standard aún en el límite $\omega \rightarrow \infty$.

1.2.2 El principio de equivalencia

Poco hace falta señalar para notar la importancia del principio de equivalencia en la teoría de gravitación. Es prudente entonces decir unas palabras acerca de éste y de su relación con las ideas introducidas anteriormente.

Newton, en los primeros párrafos de sus *Principia*, demandaba que la masa de un cuerpo (propiedad que mide la respuesta a una fuerza aplicada), debía ser igual al peso (propiedad que mide la respuesta a la fuerza de gravitación). Bondi [28] parece haber sido el primero en acuñar las palabras *masa gravitacional* y *masa inercial* refiriéndose a la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \quad \mathbf{F} = m_g \mathbf{g}, \quad (1.14)$$

donde g es una aceleración gravitacional. El principio de equivalencia de Newton es, luego, $m_i = m_g$. Esto se traduce en el principio de equivalencia débil (PED), *todos los cuerpos caen en un campo gravitacional con la misma aceleración, sin importar su masa*. Einstein, se dió cuenta que si todos los cuerpos caen con la misma aceleración, para un observador en caída libre en el mismo campo gravitacional, los cuerpos no debían experimentar aceleración alguna y entonces, se comportarían como si la gravedad no existiera. La genialidad de Einstein lo llevó a postular que no sólo las leyes de la mecánica deberían comportarse de ese modo sino todas las leyes de la física, incluyendo las del electromagnetismo. Este nuevo principio se denomina equivalencia de Einstein (PEE).

En términos más precisos, el PED establece que *si una partícula de prueba –sin carga y no autogravitante– se coloca en un punto del espacio-tiempo, y se le otorga una dada velocidad*

inicial, la trayectoria subsiguiente será independiente de la estructura interna y composición. Asimismo, el PEE establece que 1) *PED es válido*, 2) *el resultado de cualquier experimento no gravitacional es independiente de la velocidad del laboratorio* y 3) *el resultado de cualquier experimento no gravitacional es independiente de cuándo y dónde el experimento es realizado*. La validez del PEE requiere que todo campo no gravitacional y toda partícula esté acoplada de la misma forma a una estructura geométrica, la métrica del espacio-tiempo. De hecho, el PEE conduce a que la gravitación sea un fenómeno geométrico y que la teoría que la describa deba ser una teoría métrica. En ellas, las partículas de prueba siguen las geodésicas de la variedad y en sistemas localmente Lorentzianos, las leyes no gravitacionales son aquellas de la Relatividad Especial. La teoría de la Relatividad General es una teoría métrica y también lo es la teoría de Brans-Dicke, ya que aunque existe en ella un nuevo campo gravitacional (ϕ), éste no se acopla a la materia y sólo cumple con el rol de mediar en el método según el cual la materia genera la geometría ($g_{\mu\nu}$). Una vez determinada ésta, la materia sólo responde a la métrica de acuerdo con el PEE. Veremos esto con más detalle.

Las ecuaciones de movimiento del contenido de materia se derivan del principio de mínima acción. Consideremos entonces la acción de la materia,

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L}_m, \quad (1.15)$$

donde \mathcal{L}_m depende en general de campos no gravitacionales q_A y sus derivadas y de la métrica. Ya que la acción es invariante, realizamos por conveniencia una transformación infinitesimal de coordenadas,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu. \quad (1.16)$$

La métrica se ve modificada según,

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = g^{\alpha\beta} \left(\delta_\alpha^\mu + \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\nu + \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\beta} \right) = g^{\mu\nu} + g^{\mu\beta} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\beta} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\alpha}. \quad (1.17)$$

El tensor $g'^{\mu\nu}$ es función de \mathbf{x}' mientras que el tensor $g^{\mu\nu}$ lo es de las viejas coordenadas \mathbf{x} . Para que todos los términos se expresen en función de las mismas variables, desarrollamos $g'^{\mu\nu}(x^\alpha + \zeta^\alpha)$ en potencias de ζ , despreciando términos de orden superior al lineal. Esto conduce a,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} \zeta_{,\nu}^\alpha - g_{\nu\alpha} \zeta_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\nu, \alpha} \zeta^\alpha = -\zeta_{\mu, \nu} - \zeta_{\nu, \mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \zeta_\alpha = -\zeta_{\mu;\nu} - \zeta_{\nu;\mu}. \quad (1.18)$$

Si asumimos que los campos de materia cambian de acuerdo a,

$$\delta q_A = d_{A\nu}^\mu \zeta_{,\mu}^\nu - q_{A, \nu} \zeta^\nu, \quad (1.19)$$

donde $d_{A\nu}^\mu$ son funciones de x^α , \mathcal{L}_m cambia según,

$$\sum_A \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial q_A} \delta q_A + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial q_{A,\mu}} \delta q_{A,\mu} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Substituyendo los resultados anteriores, integrando por partes y despreciando divergencias totales, se obtiene

$$\sum_A \left[\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta q_A} q_{A,\alpha} + \left(d_{A\alpha}^\mu \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta q_A} \right)_{,\mu} \right] + \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} - \left[g_{\mu\nu} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \right]_{,\nu} = 0. \quad (1.21)$$

Aquí, $\delta\mathcal{L}_m/\delta q_A$ es la derivada variacional, definida por

$$\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta q_A} = \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial q_A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial q_{A,\mu}}, \quad (1.22)$$

y $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía-impulso. Utilizando que $\Gamma_{\alpha\mu}^\mu = \partial \log \sqrt{-g}/\partial x^\alpha$, la ecuación (1.21) puede escribirse como,

$$T^\nu_{\alpha;\nu} = -\sqrt{-g} \sum_A \left[\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta q_A} q_{A,\alpha} + \left(d^\mu_{A\alpha} \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta q_A} \right)_{,\mu} \right]. \quad (1.23)$$

Pero las ecuaciones de movimiento de los campos de materia son obtenidas pidiendo que la derivada variacional $\delta\mathcal{L}_m/\delta q_A = 0$, lo que es equivalente a tener

$$T^\nu_{\alpha;\nu} = 0. \quad (1.24)$$

Entonces, la anulación de la divergencia covariante del tensor de energía-impulso es una consecuencia de las ecuaciones de movimiento de la materia. Éstas, de acuerdo al principio de equivalencia, sólo dependen de la métrica. Entonces, toda teoría que respete la ecuación (1.24) mantendrá la forma de las ecuaciones de movimiento de los campos no gravitacionales. En la teoría de Brans-Dicke, entonces, el principio de equivalencia es respetado y la diferencia con la Relatividad General surge sólo en las ecuaciones que determinan la métrica, y no en las ecuaciones de movimiento en una métrica dada. La anulación de $T^\nu_{\alpha;\nu}$ en la teoría de Brans-Dicke, y en general en toda teoría escalar tensorial, puede comprobarse a partir de argumentos intuitivos o de cálculo formal. Para lo primero, sólo es necesario observar que la forma de acción de los campos no gravitacionales es idéntica a la de la Relatividad General, el campo no está acoplado a la materia. Para lo segundo, un cálculo directo de la derivada covariante de la ecuación (1.9) muestra que

$$\phi_{,\mu} G_{\mu\nu} = 8\pi t^\phi_{\mu\nu ;\mu}. \quad (1.25)$$

En este sentido, la teoría no es una construcción al azar: el requerimiento anterior es suficiente para determinar $t^\phi_{\mu\nu ;\mu}$. Para esta forma inusual de introducir estas teorías véase la Ref. [10].

Ambas teorías, la de Einstein y la de Brans-Dicke son, además, puramente dinámicas. Esto es, sus campos gravitacionales tienen una evolución determinada por ecuaciones diferenciales parciales en las que el comportamiento de un campo (sólo uno en Relatividad General y dos en el caso de Brans-Dicke) está en general acoplado al de los otros campos de la teoría. No hay una geometría *a priori*, sino que esta se obtiene como solución de las ecuaciones de movimiento.

Para aclarar las diferencias entre distintas teorías relativistas de gravitación es que haremos uso de un nuevo principio de equivalencia. Consideremos un sistema en caída libre en cualquier teoría métrica de la gravitación, de forma que el sistema sea lo suficientemente grande como para contener materia gravitante (un planeta, por ejemplo) y sus campos gravitacionales asociados. Para determinar el comportamiento de este sistema se debe calcular la métrica, y para ésto, se debe calcular primero las condiciones de contorno: el comportamiento de los campos gravitacionales lejos del sistema. Luego, se resolverá en el entorno del sistema local. Como el ambiente en el cual reside el sistema local puede influir a través de las condiciones de contorno, los resultados de los experimentos gravitacionales pueden depender de la ubicación respecto a este campo externo. Los experimentos que no sean gravitacionales, sin embargo, no serán afectados, ya que se acoplan sólo a la métrica, que puede hacerse localmente Minkowskiana. Pero por ejemplo en el caso de Brans-Dicke, el valor asintótico de ϕ puede variar de punto a punto y los experimentos gravitacionales podrían no tener resultados invariantes. Estas ideas se

resumen en el principio de equivalencia fuerte (PEF) que establece que 1) *el PED es válido no solo para partículas de prueba sino además para cualquier objeto autogravitante*, 2) *el resultado de cualquier experimento es independiente de la velocidad del laboratorio* y 3) *el resultado de cualquier experimento es independiente de cuándo y dónde el experimento es realizado*. Las diferencias entre el PEE y el PEF es la inclusión en este último de cuerpos con energías auto-gravitantes no despreciables y de experimentos que involucran leyes gravitacionales.

Hemos visto entonces que, como se usa en relatividad general, el principio de equivalencia es más que la suposición de la equivalencia local de la fuerza gravitacional y la aceleración, o PED. También asume que todas las leyes de la física, *incluyendo su contenido numérico en forma de constantes fundamentales*, observadas en un laboratorio en caída libre, son independientes de la posición en el espacio-tiempo. El hecho de estudiar teorías que contienen variación de G es una indicación de que este principio no es más válido. Sin embargo, debe notarse que es el PED, y no el PEF, el que obtiene verificación experimental, por ejemplo con el método de Eötvös. Para una revisión del status experimental actual de los tests del principio de equivalencia véase el reciente trabajo de Vucetich [29] y el libro de Will [30].

1.2.3 El *Einstein frame* de la teoría

Analizaremos ahora el efecto de una transformación conforme y del campo escalar sobre la acción de Brans-Dicke. Intentaremos escribir el lagrangiano generalizado en la forma de la acción de Einstein más un término de materia dado por otro campo escalar mínimamente acoplado. Esta idea fue tempranamente introducida por Dicke [31] y es popular en conexión con teorías con mayor número de dimensiones y de orden. En teorías escalares tensoriales fue aplicada por Bergmann y Wagoner y utilizada infinidad de veces para la búsqueda de soluciones analíticas (véase por ejemplo, [32, 33, 34, 35]).

Consideremos la transformación,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\phi}{\phi_0} g_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

donde ϕ_0 es una constante introducida para hacer la transformación adimensional. En lo que sigue asumiremos que ϕ es en sí misma adimensional y que $\phi_0 = 1$ (esta es la elección usual a lo largo de la tesis, véase el Prefacio). Utilizando la métrica transformada, es posible generar todos los objetos geométricos de la teoría: el escalar de curvatura, el tensor de Ricci y otros. Además, es posible utilizar las bien conocidas relaciones entre los objetos transformados y aquellos en el sistema original [36]. Una vez hecho esto, sobre lo que daremos detalles en el próximo capítulo, se obtiene la acción en el nuevo sistema

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{\tilde{g}} d^4x \left[\tilde{R} - \frac{2\omega(\phi) + 3}{2} \frac{\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi}{\phi^2} \right] + \tilde{S}_m. \quad (1.27)$$

La acción para los términos de materia se ha transformado como,

$$\tilde{S}_m = \int \sqrt{\tilde{g}} d^4x \phi^{-2} \mathcal{L}_m. \quad (1.28)$$

Ahora, es posible definir un nuevo campo escalar, dado por

$$\psi = \int \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{2}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad (1.29)$$

para llegar finalmente a la expresión de la acción

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{\tilde{g}} d^4x \left[\tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi \right] + \tilde{S}_m. \quad (1.30)$$

Se ha recuperado la acción de la Relatividad General más la de un campo escalar con lagrangiano \mathcal{L}_ψ . Si escribimos las ecuaciones de Einstein en el sistema transformado obtenemos,

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} + \left[\psi_{;\mu} \psi_{;\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \psi_{;\alpha} \psi^{;\alpha} \right], \quad (1.31)$$

$$\square \psi = \sqrt{\frac{2}{2\omega(\phi) + 3}} 8\pi \tilde{T}, \quad (1.32)$$

mientras que el nuevo tensor de energía-impulso satisface,

$$\tilde{T}^\nu_{\mu;\nu} = -\frac{1}{2} \tilde{T} \left(\frac{\phi_{;\mu}}{\phi} \right) \frac{2}{2\omega(\phi) + 3}. \quad (1.33)$$

Es posible ver que cuando la traza del tensor de energía-impulso de los campos de materia originales se anula (por ejemplo en los casos de vacío o radiación), hay una equivalencia completa entre los dos sistemas. Sin embargo, en todos los otros casos, la materia está acoplada al campo escalar en el Einstein frame; aparece una interacción con el *fluido escalar*. Esto significa que las partículas de prueba ya no seguirán las geodésicas del espacio-tiempo; esto puede entenderse como una variación en sus masas con la constante de gravitación, *constante* [31]. Así, puede pensarse que el principio de equivalencia es violado, pero si consideramos que el campo escalar es también fuente de las ecuaciones de Einstein, esta conclusión parece discutible [35, 37]. Como existe un tensor de energía-impulso total, que tiene en cuenta también el aporte del campo escalar, podemos pensar que éste es el verdadero $T^m_{\mu\nu}$, de forma que el principio de equivalencia se respeta y la ecuación (1.33) es consecuencia sólo de que estamos separando en forma espúrea los componentes de $\tilde{\mathcal{L}}_m$ y \mathcal{L}_ψ .

A modo de resumen se nalemos entonces que existe una manera de simplificar el lagrangiano gravitacional de las teorías escalares tensoriales y llevarlo a la forma del de la Relatividad General. Esto se logra por medio de la utilización de una transformación conforme. El precio que debe pagarse es que el lagrangiano de materia se complica y en particular, que la energía de los campos de materia originales ya no se conserva, a menos que su tensor de energía-impulso tuviera traza nula. En general, solamente se conserva la energía total, suma de los aportes del nuevo campo escalar mínimamente acoplado y la materia original.

La equivalencia conforme entre las teorías escalares tensoriales y la Relatividad General más un campo escalar es una herramienta conocida para obtener soluciones analíticas, utilizando los resultados existentes en el marco de la gravitación de Einstein. Pero además, durante los últimos años, ha habido mucha discusión sobre cual de los dos sistemas debe considerarse como físico [38]. Para constestar esto, la forma más inteligente parece la propuesta por Wands y otros [35] y se basa en definir *a priori* qué características físicas deseamos para la métrica. Hemos visto que la diferencia fundamental entre los dos sistemas es la forma del lagrangiano de materia. Luego, si deseamos considerar partículas de prueba con masa fija, es el lagrangiano en la forma de Jordan el que debe considerarse como físico. En general, si se define un tensor de energía-impulso en el frame de Jordan, y se considera que la aparición de la interacción con el fluido escalar en el frame de Einstein no es física, el frame de Einstein no es físico. Debe notarse, sin embargo, que la equivalencia conforme entre las dos métricas no es solo una equivalencia dinámica que produce el mismo conjunto de ecuaciones de campo, sino una identificación de la acción. Esto hace que la diferencia esté, finalmente, sólo en la elección de variables: qué experimento sería capaz de distinguir, al margen de suposiciones *a priori*, si es la constante de

gravitación o las masas de las partículas fundamentales el parámetro que experimenta variación es algo aún no aclarado [39].

En esta tesis se trabajará esencialmente en el frame de Jordan, i.e. con la acción original de Brans-Dicke, y sólo como herramienta utilizaremos el frame de Einstein. Es en el sistema original en el que se encuentra más clara la motivación y las diferencias con el modelo standard. Mi opinión es que la discusión (a veces filosófica y muchas veces pasional) sobre cuál de los sistemas es el físico debe dejarse a un lado hasta que no hayamos encontrado evidencias inquebrantables de que la teoría de gravitación no es sólo tensorial.

1.2.4 Teorías de unificación y límite de bajas energías

Algo que ha aumentado notablemente el interés en teorías escalares tensoriales es que aparecen como límite de bajas energías en (intentos) de teorías de gran unificación. La idea es que la teoría de gravitación, en particular la Relatividad General, aparezca como límite de bajas energías y bajas curvaturas del espacio-tiempo en un formalismo que la unifique con la teoría cuántica de campos. Sin embargo, casi todos los intentos de gran unificación, en particular la teoría de cuerdas, otorgan campos escalares acoplados a la curvatura como en la acción de Brans-Dicke [40]. Esto hace que aunque la Relatividad General sea una solución particular de la teoría de gravitación a bajas energías, conforme un conjunto de medida nula entre todas las posibilidades. Inclusive se ha señalado que la teoría de gravitación a bajas energías es consistente con un acoplamiento $\omega = -1$ [41, 42] de la teoría de Brans-Dicke. Esto también aumentó el estudio de los modelos en que ω es una función variable en el tiempo con el objeto de poder así cumplir con los tests débiles de gravitación en la época actual. No estudiaremos en detalle la aparición de la gravitación escalar tensorial como límites de estas teorías, pero referimos al lector interesado a la Ref. [43] y a modo de resumen a la Ref. [44].

En las teorías del universo temprano, se supone usualmente que sólo un campo escalar gobierna la evolución de las ecuaciones y que el resto de los escalares (si los hubiera) juegan un rol subdominante. También podría suceder que todos los campos contribuyan igualmente a la dinámica. Tales escalares adicionales podrían aparecer en teorías tipo Kaluza-Klein [45] o cosmologías multidimensionales [46]. De hecho, existen teorías que predicen un gran número de escalares, por ejemplo 70 campos contribuyen en la acción de la Refs. [47, 48]. En un marco cosmológico, múltiples campos escalares acoplados a la curvatura fueron analizados por Berkin y Hellings [49] (véase también [50]), quienes analizaron la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi)R - G_{AB}g^{\mu\nu}\phi_{A,\mu}\phi_{B,\nu} + 16\pi\mathcal{L}_m]. \quad (1.34)$$

Aquí, además del significado usual de R y del lagrangiano de materia, \mathcal{L}_m , ϕ es un campo escalar de N componentes y G_{AB} describe el acoplamiento cinético entre los campos. Para encontrar soluciones cosmológicas, Berkin y Hellings asumieron que

$$f(\phi) = f_c + F_{AB}\phi_A\phi_B, \quad (1.35)$$

donde f_c y F_{AB} son constantes. Esta forma es una generalización del caso no mínimamente acoplado a múltiples campos.

1.3 El status observacional

Iniciamos ahora el análisis de la cuestión crucial de comparar las predicciones de las teorías escalares tensoriales con las observaciones. Uno de los aspectos fundamentales de las teorías en

Table 1.1: Algunas cotas sobre \dot{G}/G [yr^{-1}].

Método/Objeto	$\dot{G}/G < \dots$	Referencia
Datos de radar (Mercurio-Venus)	4×10^{-10}	[52]
Datos de radar (Marte: Mariner 9)	1.5×10^{-10}	[53]
Datos de radar (Marte: Mariner 10)	$0.0 \pm 2.0 \times 10^{-12}$	[54]
Datos de radar (Marte: Viking)	3×10^{-11}	[55]
Datos de radar (Marte: Viking)	$2 \pm 4 \times 10^{-12}$	[56]
Datos de radar (Marte: Viking)	$-2 \pm 10 \times 10^{-12}$	[57]
Púlsar binario (PSR 1913+16)	$-1.10 \pm 1.07 \times 10^{-11}$	[58]
Sistema binario púlsar-enana blanca (PSR B1855+09)	$-9 \pm 18 \times 10^{-12}$	[59]
Enfriamiento de enanas blancas	$-1 \pm 1 \times 10^{-11}$	[60]
Nucleosíntesis cosmológica	$0.01 H$	[Cap. 4]
Ocultaciones lunares y eclipses	0.4×10^{-10}	[61]
Datos de radar y láser (Luna)	0.3×10^{-10}	[62]
Evolución solar	$\sim 10^{-10}$	[63]
Masas y edades de estrellas de neutrones	$-0.6 \pm 4.2 \times 10^{-12}$	[64]
Evidencia paleontológica	$\sim 10^{-10}$	[65]
Estabilidad de cúmulos de galaxias	$5 \pm 1 \times 10^{-11}$	[66]

consideración es que ellas predicen una variación (temporal en el caso cosmológico) de G . En la Tabla 1.1 se presentan algunos de los límites actuales sobre \dot{G}/G , que conducen en general a variaciones menores que 10^{-11} o 10^{-12}yr^{-1} . Algunas de estas cotas deben tomarse con cuidado. Por ejemplo, movimientos propios en los púlsares o un mayor conocimiento del cinturón de asteroides podrían afectar los números señalados. Asimismo, otros, como aquel de nucleosíntesis, son fuertemente dependientes del modelo teórico. Sobre esto volveremos más adelante en esta tesis. Por último, variaciones conjuntas de varias de las constantes fundamentales hacen los límites aún más inciertos [51].

La mayor parte de la evidencia para testear teorías de gravitación proviene de experimentos en el sistema solar, donde los efectos post-Newtonianos encontrados en cada teoría pueden ser comparados. Los efectos post-Newtonianos se estiman del análisis de la teoría en situaciones donde el campo gravitacional es débil, i.e. la métrica puede describirse como una leve perturbación al espacio Minkowskiano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y las velocidades de los cuerpos son mucho menores que c [30]. Este límite no es adecuado para estudiar fenómenos de radiación gravitacional, objetos compactos (donde no sea válida la suposición de campos débiles) o cosmología, donde deben hacerse suposiciones completamente diferentes.

Todos estos tests tienden, en el caso escalar tensorial, a fijar valores posibles del acoplamiento ω . Sin embargo, estos tipo de experimentos sólo pueden acotar el acoplamiento en tiempos cósmicos recientes, pudiendo éste variar hacia el pasado cosmológico en forma apreciable. Este análisis fue mejorado notablemente al introducir una serie de parámetros adimensionales que caracterizan la desviación de la Relatividad General de cualquier teoría, el formalismo PPN [29, 30].

En el límite débil, Nordvedt [21] encontró una expresión para el valor observado de la constante gravitacional efectiva que surge en teorías escalares tensoriales,

$$G(t) = \phi^{-1} \left(\frac{4 + 2\omega(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} \right). \quad (1.36)$$

Esto conduce a,

$$\frac{\dot{G}(t)}{G} = -\dot{\phi} \left(\frac{3 + 2\omega(\phi)}{4 + 2\omega(\phi)} \right) \left(G + \frac{2\dot{\omega}}{(3 + 2\omega)^2} \right). \quad (1.37)$$

Los límites observacionales anteriores, junto con la deflexión de la luz por el sol, la tasa de variación del perihelio de Mercurio, el efecto Nordvedt, etc., implican que si $\omega \rightarrow \infty$ y $\dot{\omega}\omega^{-3} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, las predicciones en el límite débil acordarán bien con los valores estándares. En particular, se necesita que para tiempos cósmicos recientes, $|\omega| \geq 500$ [67]. Sin embargo, esto no precluye que la teoría pueda tener desviaciones notorias con la Relatividad General para tiempos cosmológicos tempranos; es allí donde teorías con $\omega(\phi)$ se hacen especialmente interesantes. Como veremos, los modelos cosmológicos son sensibles a la aparición de ϕ . Nuevos escenarios de inflación hacen uso de este campo sin necesidad de introducir una constante cosmológica u de otros inflatones y el proceso de nucleosíntesis también se ve modificado. Lo mismo sucede con objetos astrofísicos, que son sensibles aún a una variación lenta en G ocurrida durante las últimas etapas de la evolución del universo.

Entre los test fuertes de las teorías de gravitación, es decir, aquellos que hacen uso de las predicciones exactas de cada teoría, uno de los más importantes es el referente a la emisión de ondas gravitacionales por sistemas binarios [68]. Los sistemas binarios que emiten ondas gravitacionales están formados por objetos compactos: estrellas de neutrones que presentan fuertes campos gravitacionales. Las hipótesis del formalismo PPN sólo son válidas en la región interobjeto, mientras que en el interior de los mismos es necesario resolver las ecuaciones de campo de la teoría completa [29]. Las características de la radiación en ondas gravitacionales (velocidad, polarización, etc) junto con el conocimiento de la estructura y el movimiento de objetos compactos en distintas teorías de gravitación hace que esta sea una nueva y fructífera arena de prueba, especialmente cuando las nuevas tecnologías de detección planeadas para el próximo milenio estén operativas, LIGO en los Estados Unidos y VIRGO en Europa [69]. Un caso notorio fue el de la detección del púlsar binario PSR1913+16, en el que por primera vez se midió el decaimiento de la órbita y el aumento del periodo, de acuerdo a las predicciones de la teoría de la Relatividad General [30]. Estas observaciones sirvieron asimismo para testear otras teorías alternativas, determinando que la desviación del modelo standard no puede ser mayor a unos pocos por cientos. La detección directa de ondas gravitacionales posibilitará estudiar la evolución de la fase de la onda y transformar esto en un nuevo test fuerte de la teoría: en teorías escalares tensoriales, los sistemas pueden perder energía por medio de la emisión de ondas escalares además de la radiación cuarupolar [30, 50]. Otros test fuertes, algunos de los cuales son más dependientes del modelo cosmológico asumido (como aquellos de inflación), están comentados en la reciente Ref. [70]. Véase también la tesis de Wands [39].

1.4 Sobre esta tesis

Habiendo recorrido hasta aquí algunos de los elementos fundamentales de las teorías escalares tensoriales especificaremos ahora los objetivos y contenidos de esta tesis.

Queremos estudiar con el mayor detalle posible distintos escenarios cosmológicos de estas teorías, analizando métodos que permitan el cálculo de soluciones analíticas y verificando la influencia de éstas sobre las predicciones físicas de la teoría. Mantendremos el interés en comparar con los resultados del modelo standard (Relatividad General) para buscar diferencias que nos ayuden a definir cuál es la teoría de gravitación que mejor describe la realidad. Analizaremos si existe la posibilidad de obtener las mismas estructuras (aquellas que observan un alto grado de dependencia con la teoría de gravitación) en este escenario.³ Nos interesará estudiar

³Se desliza aquí la posición filosófica de la tesis. Asumimos que existe, dentro del andamiaje teórico de la

también, –a manera de primera aproximación– algunas de las consecuencias astrofísicas de una variación temporal de la constante de Newton. Por último, en la interfase de la cosmología y la astrofísica, analizaremos soluciones analíticas de wormholes y expondremos un modelo para explicar la posible repetición de los *Gamma Ray Bursts* junto con algunos de los fenómenos más esquivos, conocidos como anti-FREDS. Asimismo, impondremos una cota sobre cantidad de materia exótica en el universo.

En detalle, el contenido original de este trabajo se encuentra distribuido de la siguiente forma:

- Parte I: Cosmología

- Capítulo 2: Este capítulo trata sobre la forma del lagrangiano del campo escalar en teorías escalares tensoriales genéricas. Estudiamos diferentes formas del mismo y ampliamos métodos que permiten obtener soluciones cosmológicas analíticas en los casos de los modelos de Friedmann-Robertson-Walker (vacío y radiación, $k = 0, \pm 1$), modelos anisotrópicos (Bianchi I y otros) y modelos inflacionarios en los casos de *slow roll*.
- Capítulo 3: Aquí analizamos el caso del modelo cosmológico de la teoría de Brans-Dicke en que el contenido de materia está dado por dos fluidos no interactuantes: radiación y partículas no relativistas. Se demuestra que no existe solución analítica posible y se discute las implicancias de este resultado.
- Capítulo 4: Discutimos el período de nucleosíntesis en teorías escalares tensoriales y presentamos cotas sobre formas potenciales del acoplamiento $\omega(\phi)$. También generalizamos el método presentado para estudiar teorías de Kaluza-Klein no compactificadas (de Wesson) y se imponen cotas sobre la posible variación de las masas en reposo de las partículas elementales. Finalmente, comentamos brevemente sobre aplicaciones de métodos similares para la determinación de cotas sobre la teoría estadística.

- Parte II: En la interfase

- Capítulo 5: En este capítulo introducimos el concepto de wormhole y presentamos soluciones analíticas en los casos de vacío y no vacío en el marco de la teoría de Brans-Dicke. Analizamos para ellas el status de las violaciones a las condiciones de energía y demostramos con un ejemplo que el campo escalar puede ser el portador de la exotividad, aún cuando existe materia normal. Introducimos una solución de vacío también para el caso de la teoría con torsión, que discutimos brevemente.
- Capítulo 6: Analizamos aquí los efectos observables de los wormholes y en general de cualquier objeto compacto de masa negativa (exótica). Establecemos una relación entre el fenómeno de microlensing gravitacional y los Gamma Ray Bursts, para los cuáles proponemos una explicación en el caso de los *repeaters*. Finalmente, usando datos del satélite Compton, estudiamos diferentes candidatos a ser descriptos por el modelo e imponemos una cota sobre la cantidad de materia exótica que puede habitar en el espacio intergaláctico.

- Parte III: Astrofísica

ciencia, una descripción de los fenómenos gravitatorios que se adapta mejor que otras alternativas. Creemos que la teoría de gravitación debe ser única y que una investigación detallada podría definir cuál es.

- Capítulo 7: Introducimos aquí el concepto de estrella de bosones en el marco de teorías escalares genéricas y resolvemos numéricamente las ecuaciones de estructura para las mismas. Demostramos que este tipo de objetos relativistas pueden existir en estas teorías y que sus masas son siempre menores que las de sus contrapartes construidos en Relatividad General. Presentamos primeros indicios del fenómeno de memoria a nivel estelar.
- Capítulo 7: Continuamos aquí con el estudio iniciado en el capítulo anterior. Analizamos la estabilidad, para lo que introducimos conceptos de la teoría de catástrofes, y otros parámetros de las configuraciones estáticas de equilibrio. Estudiamos en detalle la influencia de la variación de la constante de gravitación efectiva sobre las estructuras y especulamos sobre las posibilidades de evolución que esto genera. Se discute además la aplicación de estas mismas ideas a cualquier otro objeto de larga vida.

Vayamos pues al desarrollo de la tesis.

Part I
Cosmología

Chapter 2

Gravitación Hiperextendida

*Me encontré en una selva oscura,
por haberme desviado del camino recto.*

Dante Alighieri
La Divina Comedia

2.1 Introducción

Previamente, hemos discutido cómo la gravitación escalar tensorial demuestra ser una generalización natural de la teoría de la Relatividad de Einstein. Esto provee de un interesante contexto para analizar cotas observacionales y posibles desviaciones de la teoría standard, encontrando así un escenario muy conveniente para estudiar cosmología [29, 30]. Además, para testear una teoría es necesario insertarla en un escenario mayor, un grupo de teorías de prueba. Este grupo tendrá en general un parámetro libre, y sólo para una elección conveniente de éste se recuperará el modelo standard, que se cree correcto. Las teorías escalares tensoriales pueden cumplir perfectamente el papel de teorías de gravitación de prueba, siendo el acoplamiento ω su parámetro libre. El caso arquetípico y mejor conocido de estas teorías es, como ya hemos dicho, la gravitación de Brans-Dicke [19]. Sobre ésta volveremos en repetidas oportunidades en esta tesis. Otras teorías más generales fueron rápidamente propuestas y estudiadas [20, 21, 22]. En cualquier caso, para evaluar el escenario cosmológico y testear la fuerza predictiva de cualquier teoría, es deseable tener soluciones analíticas exactas de las ecuaciones de campo. Provistos de estas soluciones es posible fijar cotas más restrictivas en distintas épocas de la evolución cósmica.

Recientemente, un gran avance en la búsqueda de soluciones cosmológicas en teorías escalares tensoriales se ha dado en la forma de inteligentes cambios de variables que, simplificando los sistemas de ecuaciones, permiten la integración en forma directa. Barrow [71] presentó un método que permite encontrar soluciones exactas en el caso de vacío y radiación, para todas las curvaturas del universo de Friedmann-Robertson-Walker y para todas las funciones de acoplamiento. También para acoplamientos arbitrarios, Barrow y Mimoso [72] y Mimoso y Wands [73] derivaron soluciones cosmológicas exactas en modelos con un fluido perfecto que satisfacen la ecuación de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, con γ una constante en el intervalo $[0, 2]$. Una versión anterior de métodos similares se debe a Van der Bergh [74] y también podemos encontrar ideas parecidas en los trabajos de Lorentz-Petzold [75, 76, 77, 78].

Ahora bien, las teorías escalares tensoriales han sido formuladas desde dos puntos de vista, dependiendo de la elección de la acción. Estas dos formulaciones tienen una única función libre que, o bien multiplica el escalar de curvatura, o bien el término cinético en el lagrangiano

del escalar. Como veremos más adelante, mediante una transformación de campos escalares estas dos formulaciones son equivalentes y también lo serán, entonces, las teorías de gravitación y las comologías que de ellas se deriven. Sin embargo, esta equivalencia no siempre puede establecerse de manera analítica. Para esos casos, no hay forma de realizar cálculos en una de ellas a partir de los resultados obtenidos en la otra sin realizar, como mínimo, procesos de inversión numéricos.

En el presente capítulo estudiaremos el problema de la búsqueda analítica de soluciones cosmológicas de la forma más general posible; esto es, definiremos un lagrangiano con dos funciones libres en lugar de una y derivaremos las soluciones cosmológicas a partir de él en varios casos de interés. Los resultados de este trabajo serán previsibles: ya que el lagrangiano general es equivalente a cualquiera de los anteriores, la dinámica será la misma, lo que se observará en la igualdad formal de las ecuaciones. Sin embargo, encontraremos útil el camino seguido porque nos permitirá *leer* las soluciones a las distintas teorías de gravitación sin hacer transformaciones de campos –por otra parte no siempre posibles–, establecerá claramente la clase de lagrangianos con igual solución y podrá aplicarse exitosamente en cosmologías inflacionarias y anisotrópicas. Aclaremos que a lo largo de este análisis encontraremos una gran dificultad: la complejidad de las ecuaciones de campo en el formalismo general. La solución a esta dificultad será el propio método, que tratará de extender paso a paso el propuesto para dar cuenta de teorías generales de Brans-Dicke. La idea será entonces elegir convenientemente el cambio de variables para que el sistema de ecuaciones resulte ser el mismo que en el caso anterior. Esto evidenciará en forma inmediata la equivalencia de las teorías, pero mantendrá el lenguaje del nuevo formalismo y observará las ventajas descritas más arriba. Como en [71, 72, 73] las soluciones se darán en términos de una integral sobre ϕ que podrá ser calculada en forma exacta en muchos casos. Los resultados contenidos en este capítulo se encuentran publicados en [79], [80] y [81].

2.2 Sobre la equivalencia de teorías

En general, en la literatura se encuentran una de las siguientes densidades lagrangianas:

$$\mathcal{L}_1 = 16\pi\mathcal{L}_M + \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_2 = 16\pi\mathcal{L}_M + f(\phi)R + \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}. \quad (2.2)$$

\mathcal{L}_1 es el lagrangiano de las teorías de Brans-Dicke generalizadas, con ω no necesariamente constante [20, 21, 22] mientras que \mathcal{L}_2 es el de las teorías no mínimamente acopladas.¹ La importancia de estas teorías fue por primera vez señalada por Fakir y Unruh [82]. \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 están relacionados por una transformación de campos, que se realiza mediante la definición de un nuevo escalar

$$\psi = f(\phi), \quad (2.3)$$

¹Aclaremos la notación: las teorías de Brans-Dicke también son no mínimamente acopladas ya que el campo multiplica al escalar de curvatura. Sin embargo, en este capítulo llamaremos, por convención, teorías no mínimamente acopladas a las definidas por el lagrangiano (2.2), con $f(\phi) \neq \phi$. El signo del término cinético en cada uno de los lagrangianos depende de las convenciones utilizadas para la métrica y la contracción del tensor de Riemann. Una elección de signo incorrecta puede hacer que la solución Minkowskiana no sea clásicamente estable frente a pequeñas perturbaciones. En este capítulo, como el método desarrollado es independiente del signo del término cinético, mantendremos las elecciones dadas por (2.1) y (2.2), aunque se llamamos que con nuestras convenciones el signo *correcto* es el dado por (2.1).

y un nuevo acoplamiento

$$\omega(\psi) = -\frac{\psi}{2\left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2}. \quad (2.4)$$

Esto permite escribir a \mathcal{L}_2 en la forma de \mathcal{L}_1 para el nuevo campo ψ . Esta clase de transformaciones fue por primera vez propuesta por Nortvedt [21] y es usualmente recordada en todos los trabajos del area. En particular, y como ejemplo, Steinhardt y Aschettta [83] usaron esta transformación para estudiar el mecanismo de Inflación Hiperextendida, sobre el que brevemente hablaremos más adelante. Sin embargo, es fácil ver que existe algún tipo de dependencia de la *simplicidad* de las funciones involucradas. Como se notó en [84], si uno toma $\omega(\phi) = \omega_0 + \omega_m \phi^m$, como en [32], o $f(\phi)$ como una serie de Taylor, como en [83], ya no es posible escribir analíticamente la equivalencia entre \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Este será el caso general cuando no exista inversa analítica para la transformación propuesta en (2.3). Es muy importante notar que el hecho que no haya inversión analítica no significa que las teorías no sean equivalentes, sino sólo que esta equivalencia no tiene una expresión cerrada. La diferencia *filosófica* surge del hecho de considerar que función debería ser simple, esto es, si $\omega(\psi)$ o $f(\phi)$. Por ejemplo, con la elección de Barrow y Maeda [32], no hay una expresión cerrada para f . Es en este contexto en que nos preguntamos si es posible desarrollar algún modelo cosmológico directamente con dos funciones en el lagrangiano, para evitar los problemas de inversión. Proponemos entonces estudiar la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{\text{HSTG}} = G(\phi)^{-1}R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}. \quad (2.5)$$

Este lagrangiano es equivalente a las dos formulaciones anteriores, por ejemplo a \mathcal{L}_2 , por medio de la transformación

$$\psi = G(\phi)^{-1}, \quad (2.6)$$

y el acoplamiento,

$$\Omega(\psi) = \frac{\omega(\phi)\psi}{\phi} \left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)^2. \quad (2.7)$$

Como antes, esta equivalencia no podrá ser analíticamente realizada en todos los casos en que no se encuentre una expresión de la forma $\phi = h(\psi)$. Mas si pudieramos encontrar soluciones cosmológicas generales partiendo del lagrangiano (2.5) tendríamos la ventaja inmediata de poder especificar,

$$G(\phi)^{-1} = \phi \quad (2.8)$$

dejando libre ω , para obtener las soluciones de Brans-Dicke, o

$$\omega(\phi) = -\frac{1}{2}\phi \quad (2.9)$$

dejando libre G , para obtener las soluciones de las teorías no mínimamente acopladas. Notar que en las ecuaciones anteriores no se está realizando una transformación de campos sino sólo una elección de la forma funcional de los grados de libertad de $\mathcal{L}_{\text{HSTG}}$. Veremos en lo que sigue cómo estas soluciones pueden ser calculadas.

2.3 Formalismo de gravitación hiperextendida

Tomando derivadas variacionales de la acción construida usando la densidad lagrangiana (2.5) con respecto a las variables dinámicas $g^{\mu\nu}$ y ϕ se obtienen las ecuaciones de campo [85, 86]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G(\phi) \left[8\pi T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{\omega}{2\phi} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} g_{\mu\nu} + (G^{-1})_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square(G^{-1}) \right], \quad (2.10)$$

$$R \frac{dG^{-1}}{d\phi} + \frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + \frac{2\omega}{\phi} \square\phi = 0. \quad (2.11)$$

La segunda ecuación puede escribirse de una forma más usual, que involucra la traza del tensor de energía-impulso en lugar del escalar de curvatura. Cuando ϕ es sólo función del tiempo, es:

$$\dot{\phi}^2 \left[\frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} + G \frac{dG^{-1}}{d\phi} \frac{\omega}{\phi} \right] + \frac{2\omega}{\phi} \square\phi + 3G \frac{dG^{-1}}{d\phi} \square(G^{-1}) - G \frac{dG^{-1}}{d\phi} 8\pi T = 0. \quad (2.12)$$

Es importante señalar que la relación usual $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, que establece las leyes de conservación, en el sentido de la Relatividad General, siguen siendo válidas. Esto puede verificarse por diferenciación directa de (2.10) usando las identidades del tensor de curvatura como el conmutador de las derivadas covariantes, o por medios más intuitivos, debido al acoplamiento mínimo entre el campo y la materia [19].

2.4 Modelos de Friedmann-Robertson-Walker

Consideraremos el elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker, dado por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) \right], \quad (2.13)$$

con $k = 0, 1, -1$. Por simetría, todos los escalares serán función solamente del tiempo y no de las coordenadas espaciales. Como ecuación de estado, usaremos la de un fluido perfecto: $p = (\gamma - 1)\rho$, $0 \leq \gamma \leq 2$. Las ecuaciones de campo en este caso son,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} - \frac{\omega}{6} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} G + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 \left[\frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{\omega}{\phi} - \frac{6}{G^4} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^3 + \frac{3}{G^3} \frac{dG}{d\phi} \frac{d^2G}{d\phi^2} \right] + \square\phi \left[\frac{2\omega}{\phi} + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = \\ - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 8\pi\rho (4 - 3\gamma), \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{2}{G} \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} = -G 8\pi\rho (\gamma - 1) - \frac{\omega}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} G - 2 \left(\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \right)^2 \dot{\phi} + \\ \frac{1}{G} \frac{d^2G}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \ddot{\phi}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Es útil tener la ecuación (2.16) en formas alternativas, por ejemplo,

$$\dot{H} + H^2 + H \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} + \frac{\omega}{3} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} G = \left[G \frac{8\pi\rho}{3} \left((2-3\gamma) \frac{\omega}{\phi} - \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \Delta \right] \times \left[\frac{2\omega}{\phi} + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

donde se ha definido H como es usual y

$$\Delta = -\frac{3}{G^2} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \frac{\omega}{\phi} + \frac{1}{G} \frac{d^2G}{d\phi^2} \frac{2\omega}{\phi} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} + \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{\omega}{\phi^2}. \quad (2.18)$$

Soluciones barotrópicas fueron encontradas sólo para el caso general de Brans-Dicke, i.e. $G(\phi) = 1/\phi$. Entre las más importantes debemos citar las de Nariai [87, 88], O'Hanloon y Tupper [24], Gurevich, Finkelstein y Ruban [89], Lorentz-Petzold [75, 76, 77, 78] y como se se nalara en la introducción, las de Barrow [71], Barrow y Mimoso [72] y Mimoso y Wands [73]. En lo que sigue, generalizaremos el método descrito en [73] para las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.16).

Para los casos de Brans-Dicke se mostró que el cambio de variables,

$$X = a^2 \phi, \quad (2.19)$$

$$Y = \int \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{3}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad (2.20)$$

junto con la introducción del tiempo conforme, dado por

$$dt = a d\eta, \quad (2.21)$$

permitía reescribir las ecuaciones de campo como

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = 4MX a^{4-3\gamma}, \quad (2.22)$$

$$(Y'X)' = M(4-3\gamma) \sqrt{\frac{3}{2\omega+3}} a^{4-3\gamma}, \quad (2.23)$$

$$X'' + 4kX = 3(2-\gamma)M a^{4-3\gamma}. \quad (2.24)$$

Aquí, la densidad del fluido barotrópico ha sido escrita como $\rho = 3M8\pi a^{3\gamma}$ y variables primadas denotan diferenciación con respecto a η . En el caso general, la idea será retener la simpleza de las ecuaciones transformadas, especialmente el lado izquierdo, mediante la definición de un nuevo conjunto de variables. Proponemos entonces realizar la transformación,

$$X = \frac{a^2}{G} j(\phi), \quad (2.25)$$

$$Y = \int \alpha(\phi) \frac{d\phi}{\phi}, \quad (2.26)$$

donde j y α deben elegirse para mantener la forma del sistema (2.22,2.24) y además deben reducirse a

$$j = 1, \quad (2.27)$$

y

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{3}}, \quad (2.28)$$

para el caso de la teoría de Brans-Dicke. Calculando los términos necesarios del sistema transformado, obtenemos dos ecuaciones de vínculo, que mostramos a continuación,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\phi} - \frac{1}{\phi} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} + \frac{1}{j} \frac{dj}{d\phi} = \frac{\left[\frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{\omega}{\phi} - \frac{6}{G^4} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^3 + \frac{3}{G^3} \frac{dG}{d\phi} \frac{d^2G}{d\phi^2} \right]}{\left[\frac{2\omega}{\phi} + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right]}, \quad (2.29)$$

$$\dot{\phi}^2 \left[\left(\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\phi} \right)^2 + \left(\frac{1}{j} \frac{dj}{d\phi} \right)^2 - \frac{2}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{1}{j} \frac{dj}{d\phi} \right] + \dot{\phi} \left[4 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{1}{j} \frac{dj}{d\phi} \right] = -\frac{2}{3} \omega G \dot{\phi}^2. \quad (2.30)$$

Aunque formalmente complicadas, estas ecuaciones son muy sugestivas y puede verse que la solución es,

$$j = 1, \quad (2.31)$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\phi}{G} \right)^2 \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 + \frac{2}{3} \omega G \phi}. \quad (2.32)$$

Definiendo las variables X e Y como en (2.25,2.26) y el tiempo conforme como en (2.21), el sistema de ecuaciones de campo se transforma a

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = 4MX(XG)^{\frac{4-3\gamma}{2}}, \quad (2.33)$$

$$(Y'X)' = -M(4-3\gamma) \frac{1}{\alpha} (XG)^{\frac{4-3\gamma}{2}} \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \phi, \quad (2.34)$$

$$X'' + 4kX = 3(2-\gamma)M(XG)^{\frac{4-3\gamma}{2}}. \quad (2.35)$$

Notemos que la función $\alpha(\phi)$ se convierte en la misma que la escrita en (2.28) para $G(\phi) = 1/\phi$. En este formalismo general, es necesario pedir que la expresión debajo de la raíz de α sea positiva, esto tiene el mismo status que pedir que ω sea más grande que $-3/2$ para el caso analizado en [73].

2.5 Soluciones cosmológicas

En esta sección discutiremos brevemente como obtener soluciones cosmológicas para las diferentes épocas de un universo de Friedmann-Robertson-Walker. Obviamente, ya que las ecuaciones son las mismas que en el caso de Brans-Dicke, las soluciones también lo serán; sin embargo el significado de las variables es distinto. Véase por los detalles del método, el trabajo de Mimoso y Wands [73].

2.5.1 Soluciones de Vacío

En un modelo de vacío, el lado derecho de las ecuaciones (2.33), (2.34) y (2.35) es igual a cero. De (2.34) tenemos $Y'X = c$, constante, y las soluciones para X pueden obtenerse usando (2.33). Ellas están dadas por la ecuación (3.20) de [73]:

$$X(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} \pm c(\eta - \eta_0) & k = 0 \\ \pm \frac{c}{2} \sin [2(\eta - \eta_0)] & k = 1 \\ \pm \frac{c}{2} \sinh [2(\eta - \eta_0)] & k = -1 \end{array} \right\}. \quad (2.36)$$

Notemos que $X(\eta)$ es independiente de la forma particular de ω y de G . Como $Y'X = c$, esto implica además que

$$Y = \int \sqrt{\left(\frac{\phi}{G}\right)^2 \left(\frac{dG}{d\phi}\right)^2 + \frac{2}{3}\omega G \phi \frac{d\phi}{\phi}} = \int \frac{c}{X} d\eta = I(\eta). \quad (2.37)$$

Podemos calcular esta integral debido a nuestro conocimiento de la forma funcional de $X(\eta)$, esto otorga,

$$I(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} \ln(\eta - \eta_0)^{\pm 1} & k = 0 \\ \ln(\tan(\eta - \eta_0))^{\pm 1} & k = 1 \\ \ln(\tanh(\eta - \eta_0))^{\pm 1} & k = -1 \end{array} \right\}. \quad (2.38)$$

Dadas entonces, $G(\phi)$ y $\omega(\phi)$, podemos obtener $Y(\phi)$ e invertirla usando el lado derecho de (2.37) para obtener $\phi(\eta)$. Junto con $a^2 = XG$, esto lleva a la solución del problema.

Aun sin resolver las ecuaciones se pueden obtener algunas conclusiones generales acerca del comportamiento singular. Cuando $X \rightarrow 0$ y $(X'/X)^2 \rightarrow \infty$, puede verse que $X'/X \rightarrow \pm Y'$. Usando la definición de las variables, puede mostrarse que

$$\dot{a} \rightarrow \frac{1}{2} \left[1 \mp \frac{1}{\alpha} \frac{\phi}{G} \frac{dG}{d\phi} \right] \frac{X'}{X}, \quad (2.39)$$

y la singularidad inicial, la cual se produce cuando $\dot{a} \rightarrow \pm\infty$ puede evitarse solamente cuando $\omega \rightarrow 0$ ó $(dG/d\phi)^2 \gg 2\omega G^3/3\phi$.

2.5.2 Soluciones de radiación

Con $\gamma = 4/3$ la ecuación de estado se convierte en la de un fluido de radiación. Las primeras dos ecuaciones de campo son,

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = 4MX, \quad (2.40)$$

$$(Y'X)' = 0. \quad (2.41)$$

La segunda de ellas es igual a la del caso de vacío, y esto implica nuevamente que $Y'X = c$. Usando esta información en (2.40) es posible integrar en favor de X y obtener $I(\eta)$. La solución es como la ecuación (3.70) de [73]:

$$X(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} M(\eta - \eta_0)^2 - \frac{c}{4M} & k = 0 \\ \frac{\sqrt{c+M^2}}{2} \sin [2(\eta - \eta_0)] + \frac{M}{2} & k = 1 \\ \frac{\sqrt{c-M^2}}{2} \sinh [2(\eta - \eta_0)] - \frac{M}{2} & k = -1 \end{array} \right\}. \quad (2.42)$$

Esto implica que,

$$I(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} \ln \left[\frac{2M(\eta-\eta_0)-\sqrt{c}}{2M(\eta-\eta_0)+\sqrt{c}} \right]^{\pm 1} & k = 0 \\ \ln \left[\frac{M \tan(\eta-\eta_0) + \sqrt{c+M^2} - \sqrt{c}}{M \tan(\eta-\eta_0) + \sqrt{c+M^2} + \sqrt{c}} \right]^{\pm 1} & k = 1 \\ \ln \left[\frac{\sqrt{c-M^2} \exp(2(\eta-\eta_0)) - M - \sqrt{c}}{\sqrt{c-M^2} \exp(2(\eta-\eta_0)) - M + \sqrt{c}} \right]^{\pm 1} & k = -1 \end{array} \right\}. \quad (2.43)$$

En este caso puede verse que a tiempos tempranos, las ecuaciones se aproximan a las de vacío. Definiendo $G(\phi)$ y $\omega(\phi)$ es posible seguir los mismos pasos esbozados anteriormente para obtener a^2 y ϕ como funciones de η .

2.5.3 Soluciones de un fluido *stiff*

Finalmente consideramos el caso en que $\gamma = 2$. Esa elección representa una ecuación de estado barotrópica dada por $p = \rho$, de un fluido *duro*, *tieso* o, del inglés, *stiff*. La importancia de este sistema cosmológico fue señalada por Barrow en [90]. Las ecuaciones de campo resultan en este caso:

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = \frac{4M}{G}, \quad (2.44)$$

$$(Y'X)' = -2M \frac{1}{\alpha} \frac{1}{X} \frac{1}{G^2} \frac{dG}{d\phi} \phi, \quad (2.45)$$

$$X'' + 4kX = 0. \quad (2.46)$$

La última de estas ecuaciones es idéntica a la correspondiente al caso de vacío y $X(\eta)$ está dado por la misma expresión. Además se tiene una primera integral, dada por

$$(X')^2 + 4kX^2 = A. \quad (2.47)$$

Esta puede usarse en la primera de las ecuaciones de campo para obtener,

$$Y'X = \pm \sqrt{A - 4\frac{M}{G}}, \quad (2.48)$$

con A una constante de integración. Esto requiere que

$$\frac{A}{4M} \geq \frac{1}{G}. \quad (2.49)$$

Puede verse que sólo para $k = -1$, A podría ser negativa, implicando que habrá solución real sólo cuando G sea una función negativa. Se tiene además la siguiente propiedad, de (2.48) puede verse que, definiendo

$$Z(\phi) = \int \alpha \frac{d\phi}{\phi \sqrt{A - 4\frac{M}{G}}} = \pm \int \frac{1}{X} d\eta, \quad (2.50)$$

y

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\phi}{G_{vac}}\right)^2 \left(\frac{dG_{vac}}{d\phi}\right)^2 + \frac{2}{3}\omega_{vac}G_{vac}\phi \left[A - 4\frac{M}{G}\right] \frac{1}{c}}, \quad (2.51)$$

las soluciones de vacío para ω_{vac} y G_{vac} son las correspondientes al caso de *stiff* con ω y G , por lo que se demuestra que las soluciones de vacío contienen a las del caso de materia *stiff*.

2.6 Un ejemplo simple

Veamos como se obtienen las soluciones en un ejemplo sencillo. Haremos uso de las ecuaciones del trabajo de Mimoso y Wands ya citadas para obtener la inversión siguiendo los pasos explicitados más arriba. Supongamos que tenemos el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \phi^2 R + \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + 16\pi \mathcal{L}_M. \quad (2.52)$$

Usando la definición de α , puede mostrarse que es una constante igual a $11/3$. Las soluciones de vacío con $k = 0$ son, obtenidas invirtiendo (2.38) y utilizando el resultado en (2.37),

$$\phi(\eta) = (\eta - \eta_0)^{\pm\sqrt{\frac{3}{11}}}, \quad (2.53)$$

$$a(\eta)^2 = (\pm c) (\eta - \eta_0)^{1 \mp 2\sqrt{\frac{3}{11}}}. \quad (2.54)$$

El mismo procedimiento aplicado a la era de radiación otorga

$$\phi(\eta) = \left[\frac{2M(\eta - \eta_0) - \sqrt{c}}{2M(\eta - \eta_0) + \sqrt{c}} \right]^{\pm\sqrt{\frac{3}{11}}}, \quad (2.55)$$

$$a(\eta)^2 = \frac{M(\eta - \eta_0)^2 - \frac{c}{4M}}{\left[\frac{2M(\eta - \eta_0) - \sqrt{c}}{2M(\eta - \eta_0) + \sqrt{c}} \right]^{\pm 2\sqrt{\frac{3}{11}}}}. \quad (2.56)$$

El haber elegido un ejemplo tan sencillo, nos permite encontrar las soluciones por medio de la equivalencia entre el lagrangiano no mínimamente acoplado y uno de Brans-Dicke, para un nuevo campo ψ , que definimos como $\psi = \phi^2$, con un acoplamiento $\omega(\psi) = -1/8$. Las soluciones de vacío del caso $k = 0$ son debidas a O'Hanlon y Tupper [24]. Escritas en la coordenada temporal propia se reducen a las anteriores, esto muestra que la variable dinámica ψ de la teoría de Brans-Dicke con $\omega = -1/8$ se comporta de la misma manera que la variable dinámica ϕ de la teoría (2.52) y que el método seguido en este capítulo es equivalente al de la búsqueda de la equivalencia entre teorías a través de transformaciones de campo, en el caso en que esto último sea analíticamente posible.

2.7 Más sobre la equivalencia de teorías

En el formalismo general planteado aquí, las teorías equivalentes serán aquellas que tengan igual valor funcional de α . Estas clases de equivalencias podrían en principio, tener infinitos miembros. Esta es la traducción de lo que sucede cuando se realiza el mismo estudio por la vía usual, de transformaciones de campos escalares: allí las clases de equivalencia están dadas por las teorías con igual valor funcional de $\Omega(\psi)$, dado por (2.7). Esta división de las teorías escalares tensoriales en clases de equivalencias muestra que todos los miembros de una dada clase predicirán los mismos resultados observacionales. La teoría de gravitación no sólo no es única, sino que está agrupada en un conjunto de clasificación de una relación de equivalencia; dentro de cada uno de esos conjuntos, una sola teoría es suficiente ejemplo.

2.8 Cosmologías anisotrópicas

En lo que sigue analizaremos si el mismo procedimiento expuesto para los modelos de Friedmann-Robertson-Walker puede utilizarse para el caso de cosmologías anisotrópicas homogéneas. Este tipo de universos es estudiado con interés desde mucho tiempo atrás; una revisión del tema puede encontrarse en [91]. En particular, la gravitación escalar tensorial puede revelar un comportamiento diferente del relativista cerca de la singularidad [92] o en modelos inflacionarios [93] y también son de interés los estudios de los procesos de isotropización de los modelos tipo Bianchi [94].²

Para cosmologías anisotrópicas, el análisis anterior puede extenderse para permitir calcular soluciones analíticas para cualquier par de funciones. Antes de presentar estos resultados, introduciremos brevemente algunas nociones de espacio-tiempos anisotrópicos.

2.8.1 Espacio-tiempos anisotrópicos

Esta sección presentará algunos resultados sobre modelos relativistas que no obedecen el principio cosmológico. Para mayores detalles véase el libro de Raychaudhuri [95].

El tensor de Riemann puede definirse como:

$$v^\mu_{;\alpha;\beta} - v^\mu_{;\beta;\alpha} = R^\mu_{\nu\beta\alpha} v^\nu, \quad (2.57)$$

donde v^ν es un vector arbitrario. En lo que sigue, consideraremos que el vector v^ν es la velocidad de una distribución continua de materia y es, entonces, tipo tiempo $v_\nu v^\nu = -1$. El tensor $v_{\alpha;\beta}$ puede separarse en las siguientes cantidades:

1. El escalar de expansión, $\theta = v^\mu_{;\mu}$.
2. La aceleración, $\dot{v}_\alpha = v_{\alpha;\beta} v^\beta$.
3. El tensor de *shear*, $\sigma_{\alpha\beta} = v_{\alpha;\beta} - \frac{1}{3}(g_{\alpha;\beta} - v_\alpha v_\beta)\dot{\sigma} - \frac{1}{2}(\dot{v}_\alpha v_\beta + \dot{v}_\beta v_\alpha)$.
4. El tensor de vorticidad, $w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(v_{\alpha;\beta} - v_{\beta;\alpha}) - \frac{1}{2}(\dot{v}_\alpha v_\beta - \dot{v}_\beta v_\alpha)$.

Recientemente, Raychaudhuri et al. [96] han presentado una analogía con la deformación elástica en la física Newtoniana que permite entender el por qué de los nombres anteriormente usados.

Si se contrae (2.57), en los índices μ y β y luego se realiza una nueva contracción con v^α , se obtiene una ecuación escalar,

$$R_{\nu\alpha} v^\nu v^\alpha = v^\mu_{;\alpha;\mu} v^\alpha - v^\mu_{;\mu;\alpha} v^\alpha. \quad (2.58)$$

Usando las definiciones de la expansión, la aceleración, el *shear* y la vorticidad dadas arriba, la ecuación anterior se transforma en,

$$\theta_{,\alpha} v^\alpha + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 - \dot{v}_{;\alpha}^\alpha + 2(\sigma^2 - w^2) = -R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \quad (2.59)$$

donde se ha utilizado que,

$$\dot{v}_\mu v^\mu = \sigma_{\mu\nu} v^\nu = w_{\mu\nu} v^\nu = 0, \quad (2.60)$$

²Otra vez un asunto de nomenclatura. A menos que sea especificado de otra forma, *resultado relativista* significará que es un resultado de la Relatividad General. No se contrapondrá con clásico o con Newtoniano, sino con los resultados obtenidos en alguna teoría escalar tensorial (que ciertamente son también relativistas).

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.61)$$

$$w^2 = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}w^{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

Es posible además recordar la ecuación de Einstein, en la forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right), \quad (2.63)$$

con un tensor de energía-impulso dado por

$$T_{\nu}^{\mu} = \rho v_{\nu}v^{\mu} + ph_{\nu}^{\mu}, \quad (2.64)$$

con h_{ν}^{μ} , la parte espacial de la métrica. Utilizando (2.63) y (2.64) se obtiene

$$\theta_{,\alpha}v^{\alpha} + \frac{1}{3}\theta^2 - \dot{v}_{,\alpha}^{\alpha} + 2(\sigma^2 - w^2) + 4\pi(\rho + 3p) = 0, \quad (2.65)$$

que es conocida como ecuación de Raychaudhuri. Varias fórmulas adicionales pueden ser escritas, véase por ejemplo el trabajo de Ellis [97]. Entre ellas, el vínculo

$$8\pi\rho = \frac{-{}^3R - \sigma^2}{2} + \frac{\theta^2}{3}, \quad (2.66)$$

donde 3R es el escalar de Ricci del 3-espacio localmente ortogonal al v^{μ} .

2.8.2 Soluciones en el *Einstein frame*

Ya que el estudio anterior se ha presentado para el caso de la Relatividad General, y es sólo allí donde es simple, es conveniente analizar los modelos anisotrópicos de las teorías escalares tensoriales en el *Einstein frame*. Ya hemos discutido que el *Einstein frame* fue introducido por Dicke [31] para su propia teoría, mediante la definición de una transformación conforme

$$\tilde{g}_{ab} = \lambda g_{ab} = G_0\phi g_{ab}, \quad (2.67)$$

donde G_0 es una constante arbitraria que deviene en la constante de gravitación del sistema transformado. De una forma similar, en el caso general hacemos

$$\tilde{g}_{ab} = \lambda g_{ab} = G_0G(\phi)^{-1}g_{ab}, \quad (2.68)$$

por lo que

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \lambda^2\sqrt{-g}. \quad (2.69)$$

La relación entre los escalares de curvatura del sistema de referencia común o de Jordan y el sistema transformado es [98],

$$R = \lambda \left(\tilde{R} + 3\Box \log(\lambda) - \frac{3}{2}\lambda^{-2}\lambda_{,\mu}\lambda_{,\nu} \right). \quad (2.70)$$

Notar que cuando se reemplaza en la integral de la acción, el término en $\log(\lambda)$ es una divergencia total (no covariante) y se desprecia por el teorema de Gauss. Finalmente se obtiene la acción,

$$S_{EF} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{G_0}\tilde{R} - \tilde{g}^{ab}\frac{\phi_{,a}\phi_{,b}}{\phi^2} - \frac{3}{2G_0}\alpha + 16\pi\tilde{\mathcal{L}}_m \right] \quad (2.71)$$

donde se ha definido $\tilde{\mathcal{L}}_m = \mathcal{L}_m / (G_0 G(\phi)^{-1})^2$. Es ahora posible definir un nuevo campo escalar ψ por

$$d\psi = \sqrt{\frac{3}{16\pi G_0}} \alpha \frac{d\phi}{\phi}, \quad (2.72)$$

de forma que la acción escrita en este campo es,

$$S_{EF} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{G_0} \tilde{R} + 16\pi \left(\tilde{\mathcal{L}}_m - \frac{1}{2} \psi_{,a} \psi^{,a} \right) \right]. \quad (2.73)$$

Entonces, el resultado final de la transformación al *Einstein frame* de la teoría es que se ha recobrado la forma de la acción de la Relatividad General, con un nuevo tensor de energía-impulso que es la suma de dos contribuciones, la del contenido de materia y la del campo escalar. Es importante notar que la definición de la variable ψ es proporcional a la variable Y que fuera introducida anteriormente para resolver el problema de Friedmann-Robertson-Walker. Recobrar la acción de Einstein tiene, como vimos, un costo no menor: el tensor de energía-impulso no es más independientemente conservado y en el *Einstein frame* se comporta siguiendo,

$$\tilde{T}_{ab}{}^{;a} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16\pi G_0}{3}} \frac{1}{\alpha} \tilde{T} \psi_{;b} \left(\frac{\phi}{G^{-1}} \frac{dG^{-1}}{d\phi} \right). \quad (2.74)$$

De manera que en cualquier caso en que $\tilde{T} \neq 0$, solamente el tensor total se conservará, es decir,

$$\left(\tilde{T}_{ab} + \tilde{T}_{ab}^\psi \right)^{;a} = 0, \quad (2.75)$$

donde \tilde{T}_{ab}^ψ representa el tensor de energía-impulso relacionado con el campo escalar ψ , que está dado por,

$$\left(\tilde{T}_{ab}^\psi \right)^{;a} = \left(\psi_{,a} \psi_{,b} - \frac{1}{2} \psi_{,c} \psi^{,c} \tilde{g}_{ab} \right). \quad (2.76)$$

La ecuación (2.76) y la suposición cosmológica para el campo, que hace que sólo dependa del tiempo, muestra que éste se comporta como un fluido tipo *stiff* con densidad y presión dada por

$$\tilde{\rho}^\psi = \tilde{p}^\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2. \quad (2.77)$$

Debido a la exacta reproducción de las ecuaciones de campo de Einstein, los resultados relativistas serán válidos en este *frame*. Tomaremos en cuenta un contenido de materia dado por un fluido barotrópico, particularmente en los casos de fluidos *stiff* o radiación o ambos. El caso de un fluido con presión cero y radiación será analizado más adelante en esta tesis mientras que algunos casos de fluidos imperfectos fueron estudiados por Pimentel [99]. Siguiendo a Raychaudhuri [95], y considerando sólo aquellos modelos en que la velocidad de la materia es paralela a la normal unitaria a las hipersuperficies espaciales, es decir, un vector tipo tiempo t^a , ya vimos que es posible escribir las ecuaciones de Einstein (las ecuaciones de la teoría hiperextendida en el *Einstein frame*) en la forma de un vínculo,

$$\tilde{\theta}^2 = 24\pi G_0 (\tilde{\rho} + \tilde{\rho}^\psi) + 3\tilde{\sigma}^2 - \frac{3}{2} {}^3\tilde{R}, \quad (2.78)$$

y de la ecuación de Raychaudhuri,

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} + \frac{1}{3}\tilde{\theta}^2 = -4\pi G_0(\tilde{\rho} + \tilde{\rho}^\psi + 3(\tilde{p} + \tilde{p}^\psi)). \quad (2.79)$$

Se han introducido aquí la expansión $\tilde{\theta}$, el *shear* $\tilde{\sigma}$ y el escalar de curvatura de la hipersuperficie de homogeneidad ${}^3\tilde{R}$; todos ellos en el *Einstein frame*. Las cantidades transformadas serán,

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(G_0 G(\phi)^{-1})^2}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{(G_0 G(\phi)^{-1})^2}, \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{(G_0 G(\phi)^{-1})}, \quad d\tilde{t}^2 = (G_0 G(\phi)^{-1}) dt^2. \quad (2.80)$$

Introducimos también un factor de volumen

$$\tilde{V} = (G_0 G(\phi)^{-1})^{3/2} V, \quad (2.81)$$

con V tal que $\theta = dV/Vdt$. Teniendo ambas leyes de conservación, para la materia en el *Jordan frame* y para la materia más el campo en el *Einstein frame*, es posible derivar las correspondientes densidades de energía y presiones. Ellas son,

$$\tilde{\rho} = \frac{3}{8\pi G_0} \left(\frac{\Gamma}{\tilde{V}^{4/3}} + \frac{MG_0 G(\phi)^{-1}}{\tilde{V}^2} \right), \quad (2.82)$$

$$\tilde{p} = \frac{3}{8\pi G_0} \left(\frac{\Gamma}{3\tilde{V}^{4/3}} + \frac{MG_0 G(\phi)^{-1}}{\tilde{V}^2} \right), \quad (2.83)$$

$$\tilde{\rho}^\psi = \tilde{p}^\psi = \frac{3}{8\pi G_0} \left(\frac{A^2 - 4MG_0 G(\phi)^{-1}}{4\tilde{V}^2} \right). \quad (2.84)$$

Γ está relacionada con la presencia de un fluido de radiación y M con la presencia de un fluido stiff. Ambas, Γ y M , son constantes positivas. Cuando $M \neq 0$ es posible definir un nuevo campo χ , mínimamente acoplado a la métrica, tal que su densidad de energía sea la suma del escalar ψ y el contenido de materia. Este campo χ puede ser relacionado con ϕ por [100]

$$\sqrt{\frac{16\pi G_0}{3}} \chi(\phi) = A \int \frac{d\tilde{t}}{\tilde{V}} = \pm \int \sqrt{\frac{A^2}{A^2 - 4MG_0 G(\phi)^{-1}}} \sqrt{\alpha} \frac{d\phi}{\phi}. \quad (2.85)$$

Y vemos que definiendo un nuevo conjunto de funciones, (G, ω) por,

$$\alpha_{vac} = \frac{A^2}{A^2 - 4MG_0 G(\phi)^{-1}} \alpha, \quad (2.86)$$

el efecto de un fluido *stiff* es equivalente al de un nuevo lagrangiano sin contenido de materia. Este cambio es posible porque el efecto del *fluido stiff* es modificar la relación entre χ y ϕ , algo que en vacío sólo es realizado por elecciones de ω y G . Aquí, como en el caso isotrópico, las ecuaciones son más simples usando las variables $X = (G_0 G(\phi)^{-1}) a^2 = \tilde{a}^2$, ψ y el tiempo conforme. Como ejemplo tratemos el caso del universo tipo Bianchi I.

2.8.3 Modelo Bianchi I

La métrica del modelo Bianchi I es,

$$ds^2 = dt^2 - a_1(t)^2 dx^2 - a_2(t)^2 dy^2 - a_3(t)^2 dz^2. \quad (2.87)$$

Aquí, la expansión está dada en término de un factor de escala promedio dado por $a^3 = a_1 a_2 a_3 = V$, $\theta = 3da/ad t$. La curvatura espacial es nula y la métrica se reduce a la de Friedmann-Robertson-Walker en el caso en $a_1 = a_2 = a_3$. El resultado relativista es válido en el *Einstein frame*,

$$\tilde{\sigma}^2 = 3\Sigma^2/4\tilde{a}^6, \quad (2.88)$$

con Σ , constante y $\tilde{a}^3 = \tilde{V}$. Usando las expresiones para las densidades de energía, es posible obtener la ecuación de vínculo en la variable X . Para materia en la forma de un fluido *stiff* y radiación, no interactuantes, es:

$$X'^2 = A^2 + \Sigma^2 + 4\Gamma X. \quad (2.89)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la obtenida en [100] y por lo tanto admite la misma solución,

$$X = \tilde{a}^2 = |\eta - \eta_0| \left(\sqrt{A^2 + \Sigma^2} + \Gamma|\eta - \eta_0| \right). \quad (2.90)$$

La ecuación (2.89) es, de hecho, un resultado relativista, válido aquí debido a que estamos trabajando en el *Einstein frame* [104]. La solución (2.90) muestra una evolución dominada por el *shear* a tiempos comológicos tempranos y una evolución dominada por la radiación cuando el factor de escala tiende a infinito. Estos resultados no dependen de la forma particular de G ni de ω . La especificación de X , el *shear* y cada uno de los factores de escala de la métrica pueden obtenerse del resultado relativista y ellos describen la evolución global del sistema.

Para volver al *Jordan frame*, debemos obtener $\phi(\eta)$. Para ello, debemos invertir (2.85) y obtener $\phi(\chi)$ y luego, usar nuestro conocimiento $X(\eta)$ para llegar a $\chi(\eta)$. Ambas operaciones otorgan finalmente, $\phi(\eta)$. De la ecuación (2.85) vemos que a igual forma funcional para α_{vac} , se obtiene igual solución para el campo ϕ . La forma funcional de los factores de escala no depende de ω o de G en el *Einstein frame*, mientras que sí lo hace en el *frame* de Jordan. Sin embargo, como en el caso isotrópico, aún sin especificar las funciones involucradas en el lagrangiano pueden obtenerse algunas conclusiones. En presencia de un fluido *stiff*, la singularidad puede evitarse cuando,

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{X'}{X} - G(G^{-1})' \right) = 0, \quad (2.91)$$

lo cual requiere que,

$$(A^2 + \Sigma^2)\alpha = (A^2 - 4MG_0G^{-1}) \left(\frac{\phi}{G} \frac{dG}{d\phi} \right)^2. \quad (2.92)$$

Puede verse también que si G^{-1} se anula más rápido que X^3 , una singularidad inicial anisotrópica en el *Einstein frame* se convierte en isotrópica en el *Jordan frame*.

Lo anteriormente hecho indica que el método algorítmico desarrollado por Mimoso y Wands es capaz de tratar los casos de $\mathcal{L}_{\text{HSTG}}$, pudiendo así encontrar soluciones para teorías no mínimamente acopladas como un caso particular y evitando transformaciones de campos, no siempre analíticamente posibles. Esto fue explícitamente realizado para el modelo Bianchi I. Pero lo mismo puede hacerse para los otros casos tratados en [100], como el Bianchi III o V.

En lo que sigue estudiaremos otras aplicaciones de la idea general de este capítulo, i.e. trabajar con el lagrangiano completo aún a costa de obtener resultados previsibles y complicar el álgebra. Hasta aquí, los resultados novedosos obtenidos han sido solo formales, es decir, se ha podido generalizar los métodos ya conocidos de forma que sea posible utilizarlos cualquiera

sea la función $f(\phi)$ o $\omega(\psi)$. Veremos en las secciones siguientes cómo al centrarnos en el caso de ciertas teorías, esta aproximación revela también resultados más prácticos. Para ello estudiaremos soluciones inflacionarias de *slow roll*. Antes, introduciremos brevemente algunas ideas básicas de la teoría de inflación. La sección siguiente estará basada en la excelente Ref. [101]. Un completo compendio de las cosmologías inflacionarias puede encontrarse en el libro de Linde [102].

2.9 Nociones de cosmologías inflacionarias

Para comenzar, notemos que el universo tiene dos escalas características:

- La escala de Hubble H^{-1} .
- La escala de curvatura $a|k|^{-1/2}$.

La primera de éstas da la evolución de $a(t)$ mientras que la segunda da la distancia a la cual el espacio puede tomarse como plano. La razón de estas escalas da una medida de la densidad del universo Ω . Por medio de la ecuación de Friedmann,³

$$\sqrt{|\Omega - 1|} = \frac{H^{-1}}{a|k|^{-1/2}}. \quad (2.93)$$

Para entender los efectos de la idea de inflación es fundamental recordar que el universo posee horizontes: desde el principio del universo en t_* , la luz sólo ha podido viajar una distancia igual a

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_*}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.94)$$

que varía según nos encontremos en cada una de las eras cósmicas.

Históricamente, la inflación se propuso para resolver, entre otros, los siguientes problemas del modelo standard:

1. El problema del espacio plano.

La ecuación de Friedmann puede escribirse como,

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (2.95)$$

Durante la evolución standard en la teoría del Big Bang, $a^2 H^2$ decrece, y Ω se aleja de 1 como $|\Omega - 1| \propto t^{2/3}$ en la era de materia y como $|\Omega - 1| \propto t$ en la era de radiación, siendo estas soluciones válidas cuando Ω está cerca de 1. $\Omega = 1$ es entonces un valor inestable. Ya que hoy Ω es de orden 1, dentro de un orden de magnitud, en el pasado cosmológico debería estar aún más cerca de este valor. Por ejemplo, en el periodo de nucleosíntesis ($t \sim 1$ s), $|\Omega - 1| < \mathcal{O}(10^{-16})$ y debe ser aún menor para épocas anteriores. Esto rememora el principio antrópico [8], casi ninguna elección posible de Ω conduciría a un universo como el nuestro.

³La ecuación de Friedmann es $k/a^2 = 8\pi G\rho/3 - (\dot{a}/a)^2 = H^2(\Omega - 1)$, donde $\Omega = \rho/(8\pi G/3H_0^2)$.

2. El problema del horizonte.

Este es el problema de la homogeneidad en la radiación de fondo cósmica. Fotones emitidos desde lados opuestos del cielo están en equilibrio térmico, i.e. a la misma temperatura. Pero al momento de haber sido emitidos, estas regiones no podían estar en contacto térmico porque estaban causalmente desconectadas. Toda región actualmente separada más de dos grados estaría desconectada al momento del *decoupling* de la radiación y la materia. Esto es debido a los tamaños finitos del horizonte,

$$\int_{t_*}^{t_{\text{dec}}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{\text{dec}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.96)$$

3. El problema de la densidad primordial de reliquias.

Las teorías de partículas predicen una densidad no observada de reliquias (monopolos, paredes de dominio, etc.) que se esperan hayan sido creadas en el universo primitivo, durante la era de radiación. En general, esta densidad de materia se diluye más lentamente que la radiación (a^{-3} en lugar de a^{-4}) y deberían ser ahora la contribución dominante de la densidad de energía.

Es aquí cuando surge la idea de inflación. Consideremos la ecuación de Friedmann en la forma,

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (2.97)$$

Los tres problemas señalados se reducen a que, como hemos dicho, aH es siempre una función decreciente y hace que Ω se aleje de 1. Para resolverlos se define el periodo de inflación como cualquier época en que $\ddot{a} > 0$, es decir en donde se produce una expansión acelerada. Esto significa que

$$\text{Inflación} \iff \ddot{a} > 0 \iff \frac{d(H^{-1}/a)}{dt} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0. \quad (2.98)$$

Durante inflación, la escala de Hubble, medida por un observador comovil con la expansión, disminuye. En cualquier otro momento, esta escala aumenta. Este periodo inflacionario no puede durar por siempre, de otra manera las predicciones del modelo standard se verían modificadas y sería imposible acordar con las observaciones.

El problema del espacio plano se resuelve casi por definición, ya que el periodo de inflación es básicamente la condición que Ω se mueva hacia 1 en lugar de alejarse de este valor. Solo se necesita que haya suficiente inflación como para que el valor final de Ω esté lo suficientemente cerca de 1 como se observa actualmente, aun cuando sea repelido de allí por la evolución standard.

La rápida expansión durante la etapa inflacionaria diluye la densidad de reliquias, ya que la densidad de energía cae más lentamente que a^{-2} . Esta solución es efectiva sólo si luego del periodo de inflación la densidad de energía del universo puede ser convertida en materia usual sin generar nuevamente las reliquias, proceso conocido como *reheating* y sobre el que comentaremos muy brevemente más abajo.

Para resolver el problema del horizonte, la estrategia es asegurar que

$$\int_{t_*}^{t_{\text{dec}}} \frac{dt}{a(t)} \gg \int_{t_{\text{dec}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.99)$$

de forma que la luz pueda viajar mucho más antes del decoupling que después de este. La escala de Hubble es una medida de que tan lejos es posible viajar en el universo, y lo que nos dice es que la región del universo que podemos ver luego de la inflación (aún mucho tiempo

después) es mucho menor que la que sería visible antes de la inflación. Esto hace que procesos causales puedan generar la homogeneidad requerida en el universo actual.

Para modelar la expansión inflacionaria se hace comunmente uso de campos escalares, llamados inflatones, a los que se les asocia un determinado potencial genérico. Debemos recordar, sin embargo, que no hay una prueba fehaciente de la existencia de escalares en la naturaleza. El ejemplo teórico más importante de un posible campo escalar es el campo de Higgs, que rompe la simetría electro-débil, y que se espera que se detecte en el Large Hadron Collider (CERN) durante el próximo milenio. Es interesante notar que en sistemas de materia condensada los escalares juegan el papel de parámetros de orden y también son asociados con transiciones de fase. Tomando un campo escalar genérico, la energía y presión pueden asociarse con,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.100)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.101)$$

Las ecuaciones de campo (en Relatividad General) para esta fuente son,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right], \quad (2.102)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi), \quad (2.103)$$

donde ' indica $d/d\phi$.

Ya que

$$\ddot{a} > 0 \iff p < -\frac{\rho}{3} \iff \dot{\phi}^2 < V(\phi), \quad (2.104)$$

habrá inflación cuando domine la energía potencial. En el mínimo del potencial, la inflación termina.⁴

En la sección siguiente nos referiremos a la aproximación de *slow roll*. Esta supone que algunos de los términos de las ecuaciones anteriores pueden ser despreciados, tal que

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'. \quad (2.105)$$

Esto implica que

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1; \quad |\eta(\phi)| = \left| \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} \right| \ll 1, \quad (2.106)$$

$\epsilon(\phi)$ mide la forma del potencial y $\eta(\phi)$ la curvatura.

El monto de inflación se especifica por el logaritmo de la cantidad de expansión, conocido como número de *e-foldings* N ,

$$N \equiv \ln \frac{a(t_{\text{fin}})}{a(t_{\text{inicio}})} = \int_{t_i}^{t_e} H dt \simeq -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (2.107)$$

El monto mínimo de inflación necesario para resolver los problemas anteriores es alrededor de 60-70 *e-foldings*, i.e. una expansión por un factor de 10^{30} .

La condición para la existencia de inflación puede ponerse como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \iff -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \iff \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 < 1 \quad (2.108)$$

⁴La segunda desigualdad se debe a la utilización de la ecuación de campo $\ddot{a}/a = -4\pi G/3(\rho + 3p)$.

donde la última implicación hace uso de la aproximación de slow roll y no es más que pedir que $\epsilon < 1$. Esto implica que Slow roll \implies Inflación. La inversa no siempre es verdadera y pueden existir soluciones analíticas inflacionarias que no cumplan la condición de slow roll.

El fin de la inflación se produce por el efecto conocido como *reheating* en el cual la densidad de energía del inflatón se convierte en materia convencional, recuperando el modelo standard del Big Bang. Se piensa que este proceso tiene lugar luego de que la aproximación de slow roll no es más válida y el campo escalar oscila en el mínimo de su potencial. No entraremos aquí, por no estar directamente relacionado con el estudio que continua, en los detalles del proceso de reheating, refiriendo a las citas [102, 103]. En lo que sigue analizaremos la forma de obtener soluciones de slow roll para teorías escalares tensoriales genéricas.

2.10 Slow roll y ecuaciones generales

Ahora, partiendo del lagrangiano completo con dos funciones libres, analizaremos soluciones de slow roll y estudiaremos algunos ejemplos para el caso no mínimamente acoplado. Soluciones exactas y aproximadas de inflación en teorías escalares tensoriales fueron encontradas, por ejemplo, en las Refs. [83, 105, 106, 107, 108]. La aproximación de slow roll para el caso de Brans-Dicke fue analizada por García Bellido et al. [109] y posteriormente por Barrow para acoplamientos más generales [110].

Estamos interesados en un universo isotrópico y homogéneo definido por una métrica de Friedmann-Robertson-Walker de curvatura cero. El tensor de energía-impulso será aquel dado por otro campo escalar σ con potencial de autointeracción $V(\sigma)$. Las ecuaciones cosmológicas con estas suposiciones son,

$$H^2 - H \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} - \frac{\omega}{6} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} G = \frac{8\pi}{3} G \left[\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\sigma) \right], \quad (2.109)$$

$$\dot{\phi}^2 \Gamma + \square \phi \left[\frac{2\omega}{\phi} + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 8\pi [4V(\sigma) - \dot{\sigma}^2], \quad (2.110)$$

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + V'(\sigma) = 0, \quad (2.111)$$

donde hemos definido

$$\Gamma = \left[\frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{\omega}{\phi} - \frac{6}{G^4} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^3 + \frac{3}{G^3} \frac{dG}{d\phi} \frac{d^2G}{d\phi^2} \right], \quad (2.112)$$

y H como es usual. Nuevamente, estas ecuaciones se reducen a aquellas de Relatividad General cuando ϕ es constante y a las de Brans-Dicke cuando $G = 1/\phi$.

La aproximación de slow roll consiste en suponer que,

$$\ddot{\sigma} \ll H\dot{\sigma}, \quad (2.113)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 \ll V(\sigma), \quad (2.114)$$

$$\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi} \ll H^2\phi. \quad (2.115)$$

Esta última condición requiere un campo escalar que evolucione lentamente con respecto a la expansión del universo. Esta condición puede utilizarse para determinar un vínculo similar,

pero a nuestros fines más práctico. Es posible ver que para cualquier función f definida positiva y desarrollable en serie de Taylor, (2.115) puede ser transformada en

$$\ddot{f}(\phi) \ll H\dot{f}(\phi) \ll H^2 f(\phi), \quad (2.116)$$

en todo caso en que $\sim \exists n/n \in \mathbf{N} \wedge n\dot{\phi} \simeq H\phi$. En particular, la elección $f = G^{-1}$ hace posible simplificaciones útiles en las ecuaciones de campo. Teniendo en cuenta lo anterior, las ecuaciones de solw roll son,

$$3H\dot{\sigma} \simeq -V'(\sigma), \quad (2.117)$$

$$3H^2 \simeq \frac{\omega}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} G + \frac{8\pi}{3} GV(\sigma), \quad (2.118)$$

$$\dot{\phi}^2 \Gamma + 3H\dot{\phi} \left[\frac{2\omega}{\phi} + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] \simeq -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 32\pi V(\sigma). \quad (2.119)$$

Notemos que los términos dominantes de las ecuaciones anteriores también se reducen a los de Brans-Dicke cuando $G = 1/\phi$, véase la Ref. [110]. Para avanzar más es necesario definir $\omega(\phi)$ y $G(\phi)$ junto con la forma del potencial $V(\sigma)$ del inflatón.

En la Ref. [110], el problema quedaba completamente determinado definiendo la forma funcional del acoplamiento, en aquel caso, una ley de potencias. En este caso, proponemos utilizar la libertad dada por la existencia de dos funciones libres en lugar de una para estudiar soluciones de slow roll en los casos de teorías no mínimamente acopladas.⁵

2.11 Soluciones de slow roll para \mathcal{L}_2

Las teorías no mínimamente acopladas son obtenidas en el anterior formalismo definiendo $\omega = -\phi/2$. Para recuperar la gravitación de Einstein cuando $t \rightarrow \infty$, y ser consistentes con los test de gravitación débiles, impondremos que $(G^{-1})^4/(G^{-1})^3 \rightarrow 0$ [111, 112]. Esta condición se satisface cuando G^{-1} tiende a una constante sin variaciones asintóticas en la primer derivada. El factor Γ en las ecuaciones anteriores se simplifica, debido a estas últimas exigencias y se transforma en Γ_a , dado por

$$\Gamma_a = \left[\frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} \frac{\omega}{\phi} \right]. \quad (2.120)$$

Finalmente, las ecuaciones de slow roll en este caso pueden escribirse como,

$$3H\dot{\sigma} = -V'(\sigma), \quad (2.121)$$

$$3H^2 = -\frac{1}{4} \dot{\phi}^2 G + 8\pi GV(\sigma), \quad (2.122)$$

$$\dot{\phi}^2 \frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} + 3H\dot{\phi} \left[-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 32\pi V(\sigma). \quad (2.123)$$

Una aplicación adicional de la condición de slow roll sobre (2.123) nos permite obtener

⁵De ahora en adelante y para simplificar la notación, utilizaremos igualdades aún sabiendo que estamos trabajando en la aproximación de slow roll.

$$3H\dot{\phi} \left[-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 32\pi V(\sigma). \quad (2.124)$$

Usando (2.122) en (2.124) y suponiendo que $\phi^2 G$ no diverge, obtenemos un producto adicional,

$$3H\dot{\phi} \left[-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 12H^2 G^{-1}. \quad (2.125)$$

Notemos que el segundo término de la izquierda se comporta como $-9/G \frac{dG}{d\phi} H(G^{-1})$ y entonces otra simplificación es posible,

$$3H\dot{\phi} = \frac{1}{G^2} \frac{dG}{d\phi} 12H^2. \quad (2.126)$$

Esta última ecuación puede ser formalmente integrada,

$$\int \frac{d\phi}{\left(\frac{dG^{-1}}{d\phi} \right)} = -4 \ln \left(\frac{a}{a_0} \right), \quad (2.127)$$

con a_0 una constante de integración. La ecuación (2.127) expresa $\phi = \phi(a)$ para toda elección que permita invertir el resultado de la integral y $a = a(\phi)$ siempre.

Para encontrar $\phi = \phi(t)$ es necesario especificar la forma del potencial. Consideremos algunos casos típicos.

2.11.1 $V(\sigma) = V_0 = \text{constante}$

Del parágrafo previo tenemos,

$$3H^2 G^{-1} = 8\pi V_0. \quad (2.128)$$

Reemplazando el valor de H en (2.126) obtenemos,

$$\int d\phi \frac{-1}{G^{1/2} \frac{dG^{-1}}{d\phi}} = 4 \left(\frac{8\pi V_0}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0), \quad (2.129)$$

con t_0 una constante de integración. Definiendo la teoría gravitacional dando la forma de G , (2.129) conduce a $t = t(\phi)$ y, en los casos en que la inversión sea posible, a $\phi = \phi(t)$. En tales casos será también posible reemplazar en (2.127) para lograr finalmente $a = a(t)$.

Vemos que el procedimiento seguido continúa aquel presentado por Barrow [110] en el caso de un dado acoplamiento de la teoría de Brans-Dicke, y como tal, permite conocer soluciones integrando e invirtiendo dos ecuaciones diferenciales.

2.11.2 $V(\sigma) = V_0 \exp(-\lambda\sigma)$; $V_0, \lambda = \text{constantes}$

Con esta forma exponencial para el potencial del inflatón, las ecuaciones son

$$3H\dot{\sigma} = \lambda V_0 \exp(\lambda\sigma), \quad (2.130)$$

$$3H^2 G^{-1} = 8\pi V_0 \exp(-\lambda\sigma), \quad (2.131)$$

$$3H\dot{\phi} \left[-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 32\pi V_0 \exp(\lambda\sigma). \quad (2.132)$$

Definiendo una nueva coordenada temporal

$$t = \int 3H d\eta, \quad (2.133)$$

las ecuaciones son nuevamente integrables,

$$\sigma(\eta) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\lambda^2 V_0 (\eta + \eta_0) \right], \quad (2.134)$$

$$\int d\phi \frac{-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2}{G \frac{dG^{-1}}{d\phi}} = 32\pi \lambda^{-2} \ln [\eta + \eta_0]. \quad (2.135)$$

Conociendo G e invirtiendo (2.135) para obtener ϕ como función de η , es posible usar la ecuación de slow roll (2.131) para finalmente lograr H .

2.11.3 $V(\sigma) = V_0 \sigma^{2r}$; $V_0, r = \text{constante}$ y $r \neq 1$

Con la misma variable temporal, ahora tenemos

$$\sigma' = -2r V_0 \sigma^{2r-1}, \quad (2.136)$$

$$3H^2 G^{-1} = 8\pi V_0 \sigma^{2r}, \quad (2.137)$$

$$\phi' \left[-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{1}{G} \frac{dG}{d\phi} 32\pi V_0 \sigma^{2r}. \quad (2.138)$$

Y las soluciones son,

$$\sigma(\eta) = [4r(1-r)V_0(\eta_0 - \eta)]^{\frac{1}{2(1-r)}}, \quad (2.139)$$

$$\int d\phi \frac{-1 + \frac{3}{G^3} \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2}{G \frac{dG^{-1}}{d\phi}} = 32\pi V_0 [4r(1-r)V_0]^{\frac{r}{1-r}} (\eta_0 - \eta)^{\frac{1}{(1-r)}}, \quad (2.140)$$

con η_0 constante.

2.12 Algunos ejemplos

Nuevamente, mostraremos como trabaja el formalismo para algunos ejemplos integrables e invertibles, que también admitirán comparación con trabajos previos.

2.12.1 $G^{-1} = \phi^n$, $n \neq 2, 4$ y $V = V_0 = \text{constante}$

La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \phi^n R + \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + 16\pi \mathcal{L}_m. \quad (2.141)$$

La ecuación (2.127) puede integrarse y otorga

$$\phi(a)^{-n+2} = -4n(2-n) \ln(a/a_0). \quad (2.142)$$

También (2.129) puede integrarse,

$$\phi(t)^{-n/2+2} = -4n \left(-\frac{n}{2} + 2 \right) \left(\frac{8\pi V_0}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t, \quad (2.143)$$

de forma que

$$\phi(t) \propto t^{-\frac{2}{-n+4}}. \quad (2.144)$$

Esta última relación, utilizada en (2.142) conduce a

$$\left(\frac{a(t)}{a_0} \right) \propto \exp \left[t^2 \left(\frac{-n+2}{-n+4} \right) \right]. \quad (2.145)$$

Cuando n crece, el comportamiento del factor de escala tiende a $(a(t)/a_0) \propto \exp[t^2]$. Debemos considerar ahora si estas soluciones son consistentes con la aproximación de slow roll. Vemos que $\dot{\phi}/H\phi \ll 1$ para todo n mayor 4 y menor que 2 y que la aproximación falla en el intervalo (2, 4). Las soluciones de slow roll encontradas tienen la forma de aquellas de inflación intermedia, en el cual el factor de escala se expande más lentamente que en el caso De Sitter pero más rápidamente que en el caso de una ley de potencias [106]. La consistencia del pasaje Γ a Γ_a puede también verificarse. Encontramos que $dG^{-1}/d\phi \propto t^{-2\frac{2-n}{4-n}}$, por lo que es una cantidad decreciente con t .

2.12.2 $G^{-1} = \phi^2$, $V = V_0 = \text{constante}$

La densidad lagrangiana es ahora,

$$\mathcal{L} = \phi^2 R + \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + 16\pi \mathcal{L}_m, \quad (2.146)$$

y fue principalmente estudiada por el grupo de Nápoles [111, 112]. Utilizando la ecuación (2.127) obtenemos

$$\phi(a) \propto \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-8}, \quad (2.147)$$

y con la ecuación (2.129),

$$\phi(t) = ct, \quad (2.148)$$

donde c es una constante. Puede verificarse que con estas soluciones el universo no está en expansión y la aproximación de slow roll no es satisfecha y por lo tanto deben descartarse.

2.12.3 $G^{-1} = \phi^4$, $V = V_0 = \text{constante}$

La ecuación (2.127) conduce en este caso a

$$\frac{a}{a_0} \propto \exp[\phi^{-2}], \quad (2.149)$$

mientras que (2.129) otorga,

$$\phi \propto \exp[-t]. \quad (2.150)$$

Entonces, el comportamiento del factor de escala con el tiempo está dado por

$$a \propto \exp[\exp[2t]]. \quad (2.151)$$

Aquí aparece una forma extrema de inflación. Puede probarse que $|\dot{\phi}/H\phi| \ll 1$ y $d^2G^{-1}/d\phi^2 \rightarrow 0$ cuando t es suficientemente grande. La evolución de $\sigma(\eta)$ puede encontrarse a partir de la ecuación (2.111) en cada uno de los casos previamente estudiados, ya que $\dot{\sigma} \propto a^{-3}$.

2.13 Soluciones de inflación intermedia

Ahora quisiéramos estudiar, en forma completamente general, que clase de acoplamientos pueden otorgar soluciones inflacionarias intermedias. Por simplicidad, analizaremos sólo el caso del potencial constante. En nuestro estudio tenemos dos ecuaciones importantes, (2.127), que es independiente del potencial, y (2.129). De la integración de (2.127), puede verse en forma inmediata que, para tener un factor de escala que evolucione como

$$a(t) \propto \exp[t^m], \quad (2.152)$$

es necesario tener

$$t^m = \int d\phi \frac{-1}{\frac{dG^{-1}}{d\phi}}. \quad (2.153)$$

Esto implica,

$$\left[\int d\phi \frac{-1}{G^{1/2} \left(\frac{dG^{-1}}{d\phi} \right)} \right]^m = \int d\phi \frac{-1}{\left(\frac{dG^{-1}}{d\phi} \right)}. \quad (2.154)$$

Derivando con respecto a ϕ y utilizando la ecuación anterior en el proceso obtenemos,

$$m \int d\phi \frac{G^2}{\left(\frac{dG}{d\phi} \right)} = G^{1/2} \int d\phi \frac{G^2}{\left(\frac{dG}{d\phi} \right) G^{1/2}}. \quad (2.155)$$

Esta ecuación representa un vínculo integral sobre la forma funcional de $G(\phi)$. Aunque altamente no lineal, la ecuación (2.155) permite verificar un par de soluciones. Puede probarse que $G(\phi) = \phi^\alpha$ con $m = 2(2 + \alpha)/(4 + \alpha)$ es una de sus soluciones, como era de esperar, ya que se encontró inflación intermedia para este caso en secciones previas. También la elección $G(\phi) = \alpha \exp[\alpha\phi]$, con α constante, es solución de (2.155) con $m = 2$. Para tal elección, utilizando el método previamente comentado obtenemos,

$$a \propto \exp[t^2], \quad (2.156)$$

y

$$\phi \propto \frac{2}{\alpha} \ln [t]. \quad (2.157)$$

Es interesante notar que el comportamiento del factor de escala en (2.156) coincide con aquel de $G = \phi^\alpha$ si α suficientemente grande. La forma exponencial de G es tal que las condiciones de slow roll y el pasaje $\Gamma \rightarrow \Gamma_a$ son satisfechos.

2.14 Conclusiones

Partiendo del formalismo general dado por la definición (2.5), que llamamos gravitación hiperextendida debido a su paralelismo con las teorías de inflación, hemos estudiado soluciones cosmológicas isótropas y anisótropas y formulado la aproximación de slow roll. Básicamente, hemos extendido métodos algorítmicos previos para poder reducir a cuadraturas la solución general del problema. En el caso de cosmologías inflacionarias, los resultados pueden pensarse más prácticos: se ha aislado una nueva condición integral para que se produzca inflación intermedia y presentado teorías con este comportamiento. El formalismo de slow roll simplifica las ecuaciones de manera tal que pueden encontrarse soluciones generales. Por ejemplo, no es necesario introducir el tiempo conforme en todos los casos. No hemos analizado, sin embargo, la *bondad* de estas teorías, en el sentido de contar el número de e-foldings que producen o el proceso del fin del periodo inflacionario y sólo nos hemos concentrado en la forma de obtener soluciones analíticas en los casos del lagrangiano más general.

A la hora del balance, sin embargo, uno debe pagar el precio de la gran complejidad formal de las ecuaciones. En general, a menos que sea inevitable, ningún cosmólogo querrá analizar modelos tan complicados como para hacer necesario el formalismo desarrollado en las primeras secciones de este capítulo. Y esa es, creemos, la manera correcta de hacer ciencia. *A posteriori*, una vez realizado el trabajo y salido de esta *selva oscura*, se obtiene un manejo formal de las teorías en estudio que resultará conveniente a la hora de encarar el análisis de sus consecuencias físicas. Sobre este tema discutiremos el resto de la tesis.

Chapter 3

Integrabilidad de modelos de dos fluidos

*No hay memoria de los antepasados,
ni tampoco de los que vendrán habrá recuerdo.*

Eclesiastés 1.11

3.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos modelos de dos fluidos en la teoría de Brans-Dicke de gravitación. En particular nos concentraremos en el análisis de la integrabilidad del modelo que posee fluidos de radiación y materia no-relativista como fuente de la curvatura espacio-temporal. La importancia de este modelo en el estudio de la cosmología reside en que él provee la manera de definir y calcular el tiempo de equivalencia, aquel en el cual las densidades de energía de radiación y de materia son iguales. Este tiempo está relacionado, entre otras cosas, con el de *congelamiento* de las interacciones débiles y es utilizado, como veremos mas adelante, en el análisis de los procesos de nucleosíntesis que dan origen a la formación de elementos livianos. Es el estudio de este modelo lo que permite definir en forma consistente y sin ambigüedades las eras de radiación y de materia en la evolución cósmica. El conocimiento de las características de esta transición es fundamental para la formación de estructura, ya que las perturbaciones de densidad no pueden crecer durante la era de radiación y sí pueden hacerlo durante la era de materia.

Dentro de las teorías escalares-tensoriales, los modelos de dos fluidos han sido muy poco estudiados. El modelo de materia tipo *stiff* (con una ecuación de estado dada por $p = \rho$) y radiación ha podido ser resuelto en forma exacta sólo recientemente [73], mientras que el modelo que nos ocupa no había sido tratado con anterioridad a la publicación del artículo en que esta basado este capítulo.

El hecho de analizar la integrabilidad y no simplemente buscar una solución analítica para el sistema de ecuaciones que describen este modelo, surge en forma natural cuando se intenta extender los procedimientos algorítmicos expuestos en capítulos anteriores para dar cuenta de fuentes múltiples. Excepto en el caso de materia stiff y radiación, ninguna transformación de coordenadas o de campos parece posible a los efectos de simplificar el sistema. El objetivo de esta parte de la tesis será entonces estudiar si el sistema cumple con algunas condiciones necesarias que permitan su integración. Para este fin, utilizaremos una versión algorítmica del test de Painlevé que detallaremos más adelante [113, 114]. Recientemente, el test de Painlevé ha sido utilizado para analizar la integrabilidad de diferentes modelos en teorías de gravitación,

incluyendo, por supuesto, a la Relatividad General. Tal es el caso de los modelos Bianchi IX, de vacío [115, 116, 117] o en presencia de un fluido perfecto [119]. Este mismo modelo ha sido estudiado asimismo en la teoría de Brans-Dicke [120]. Teorías tipo Kaluza-Klein y modelos inflacionarios fueron también investigados [121, 122].

A los efectos de facilitar una posterior comparación, presentaremos la solución al universo de radiación y materia no-relativista (*dust*) en Relatividad General. Luego, expondremos una breve explicación del procedimiento de Painlevé incluyendo algunos ejemplos sencillos y, finalmente, mostraremos la aplicación del método al sistema de ecuaciones que describe un universo compuesto por las mismas fuentes pero en la teoría de Brans-Dicke. Estos resultados se encuentran parcialmente publicados en [123].

3.2 Dos fluidos en Relatividad General

Consideremos las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

con el tensor de energía-impulso como aquel que describe una mezcla de dos fluidos no interactuantes de radiación (en la forma de partículas de masa cero como fotones) y materia no relativista. El fluido de radiación tiene como ecuación de estado $p = 1/3\rho$, mientras que la materia no-relativista será bien aproximada por una ecuación del tipo $p = 0$. En efecto, para partículas no relativistas de masa m y densidad numérica n , la densidad de energía será $\rho \simeq nmc^2$ mientras que la presión se comportará como $p \simeq nmv^2$, con $v \ll c$.

El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ puede calcularse para la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, ya que suponemos al universo isótropo y homogéneo. Esto lleva a las siguientes ecuaciones:

$$G^0_0 = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = 8\pi G\rho \quad (3.2)$$

$$G^i_i = \frac{1}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) = 8\pi Gp \quad (3.3)$$

siendo $k = \pm 1, 0$ una constante relacionada con la curvatura del espacio-tiempo. Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones de estado determinarán completamente $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. A partir de (3.2) es posible despejar k ,

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_0^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1), \quad (3.4)$$

donde hemos definido la constante de Hubble $H_0 \equiv (\dot{a}/a)_0$, el parámetro de densidad $\Omega \equiv \rho_0/\rho_c$ e, implícitamente, la densidad crítica $\rho_c \equiv (3H_0^2)/(8\pi G)$; todas ellas a tiempo presente, denotado con el subíndice cero. Combinando las ecuaciones de Einstein llegamos a

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3a^2\dot{a}p \quad (3.5)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3a^2p. \quad (3.6)$$

Dado entonces la ecuación de estado, $p = p(\rho)$, podemos integrar (3.6) para obtener $\rho = \rho(a)$. Finalmente, la integración de (3.2) lleva a $a = a(t)$. Para una ecuación de estado de la forma $p = w\rho$, (3.6) implica $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. En particular, para materia no-relativista ($w = 0$) y

radiación ($w = 1/3$), encontramos $\rho_{nr} \propto a^{-3}$ y $\rho_r \propto a^{-4}$ respectivamente. Explícitamente, definiendo la función *redshift* como $(1+z) \equiv a_0/a(t)$, escribimos:

$$\rho_{nr}(t) = \rho_c \Omega_{nr} (1+z)^3 \quad (3.7)$$

$$\rho_r(t) = \rho_c \Omega_r (1+z)^4. \quad (3.8)$$

Observaciones sobre las que no comentaremos ahora (véase el Capítulo 4 y las Refs. [124, 125, 103], establecen que

$$\Omega_0 \simeq \Omega_{0,nr} > 0.2, \quad (3.9)$$

$$\Omega_{0,r} h^2 \simeq 2.56 \times 10^{-5}, \quad (3.10)$$

siendo $h \equiv |H_o/100|$. Vemos que actualmente, la materia no-relativista domina sobre la radiación. Dado que la radiación lo hacía en el pasado, lo que puede verificarse a partir de la evolución de ρ_r como una función de a , deberá existir un momento de la evolución cósmica en donde ambas densidades de energía coincidían. Este tiempo es llamado *tiempo de equivalencia*, $t = t_{eq}$. El redshift al cual esta equivalencia tuvo lugar está dado, siguiendo a (3.7) y (3.8), por:

$$1 + z_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} = \frac{\Omega_{nr}}{\Omega_r} \simeq 3.9 \times 10^4 (\Omega_0 h^2). \quad (3.11)$$

Para analizar esa fase de la evolución, es necesario estudiar el modelo de Friedmann que está descrito por la ecuación:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{eq} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 \right]. \quad (3.12)$$

Antes de hacerlo, es posible evaluar la influencia del término de curvatura k/a^2 en la dinámica del modelo. Para cualquier etapa de la evolución cósmica, el término de curvatura tiene una magnitud de:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a_0^2} (1+z)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0) (1+z)^2. \quad (3.13)$$

Cuando se lo compara con el término de radiación

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_r = H_0^2 \Omega_r (1+z)^4, \quad (3.14)$$

se ve que la curvatura sólo puede influir de forma apreciable para redshifts $z \gg z_c$, donde

$$(1+z_c) = \frac{1}{\Omega_r^{1/2}} (1 - \Omega_0)^{1/2} \simeq 200 |1 - \Omega_0|^{1/2} h. \quad (3.15)$$

Ya que ambos factores, h y $|1 - \Omega_0|^{1/2}$, son menores que 1, $z_c \leq 200$. Esto no significa, sin embargo, que la curvatura domina para redshifts menores que z_c , sino sólo que domina sobre el término de radiación. Pero ya que a esos redshifts el lado derecho de las ecuaciones de Einstein implica que el universo se encuentra en la era de materia, se debe comparar el término de curvatura con el que provee la materia no relativista. Al hacer esto se ve que ambos serán del mismo orden para $z \simeq z_f$, si $\Omega_0 < 1$, con

$$\frac{1}{a_0^2} (1+z_f)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0) (1+z_f)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{nr} = H_0^2 \Omega_0 (1+z_f)^3 \quad (3.16)$$

lo que lleva a $z_f = -2 + 1/\Omega_0$. Es posible entonces que el término de curvatura domine sobre la densidad de materia no-relativista a pequeños z . Tomando $\Omega_0 \simeq 0.2$ se obtiene $z_f \simeq 3$. De forma que, reuniendo los resultados y concluyendo, excepto a pequeños redshifts ($z \simeq 1 - 10$), el término de curvatura es completamente despreciable en las ecuaciones de Einstein. Este mismo análisis será válido en el caso de Brans-Dicke, donde estudiaremos el modelo con $k = 0$.

Volvamos entonces a las ecuaciones de Friedmann y consideremos el caso plano. Utilizando las variables

$$x \equiv \frac{a}{a_{eq}}, \quad (3.17)$$

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{eq}}{3}} t \equiv \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} t, \quad (3.18)$$

la ecuación(3.12) se transforma en

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}. \quad (3.19)$$

Integrándola con condición inicial $x = 0$ para $\tau = 0$, la solución es [124, 125],

$$H_{eq}t = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\left(\frac{a}{a_{eq}} - 2\right) \left(\frac{a}{a_{eq}} + 1\right)^{1/2} + 2 \right]. \quad (3.20)$$

Si fijamos ahora el valor de $a = a_{eq}$ encontramos que $H_{eq}t_{eq} \simeq 0.552$, y, si recordamos que:

$$H_{eq}^2 = \frac{16\pi G}{3} \rho_{eq} = \frac{16\pi G}{3} \rho_c \Omega_r (1 + z_{eq})^4 = 2H_0^2 \Omega_0 (1 + z_{eq})^3 \quad (3.21)$$

obtenemos:

$$t_{eq} = \frac{2\sqrt{2}}{3} H_{eq}^{-1} (2 - \sqrt{2}) = 0.39 H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} (1 + z_{eq})^{-3/2} = 1.57 \times 10^{10} (\Omega_0 h^2)^{-2} s. \quad (3.22)$$

Las formas límites de la ecuación paramétrica anterior son las correspondientes a los modelos de universo dominados por radiación o por materia no-relativista en forma separada.

Como vemos, el estudio de este modelo no sólo nos lleva a la determinación precisa del tiempo de equivalencia en función de parámetros cosmológicos medibles, sino que también introduce las eras de radiación y materia con lógica y elegancia, haciendo continuo el concepto de evolución. Para analizar lo que sucede con este modelo en teorías escalares tensoriales de gravitación, introduciremos ahora el concepto de integrabilidad y el algoritmo de Painlevé.

3.3 Integrabilidad

3.3.1 Consideraciones preliminares

La integrabilidad se puede considerar como una propiedad matemática que puede ser usada para obtener mayor poder predictivo e información cuantitativa en el estudio de la dinámica global de un sistema [126]. Esta definición algo vaga puede relacionarse con el significado literal de la palabra *integrabilidad* y con la *existencia de soluciones analíticas, simplemente valuadas, de un sistema de ecuaciones dado*. Estos conceptos fueron primariamente analizados por Fuchs

[127], Kovalevskaya [128, 129] y Painlevé [113, 114] a principios de este siglo. Una reseña histórica de estos trabajos puede verse en [130].

La idea principal del análisis de Painlevé es identificar y clasificar la naturaleza de las singularidades –polos, puntos de ramificación logarítmicos y algebraicos, y singularidades esenciales– admitidas por la solución general de la ecuación diferencial en el plano complejo de la variable independiente. Se dirá que una ecuación diferencial ordinaria (EDO), o sistema, posee la propiedad de Painlevé (PP) sólo si su solución general está libre de puntos críticos móviles en el sentido que se especifica más abajo. Si un dado sistema de ecuaciones satisface la PP, se espera que sea integrable, con una solución dada en serie de Laurent en el entorno de un punto singular móvil. Sin embargo, la PP no es una condición suficiente para la integrabilidad de un sistema. Por el contrario, cuando un dado sistema satisfaga la PP, su integrabilidad deberá determinarse por otros medios; por ejemplo, construyendo el número de integrales de movimiento necesarias. Sistemas diferenciales que cumplen con la PP se dirán integrables en el sentido de Painlevé, implicando que este sentido es el nivel más fundamental del concepto de integrabilidad. La integrabilidad de los sistemas diferenciales está entonces oculta en la estructura de singularidades de su solución general, las cuales se continúan analíticamente al plano complejo de la variable independiente [131]. El test de Painlevé será el conjunto de todos los métodos que generan condiciones necesarias para la integrabilidad en el sentido de Painlevé. Los cuatro tests clásicos son: el método α [113, 114], el test de Kovalevskaya-Gambier [132, 133] –que será el que usaremos aquí–, el método de Bureau [134, 135, 136] y el test perturbativo de Conte et al. [137]. Todos ellos están basados en dos teoremas locales: el de existencia de Cauchy-Piccard y el teorema perturbativo de Lyapunov [138]. Es esta localidad lo que hace que el test de Painlevé pueda usarse sólo para probar la no-integrabilidad de un sistema. En otras palabras, el test de Painlevé no es conclusivo a menos que algunas condiciones necesarias para la integrabilidad se violen explícitamente. El camino que adoptaremos en esta tesis no será el de la demostración de todos los teoremas necesarios para soportar el criterio de integrabilidad que seguiremos. En su lugar, tomaremos éste último como una herramienta ya probada y discutiremos su aplicación al caso que nos ocupa.

La cuestión de la integrabilidad puede también relacionarse con la existencia de simetrías no triviales en el problema. Estas simetrías pueden dejar invariante el correspondiente lagrangiano y en ese caso, se llaman simetrías de Noether. Cuando existen simetrías de Noether, es posible usar el teorema de Noether para construir el número necesario de integrales de movimiento y asegurar la completa integrabilidad. Estas ideas son ampliamente usadas en la búsqueda de soluciones a teorías escalares tensoriales de gravitación, en particular, en el caso de teorías no mínimamente acopladas [139, 140, 141].

3.3.2 Clasificación y análisis de las singularidades

Consideremos ahora EDOs en el plano complejo de la variable independiente. La solución general de las EDOs puede dejar de ser analítica en ciertos puntos llamados singularidades. Si la posición de estos puntos en el plano depende de las constantes de integración, se llamarán singularidades móviles. Si no lo hacen, por el contrario, serán llamadas singularidades fijas. Entre los puntos singulares, los puntos de ramificación y las singularidades esenciales serán llamados puntos críticos. La idea fundamental subyacente al análisis de Painlevé es que si los puntos críticos son fijos, el teorema fundamental de existencia garantiza que la solución general de una EDO de orden n está completa y únicamente especificada. Si, en cambio, se admite la existencia de un punto crítico móvil, habrá dificultades en la continuación analítica de la solución, lo que finalmente llevará a la no-integrabilidad de la EDO [138].

A continuación presentaremos –sin prueba– el algoritmo ARS que sera luego utilizado en el

análisis del problema de dos fluidos en la teoría de Brans-Dicke. Nos basaremos en gran medida en la presentación dada en [126] y en [142]. Para una revisión general del método de Painlevé puede verse también la referencia [143] y los trabajos originales en [132, 133].

Consideremos una EDO de orden n

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z; w, w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) \quad (3.23)$$

o equivalentemente, n ecuaciones de primer orden

$$\frac{dw_i}{dz} = F_i(z, w_1, \dots, w_n) \quad \text{para } i = 1 \dots n \quad (3.24)$$

F y F_i son analíticas en z y racionales en todos los demás argumentos. La solución de (3.23), si existe, será expandida como una serie de Laurent en el entorno de un punto singular z_0 . Luego, el algoritmo ARS consiste de los siguientes tres pasos:

- Determinación del comportamiento de los términos dominantes del desarrollo de Laurent en el entorno del punto singular z_0 .
- Determinación de las resonancias: potencias a las cuales pueden aparecer las constantes arbitrarias de la solución.
- Verificación de la existencia de un número suficiente de constantes arbitrarias sin la necesidad de la introducción de puntos críticos móviles.

Al final de estas tres etapas estaremos en condiciones de analizar si se cumplen los requisitos para la existencia de la solución y la integrabilidad de (3.23). Si estas condiciones son suficientes es un problema mayor, ya que debería probarse que la serie de Laurent asociada existe y demostrar su convergencia. Notemos que el algoritmo ARS no identifica la posible existencia de singularidades esenciales y que por esto debe considerarse como un método que provee condiciones necesarias para que una dada EDO sea de tipo Painlevé. Estas singularidades esenciales podrían estar relacionadas con la aparición de resonancias negativas en el desarrollo de Laurent [144].

Consideremos ahora cada paso del algoritmo por separado.

Comportamiento de los términos dominantes

Supongamos que el comportamiento dominante de $w(z)$ –solución de (3.23)– en un entorno suficientemente pequeño del punto singular móvil z_0 es algebraico, esto es:

$$w(z) \simeq a_j (z - z_0)^{q_j} \quad \text{para } z \rightarrow z_0. \quad (3.25)$$

Aquí, (a_j, q_j) son constantes a ser determinadas a partir de (3.23) donde $\text{Re}(q_j) < 0$, hipótesis de términos dominantes. Se dirá que cada par de valores de a_j y de q_j definen una rama de la solución. Si utilizamos (3.25) en (3.23) observamos que dos o más términos serán del mismo orden –dominantes– mientras que el resto se hace despreciable para $z \rightarrow z_0$. Conociendo los q_j , los a_j pueden evaluarse a partir del reemplazo anterior. A esta etapa del análisis puede concluirse que:

- Si al menos uno de los q_j es irracional o complejo, la ecuación (3.23) no cumple con la PP y no es integrable.

- Si todos los q_j son enteros negativos, (3.25) puede representar el primer término de un desarrollo de Laurent alrededor de z_0 .
- Si alguno de los q_j no es entero sino una fracción racional, la ecuación (3.23) puede cumplir con la PP-débil –que comentaremos más abajo–.

En cualquiera de los dos últimos casos, la solución de $w(z)$ se podrá escribir como

$$w(z) = (z - z_0)^{q_j} \sum_m a_{j,m} (z - z_0)^m \quad \text{para} \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (3.26)$$

Resonancias

En el desarrollo de Laurent anterior, z_0 es una constante arbitraria que es también la posición de la singularidad. Si además tuviéramos $(n-1)$ coeficientes a_j arbitrarios, entonces tendríamos n constantes de integración de la EDO y por lo tanto (3.26) sería la solución general en el entorno de la singularidad. Las potencias a las cuales estas constantes arbitrarias entran dentro de la suma en (3.26) se llaman resonancias. Para encontrar las resonancias para cada rama, debemos construir una ecuación simplificada que retenga sólo los términos dominantes de (3.23), con sus respectivos valores de a_j y q_j . Si introducimos

$$w(z) = a\tau^q + b\tau^{q+r}, \quad (3.27)$$

donde $\tau = z - z_0$, en la ecuación simplificada y tenemos en cuenta sólo términos lineales en b , obtendremos

$$Q(r)b\tau^s = 0 \quad \text{con} \quad s \geq q + r - n \quad (3.28)$$

donde n es el orden la EDO. Las raíces del polinomio $Q(r)$ determinarán los valores de las resonancias. Podemos notar, en esta etapa, las siguientes características:

- Una raíz es siempre -1 . Consecuencia de la arbitrariedad de z_0 .
- Si una de las a_j es arbitraria, entonces una de las raíces será $r = 0$.
- Las raíces con $\text{Re}(r) < 0$ pueden descartarse, porque violan la hipótesis de término dominante. Sin embargo, véase abajo la sección sobre el método de Painlevé perturbativo.
- Cualquier raíz $r = p/q$ racional, indica, en general, la presencia de un punto móvil que puede asociarse con la PP-débil.
- Si al menos una de las raíces es irracional o compleja, la EDO no es del tipo Painlevé, y no es integrable.
- Si para cada rama, excluyendo a -1 , las raíces son enteros positivos, entonces no hay puntos críticos algebraicos.

En el caso de sistemas de EDOs, se deberá reemplazar (3.27) en cada componente del sistema, exigiendo luego que el determinante de los coeficientes de los términos resonantes se anule [126].

Evaluación de las constantes arbitrarias

La etapa final consiste en determinar si existen un número suficiente de constantes arbitrarias –sin que sea necesaria la introducción de puntos singulares móviles– en el desarrollo de Laurent. Sea (a, q) una dada rama dominante con $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_l$ y $l \leq n - 1$ raíces racionales de $Q(r)$. Si sustituimos

$$w(z) = a_0\tau^q + \sum_{k=1}^{r_1} a_k\tau^{q+k} \quad (3.29)$$

en la ecuación (3.23) y pedimos que los coeficientes de τ^{q+k-n} se anulen obtenemos

$$Q(k)a_k - R_k(z_0; a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \quad (3.30)$$

Para $k \leq r_1$ la ecuación anterior determina los coeficientes a_k . En $k = r_1$, $Q(r_1) = 0$. Surgen entonces dos posibilidades:

- Si $R_{r_1} = 0$, a_{r_1} es arbitraria, y podemos continuar el proceso para encontrar el próximo coeficiente. Esto puede continuarse hasta que la serie de Laurent tenga n constantes arbitrarias, de modo que la EDO es, en este caso, de tipo Painlevé.
- Si $R_{r_1} \neq 0$, entonces la ecuación (3.30) no se satisface idénticamente y a_{r_1} no será una constante arbitraria. No hay solución en la forma (3.26) y deberán introducirse términos logarítmicos como

$$w(z) = w(z) = a_0\tau^q + \sum_{k=1}^{r_1-1} a_k\tau^{q+k} + (a_{r_1} + b_{r_1} \log \tau)\tau^{q+r_1} + \dots \quad (3.31)$$

Ahora, el coeficiente de $\tau^{q+r_1-n} \log \tau$ es $Q(r_1)b_{r_1} = 0$. Pero b_{r_1} se determina pidiendo que el coeficiente de τ^{q+r_1-1} se anule, siendo a_{r_1} arbitrario. Si el coeficiente resultante no fuera arbitrario habría que introducir más términos singulares y repetir el procedimiento hasta que lo sea. En este caso se señalaría la presencia de puntos de ramificación logarítmicos que muestran que la EDO no cumple con la PP. Habiendo analizado la naturaleza de la serie de Laurent, es necesario verificar si la misma converge y cual es su radio de convergencia. Sin embargo, debido a la no-linealidad de las relaciones de recurrencia entre los coeficientes involucrados, este análisis puede hacerse muy complicado y usualmente la convergencia de la serie y, por ende, la existencia final de la solución, debe buscarse por otros métodos.

3.4 Algunos ejemplos sencillos

La discusión no estaría completa sino hasta revisar la aplicación del algoritmo en algunos ejemplos sencillos. Para mayores detalles, véase, entre otras, la Ref. [126].

- Ejemplo 1: $w''' + 2ww'' - 2w^3 + w^2 + \mu w = 0$, con μ constante.

Suponiendo entonces que el comportamiento dominante es $w(z) \simeq a_0(z - z_0)^q$, con z_0 una singularidad arbitraria y llamando $\tau = z - z_0$, se obtiene

$$a_0q(q-1)(q-2)\tau^{q-3} + a_0^2q(q-1)\tau^{2q-2} - 2a_0^3\tau^{3q} = 0. \quad (3.32)$$

Luego, hay dos ramas posibles,

1. $q = -1$ y $a_0 = 3$ para los términos asociados a w''' y ww'' .
2. $q = -2$ y $a_0 = 3$ para los términos asociados a ww'' y w^3 .

Para el análisis de las resonancias se substituye ahora, sólo en la ecuación reducida a los términos dominantes,

$$w(z) = a\tau^q + b\tau^{q+r}. \quad (3.33)$$

Para la primer rama, las resonancias son las raíces de

$$(r+1)(r^2 - 4r + 6) = 0 \quad (3.34)$$

esto es, $r = -1$ y $r = 2 \pm i\sqrt{2}$. Para la segunda rama se encuentra $r = -1$ y $r = 6$. Sin embargo, debido a que han aparecido resonancias complejas en una de las ramas, se puede concluir que la ecuación no es de tipo Painlevé y no es integrable.

- Ejemplo 2: $w''' + w''ww' - \sigma(w + w') = 0$, con σ constante.

El comportamiento dominante se obtiene haciendo el balance entre los términos w''' y ww' y esto lleva a la rama:

$$q = -2, \quad a_0 = -12. \quad (3.35)$$

Asimismo el análisis de resonancias, similar al anterior, indica que éstas son:

$$r = -1, \quad r = 4, \quad r = 6. \quad (3.36)$$

Para evaluar las constantes arbitrarias reemplazamos en

$$w(z) = a_0\tau^q + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\tau^{q+k} \quad (3.37)$$

los valores previamente obtenidos de a_0 y q y la evaluamos en la EDO completa. Siendo n el orden de la EDO, se pide que los coeficientes de τ^{q+k-n} se anulen. Esto permite encontrar,

$$a_1 = \frac{12}{5}, \quad a_2 = \sigma + \frac{1}{25}, \quad a_3 = \sigma + \frac{1}{125}. \quad (3.38)$$

Sin embargo, no permite evaluar el coeficiente a_4 : los términos que lo contiene se anulan entre sí y la ecuación que se obtiene es, $\sigma a_1\tau^{-1} = 0$. Como ésta no puede cumplirse debe introducirse un término adicional de la forma,

$$w(z) = a_0\tau^q + \sum_{k=1}^{4-1} a_k\tau^{q+k} + (a_4 + b_4 \ln \tau)\tau^{-2+4}. \quad (3.39)$$

Pidiendo ahora que el coeficiente de τ^{q-4+3} se anule, se obtiene b_4 , que resulta ser

$$b_4 = -\frac{6}{25}, \quad (3.40)$$

manteniendose a_4 arbitrario. Pero al haber introducido términos logarítmicos obtenemos que la EDO es no integrable.

Otros ejemplos sencillos pueden encontrarse en la literatura citada.

3.5 Alrededor de lo básico

Finalmente, antes de pasar al estudio del problema cosmológico que nos interesa haremos una breve revisión de algunas ideas recientes sobre el análisis de Painlevé.

Propiedad de Painlevé débil

La conjetura débil de Painlevé ha sido introducida para incluir sistemas integrables que poseen puntos algebraicos de ramificación. La propiedad débil de Painlevé estará satisfecha cuando las resonancias sean tales que sus denominadores dividan al mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes de los términos dominantes [143]. Basado en transformaciones de coordenadas convenientes ha sido señalado que algunos sistemas que exhiben la propiedad débil de Painlevé pueden ser mapeados en sistemas con la PP usual [130].

Resonancias negativas y test perturbativo de Painlevé

Argumentando que su aparición viola la hipótesis de comportamiento dominante, las resonancias negativas son comúnmente ignoradas. Sin embargo, se ha visto que existen ecuaciones tales que, a pesar que sus resonancias son negativas, se conoce una solución general simplemente valuada. Ejemplo de esto es la ecuación de Chazy [144]. Para tener en cuenta este tipo de comportamiento, Fordy y Pickering [144] mejoraron el test básico de Painlevé incluyendo propiedades adicionales (que se suman a las del test usual) a tener en cuenta en el análisis de los comportamientos dominantes y resonancias. Sin entrar en un detallado análisis del test perturbativo, y refiriendo para ello a las citas [137, 144], señalemos algunas características fundamentales. La idea consiste en realizar una expansión en serie doble para cada variable dinámica del problema, una serie perturbativa de Taylor y una serie de Laurent, en la forma

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sum_{j=-nx}^{\infty} a_j^{(n)} (z - z_0)^j, \quad (3.41)$$

donde ϵ es un parámetro perturbativo, z_0 es la singularidad móvil y x la resonancia –que puede ser positiva ó negativa–. El algoritmo indica luego que se debe utilizar (3.41) en la correspondiente ecuación de balance e igualar término a término en potencias de ϵ , para cero orden si la resonancia es positiva (ARS usual) y para todo orden en el caso general. Esto genera un conjunto de ecuaciones de compatibilidad para las constantes $a_j^{(n)}$ que deben cumplirse dejando suficiente *espacio* para tantas constantes arbitrarias como lo requiera la solución de la ecuación para ser genérica. Si esto no ocurre deberán agregarse términos logarítmicos en la expansión, mostrando que la ecuación no satisface la PP.

Cierto es que el test perturbativo todo lo complica. La falla en la posibilidad de que haya suficiente *espacio* para el número de constantes arbitrarias correctas podría suceder a cualquier orden de la perturbación. Esto hizo necesario generar códigos para trabajar con el algoritmo en forma automática, véase por ejemplo los trabajos de Scheen et al. [131]. Es de esperar entonces que para obtener alguna conclusión con sentido al aplicar el test de Painlevé, se encuentre una falla grave en alguna de las condiciones necesarias para la integrabilidad de la EDO sin necesidad de realizar el paso por el test perturbativo; por ejemplo, que existan resonancias complejas. Si así no fuera, la integrabilidad debería en general, explorarse por otros métodos.

3.6 Dos fluidos en la teoría de Brans-Dicke

En esta sección presentaremos los resultados de la aplicación del algoritmo ARS del método de Painlevé a un universo compuesto por radiación y materia no-relativista en el marco de la gravitación de Brans-Dicke.

A partir de la aplicación del principio de mínima acción en un universo de Friedmann-Robertson-Walker plano encontramos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} = \frac{\omega}{6} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{8\pi}{3} \frac{\rho}{\phi}, \quad (3.42)$$

$$2\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} = -\frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \quad (3.43)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -\frac{1}{2\omega + 3} 8\pi (3p - \rho), \quad (3.44)$$

donde se ha usado un tensor de energía impulso para el contenido de materia en la forma de un fluido ideal. Recordemos que, debido a la forma en que se realiza el acoplamiento entre el campo escalar y la materia, las leyes de conservación –en el sentido de la Relatividad General– permanecen inalteradas. Esto implica:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0. \quad (3.45)$$

En nuestro caso, el medio es una mezcla de radiación y materia no relativista, de forma que la densidad de energía es una suma de dos términos:

$$\rho = \rho_r + \rho_m, \quad (3.46)$$

mientras que la presión es sólo provista por el fluido de radiación

$$p = p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (3.47)$$

Bajo la suposición que la conversión de materia en radiación y viceversa es despreciable, lo que equivale a suponer que estos fluidos no interactúan, existirá al igual que en Relatividad General, una ley de conservación (que podrá ser integrada) para cada componente. De esta forma, nos reencontramos con la densidad de energía total

$$\rho = \rho_r + \rho_m = \rho_{eq} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4 \right], \quad (3.48)$$

con ρ_{eq} y a_{eq} dos constantes.¹

¹La ley de conservación -en el sentido relativista- está dada por $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, donde $T^{\mu\nu}$ contiene las contribuciones de materia y radiación: $T^{\mu\nu (m)}$ y $T^{\mu\nu (r)}$. Bajo la suposición que no existe interacción entre estos componentes se obtiene $T^{\mu\nu (m)}_{;\nu} = 0$ y $T^{\mu\nu (r)}_{;\nu} = 0$ por separado; ya que, de otra forma, estaríamos permitiendo intercambio de energía entre los miembros del sistema.

3.6.1 Análisis de las ecuaciones de movimiento

De las identidades de Bianchi, sabemos que sólo dos de las ecuaciones diferenciales –más la ecuación de estado– son necesarias para determinar el comportamiento del sistema. Analizaremos entonces el siguiente sistema reducido:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\omega}{6} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_{eq}}{3\phi} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4 \right], \quad (3.49)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} = \frac{8\pi}{2\omega + 3}\rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3. \quad (3.50)$$

El algoritmo ARS aplicado a este sistema produce los siguientes resultados:

1. Hay dos comportamientos dominantes. Teniendo en cuenta que

$$a(t) = a_0(t - t_0)^\alpha \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0(t - t_0)^\beta \quad (3.51)$$

encontramos los siguientes casos:

- (a) Realizando el balance con el término de materia no-relativista en la ecuación de Friedmann y considerando la ecuación para ϕ completa, se obtiene:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad (3.52)$$

con las constantes,

$$a_0 = -\frac{2\omega + 3}{3\omega + 3}a_{eq}, \quad \phi_0 = -\frac{4\pi(2\omega + 3)^2\rho_{eq}}{(3\omega + 3)^3}. \quad (3.53)$$

- (b) Realizando en cambio el balance con el término de radiación de la ecuación de Friedmann se encuentran dos subramas,

i.

$$\alpha = \frac{6\omega + 8}{4\omega + 3}, \quad \beta = -\frac{10\omega + 18}{4\omega + 3}. \quad (3.54)$$

ii.

$$\alpha = \frac{2\omega + 2}{4\omega + 3}, \quad \beta = \frac{2\omega}{4\omega + 3}. \quad (3.55)$$

En ambos casos, o bien a_0 o bien ϕ_0 es arbitrario y están relacionadas por

$$\phi_0 = \frac{8\pi\beta}{2\omega + 3}\rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^3. \quad (3.56)$$

Notemos que la segunda rama podría ser asociada con la PP-débil [126], y que los exponentes de la primer rama son positivos.

2. Para cada rama, el análisis de resonancias muestra

- (a) Para la primer rama, las resonancias (x) son las raíces de un polinomio cúbico. Una de ellas es $x = -1$, la cual está siempre presente y relacionada con la arbitrariedad de t_0 . Las otras dos están dadas por

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 8(1 + \omega)}}{2} \quad (3.57)$$

Este resultado establece que existe un conjunto infinito de valores ω que hacen x irracional, pero también otro conjunto infinito que hace que la resonancia tome un valor entero. Esto último es fácilmente demostrable. Si queremos que x sea un número entero necesitamos que el radicando sea el cuadrado de un número impar, esto es

$$(2n + 1)^2 = 1 + 8(1 + \omega) \quad (3.58)$$

Expandiendo la expresión anterior se llega a

$$n(n + 1) = 2(\omega + 1) \quad (3.59)$$

Pero, ya que 2 divide bien a n , bien a $n + 1$, esta relación es válida para un número infinito de valores de ω (o de n), tales como $\omega = 0, 2, 5, \dots$, los cuales se encuentran cada vez más espaciados. De esta forma, a partir de (3.57), podemos recorrer todas las resonancias enteras, por ejemplo: $(-2, 1), (-3, 2), (-4, 3)$, respectivamente. Observando asimismo la ecuación (3.57) es posible ver que siempre se obtiene una resonancia positiva y otra negativa. Para valores negativos de ω se encuentran resonancias complejas siempre que $\omega < -9/8$, lo que hace al sistema no integrable.

- (b) Para la segunda rama, las resonancias son $x = -1, 0$ y, para cada una de las subramas, las siguientes resonancias adicionales respectivamente

$$x = -\frac{114 + 217\omega + 134\omega^2 + 25\omega^3}{(4\omega + 3)(\omega - 1)} \quad (3.60)$$

$$x = -\frac{6 + 16\omega + 12\omega^2 + \omega^3}{(4\omega + 3)(3\omega + 2)} \quad (3.61)$$

Notemos que estas son resonancias racionales pero que no tienen el comportamiento establecido para que satisfagan la PP-débil, ya que no se cumple la relación deseada entre los denominadores de las resonancias y de los exponentes de los comportamientos dominantes. No extraeremos entonces mayor información de esta rama.

La primera conclusión que podemos establecer es que el sistema no posee la propiedad de Painlevé para un conjunto infinito –pero medible– de valores de ω positivos, mostrando la presencia de puntos de ramificación algebraicos, encontrándose resonancias irracionales. Además, se ha mostrado que existe otro conjunto infinito y medible de valores de ω para los cuales el sistema tiene resonancias enteras, una de las cuales es siempre negativa. Aunque esto es una fuerte indicación en el sentido de llevar a la aparición de puntos de ramificación logarítmicos móviles, en el próximo paso mostraremos explícitamente con un ejemplo cómo esto sucede.

- Analizemos ahora si existe un número suficiente de constantes arbitrarias. Como hemos dicho, realizaremos un análisis adicional sólo para la primer rama, vinculada por la ecuación (3.59). Como ejemplo, tomemos el caso $\omega = 9$, que es un valor significativo desde el punto de vista de la teoría inflacionaria. Esto hace que las resonancias sean -1,4 y -5. Debemos luego considerar el conjunto completo de ecuaciones y reemplazar las funciones (3.51) por desarrollos truncados en el término cuatro, esto es:

$$a(t) \sim a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4, \quad (3.62)$$

y

$$\phi(t) \sim \phi_0\tau^2 + \phi_1\tau^3 + \phi_2\tau^4 + \phi_3\tau^5 + \phi_4\tau^6, \quad (3.63)$$

donde se ha usado que $\alpha = 0$ y $\beta = 2$. Esto permitirá determinar los valores de a_1, \dots, ϕ_3 y ver si a_4 y ϕ_4 son ambas arbitrarias. El resultado de este reemplazo indica que $a_i = 0$, $\phi_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y que $\phi_4 = f(a_4)$. Esto significa que sólo hay lugar para una constante arbitraria. Pero como estamos trabajando con dos ecuaciones diferenciales acopladas, una de primer orden y otra de segundo, y recordando que t_0 está fijo por las condiciones iniciales, necesitamos aún otra constante arbitraria para hacer la expansión genérica. Esa constante arbitraria está perdida debido a que tenemos una resonancia trivial negativa. El método de Painlevé perturbativo [137] permite estudiar la expansión completa de Laurent en cada resonancia –incluyendo las negativas–. Para nuestro sistema, en general surgen condiciones sobre las constantes arbitrarias previamente introducidas. En particular, para $\omega = 9$, esto sucede a orden cuarto de la perturbación. Esto significa que debemos introducir términos logarítmicos en la expansión, de la forma

$$b_4 \tau^4 \log \tau + \dots \quad (3.64)$$

para $a(t)$ y uno similar para $\phi(t)$ y esto lleva a la presencia de puntos de ramificación logarítmicos, lo cual muestra la no-integrabilidad del sistema. Aunque esto se ha probado para una valor particular de ω , puede ser generalizado sin dificultad. La ausencia de espacio para un número suficiente de constantes se debe, primariamente, al hecho que la primer rama sólo tiene una resonancia positiva; lo que sucede para cualquier ω que satisfaga la relación (3.59).

3.7 Conclusiones

En este capítulo, hemos analizado el sistema compuesto por radiación y materia no relativista en el marco de la teoría de Brans-Dicke. Se ha probado que el sistema de dos fluidos discutido no es integrable debido a la presencia de puntos de ramificación, algebraicos o logarítmicos, para un amplio conjunto de valores de la constante de acoplamiento ω . Este es el resultado del análisis del comportamiento matemático del factor de escala y del campo escalar de Brans-Dicke en el plano complejo del tiempo. En principio, podrían existir ciertos valores de ω en los que las condiciones del test perturbativo de Painlevé sean satisfechas a todo orden. Esto, sin embargo, no es posible demostrarlo, debido a que es posible que las violaciones a las condiciones que impone la doble sumatoria aparezcan a cualquier orden de la perturbación. Nuestra creencia es que esto no será así, y que el sistema estudiado no es integrable independientemente del valor de la constante de acoplamiento, es decir, *que no existe una solución analítica general*. Esta conclusión podría estar sustentada en el hecho que el patrón de resonancias es siempre similar en todos los casos: $(n, -(n+1))$.

Es bueno remarcar que el análisis de los puntos críticos de las funciones se lleva a cabo en una manera completamente general, esto es, alrededor de cada punto t_0 del plano. Esto implica que no se está haciendo ninguna suposición acerca del comportamiento de las funciones o de la ecuación de estado en tiempos cercanos a la singularidad física. Es notorio el hecho intuitivo acerca de que este modelo debería acercarse al comportamiento de un modelo de vacío cuando $t \rightarrow 0$ [145]. Esto puede inferirse debido a que los modelos dominados por la radiación y por la materia en forma separada lo hacen. Sin embargo, dado que el análisis de Painlevé es válido

para cualquier tiempo, cualquier perturbación al modelo de vacío que contenga ambas fuentes en forma simultánea lo convierte en no integrable.

Como se ha mencionado en secciones anteriores, el modelo que describe un universo compuesto por radiación y materia no-relativista en la gravitación de Einstein es integrable, siendo su solución obtenida en forma paramétrica como $t = t(a)$. Esto ya no es cierto en general en la teoría de Brans-Dicke y una definición precisa del tiempo de equivalencia no puede obtenerse, al menos en forma analítica. Cualquier integración numérica dependerá de las condiciones iniciales elegida, pero si el sistema es caótico, pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden llevar a comportamientos completamente diferentes del sistema y entonces, grandes cambios en el tiempo de equivalencia podrían surgir. La búsqueda de caos en Relatividad General y otras teorías de gravitación es en la actualidad un tema de gran interés (ver por una revisión la referencia [146]). Pero es importante remarcar que el algoritmo de Painlevé no es el método idóneo para decidir sobre el posible caos de un sistema, dado que ésta es una propiedad global. Con respecto al sistema que nos ocupa, es posible pensar que el modelo no desarrollará un comportamiento caótico, debido a que, como dijimos, el modelo de vacío –que es integrable– podría funcionar como una condición de contorno del aquí estudiado. Esto fue demostrado recientemente en [147], donde se analizó la transición radiación–materia en forma numérica y se encontró que ésta era suave para un amplio rango de condiciones iniciales y valores de ω . También allí se estudió el problema en forma analítica, pero mediante el uso de aproximaciones (a orden $1/\omega$) que imposibilitan una comparación directa con el presente análisis.

Chapter 4

Nucleosíntesis primordial

*Imaginaos ahora este instante, en que los murmullos
se arrastran discretamente y las espesas tinieblas
llenar el gran navío del Universo.*

William Shakespeare
Henry V, acto IV, Prólogo

4.1 Introducción

En este capítulo nos concentraremos en la búsqueda de teorías escalares tensoriales cuyas predicciones resulten compatibles con la observación. Como hemos discutido en la Introducción, básicamente existen dos grupos de tests que una teoría de gravitación debe superar: tests de campo débil y tests de campo fuerte. Los primeros consisten en comparar las predicciones de una dada teoría en el límite de campos gravitacionales débiles y movimientos cuyas velocidades son mucho menores que la de la luz [29, 30]. En general, las teorías métricas, como la Relatividad General y la teoría de Brans-Dicke, no son descartadas por estos tests.¹ Esto indica que poco pueden diferir unas de otras, y en conjunto con la Relatividad General, en estas situaciones. El formalismo post-newtoniano [30] se ha convertido en la herramienta standard para analizar experimentos en este límite, especialmente en el sistema solar. Sin embargo, en las últimas tres décadas ha quedado claro que la comparación predicción–experimento debía hacerse sobre una base más amplia, incluyendo el análisis de las predicciones exactas de la teoría en el estudio de modelos cosmológicos, radiación de ondas gravitacionales, estrellas de neutrones y agujeros negros. Estos casos se convierten entonces en los tests fuertes de la teoría.

Los procesos de formación de elementos livianos en el universo primitivo, llamados *nucleosíntesis primordial*, proveen un escenario interesante para testear la viabilidad de una teoría de gravitación. Aquí, el modelo standard cosmológico tiene una franca concordancia entre teoría y observación y la pregunta es entonces si la misma situación se produce cuando teorías alternativas son consideradas.

El efecto más dramático de modificar la Relatividad General para convertirla en una teoría escalar tensorial es que, como dijimos anteriormente, la *constante de gravitación* es ahora un parámetro variable en el espacio-tiempo. Las soluciones cosmológicas también se modifican, debiendo dar cuenta de la introducción del campo escalar como nueva fuente de curvatura espacio-temporal. Los procesos térmicos son sensibles a estas modificaciones y la nucleosíntesis puede predecir diferentes abundancias de elementos livianos en cada teoría particular.

¹En el caso de teorías de Brans-Dicke se debe fijar el parámetro libre ω en forma acorde.

El efecto que una *constante de gravitación efectiva* variable en el tiempo tiene sobre la predicción de abundancias de elementos livianos ha sido ampliamente considerado en el pasado. Solamente por nombrar algunos trabajos se naemos que Dicke [148] y Greenstein [149] hicieron los primeros análisis a fines de la década del 60 y se destacan, entre los más recientes, los de Serna et al. [150], Casas et al. [151, 152] y Wagoner et al. [153]. Recientemente, Serna y Alimi [154, 155, 156] han considerado numéricamente el problema para funciones $\omega(\phi)$ muy generales. En particular, han demostrado la existencia de teorías escalares tensoriales que convergen rápidamente a la Relatividad General, de forma que todos los test post-newtonianos se confirman, pero aún presentas grandes diferencias con respecto a las predicciones de nucleosíntesis. Las teorías en cuestión se caracterizan por una función $\zeta = H/H_{RG}$ que no es monótona, por lo que el universo se expande –según la época– más rápida o lentamente que en Relatividad General. Además, la *constante de Newton* resulta ser menor en el pasado. Para estos casos, se encontró que la densidad bariónica podría estar cerca de la necesaria para que el universo resulte cerrado ($0.01 < \Omega_b < 0.78$) en clara contradicción con el resultado standard de nucleosíntesis que discutiremos más abajo.² Si este tipo de acoplamiento provee de un modelo cosmológico aceptable es aún una pregunta abierta. Sin embargo, estos trabajos han demostrado claramente que una teoría escalar tensorial puede resultar compatible con todo tipo de tests y aún así resultar distinguible de la Relatividad General.

Otros trabajos consideraron otras elecciones particulares de la función ω , por ejemplo citemos la teoría de Bekenstein [157] y la de Barker [158]. Una aproximación más genérica al problema fue dada por Yang et al. [159, 160] al considerar variaciones del modelo standard sin hacer específica la forma del acoplamiento. Finalmente, también se ha considerado una teoría de Brans-Dicke cuyo campo escalar se acopla -en el *Einstein frame*- de forma diferente a la materia ordinaria y a la materia oscura [161]. Señalemos asimismo que una excelente revisión de procesos de nucleosíntesis en modelos de teorías de gravitación distintas a la Relatividad General o con anisotropías o inhomogeneidades se ha publicado en la Ref. [162]. La conclusión general es que es posible encontrar teorías escalares tensoriales que no solamente superan los test débiles de gravitación sino que también conducen a estimaciones de abundancias de nucleidos de acuerdo con las observaciones.³

En general, los trabajos citados, pueden agruparse en dos conjuntos. Por una lado encontramos aquellos que realizan una simulación de la cadena de reacciones nucleares con un código de nucleosíntesis [163], como los casos de Serna et al. Por otro, encontramos distintos intentos de dar una discusión analítica sobre el tema: intentos que buscan acordar dentro de un pequeño porcentaje con los resultados generados por un código numérico, mostrando que se ha podido aislar la física esencial del problema. Estos están básicamente representados por los trabajos de Casas et al. y, notablemente, de Bernstein et al. [164]. Esta será la forma de acercarnos al estudio de nucleosíntesis que seguiremos en este capítulo. En particular, se estudiará cómo un valor distinto en la temperatura de congelamiento de las interacciones débiles, provisto por una evolución cósmica que no es la standard, provoca cambios en la cantidad de ${}^4\text{He}$ primordial que puede formarse y cómo esto puede usarse para establecer cotas sobre la propia teoría gravitacional. Para teorías de Brans-Dicke, este análisis fue llevado a cabo por Casas et al. y será

²El logro de tales Ω_b se explica del siguiente modo. Al inicio de la época de nucleosíntesis, la tasa de expansión es menor que en Relatividad General. Esto implica una menor temperatura de *freezing out* y una tendencia a una menor producción de ${}^4\text{He}$. Sin embargo, ésto puede balancearse con una mayor densidad bariónica. A su vez, ésto podría provocar una sobre producción de D, que se evita debido a que durante el proceso de nucleosíntesis la tasa de expansión se acelera haciéndose más rápida que en Relatividad General. De esta forma, el monto total de D se mantiene acotado porque ocurre en un tiempo más corto.

³Es posible especificar la afirmación anterior diciendo que los modelos analizados y encontrados de acuerdo con las observaciones corresponden a los casos plano y abierto de la métrica de Friedmann–Robertson–Walker, los modelos cerrados producen en general demasiado ${}^4\text{He}$ y deben descartarse.

aquí generalizado para dar cuenta de teorías con acoplamientos más generales, $\omega(\phi)$. Mimoso [165, 166], aplicó un método similar para analizar teorías genéricas mediante la utilización del teorema del Valor Medio Integral y sus resultados se encuentran de acuerdo con los aquí presentados. Finalmente, también presentaremos una extensión adicional del método que permitirá fijar cotas a la variación temporal de las masas en reposo de las partículas elementales en el marco de teorías de Kaluza-Klein no compactificadas. Este capítulo está parcialmente basado en los trabajos [167] y [168].

4.2 Formación primordial de ${}^4\text{He}$

Son muchas y variadas las presentaciones que pueden encontrarse sobre la nucleosíntesis primordial. A los efectos de este capítulo, haremos una breve revisión del tema. Valiosas introducciones pueden verse en el libro de Kolb y Turner [125] y en el de Coles y Lucchin [103].

Básicamente, la formación de ${}^4\text{He}$ primordial ocurre a través de la siguiente serie de eventos. A tiempos tempranos, cuando la temperatura del universo era del orden de las centenas de MeV, la energía y la densidad numérica de partículas estaba dominada por partículas relativistas: leptones –electrones, positrones y neutrinos– y fotones. Todas las partículas estaban en equilibrio térmico, debido a colisiones gobernadas por la interacción débil que rige las reacciones:

$$n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-, \quad (4.1)$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + \hat{\nu}_e, \quad (4.2)$$

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \hat{\nu}_e. \quad (4.3)$$

Es una suposición del modelo que los neutrinos y antineutrinos se encontraban en igual cantidad mientras que los electrones y protones mantenían –y aún lo hacen– la neutralidad de carga. Bajo estas suposiciones, la densidad numérica de neutrones a protones estaba dado por el factor de Boltzmann:

$$\frac{n_n(T)}{n_p(T)} = \exp\left[-\frac{Q}{kT}\right], \quad (4.4)$$

donde $Q = m_n - m_p \simeq 1.29\text{MeV}$. A una temperatura inicial de 100MeV , la razón de neutrones a protones era muy cercana a la unidad. Es posible definir entonces la razón de la densidad neutrónica a la densidad total de bariones como,

$$X_n(T) = \frac{n_n(T)}{n_n(T) + n_p(T)}, \quad (4.5)$$

y escribir para esta variable una ecuación cinética,

$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda(n \rightarrow p)X_n + \lambda(p \rightarrow n)(1 - X_n), \quad (4.6)$$

donde $\lambda(n \rightarrow p)$ y $\lambda(p \rightarrow n)$ son las tasas totales de transición de los procesos que transforman neutrones en protones y viceversa. Estas tasas son calculadas dentro de la teoría de Fermi de interacciones débiles [10]. Notemos que la condición inicial de (4.6) está fija: para $kT \gg Q$, (*i.e.* $t \rightarrow 0$), $X_n(T) \rightarrow 1/2$. Esto es independiente del modelo cosmológico particular elegido para describir el universo temprano, siempre y cuando exista en él un estado inicial denso de alta

temperatura. De hecho, ahora podemos plantear en términos cualitativos cuál es el problema a resolver, se debe llevar a cabo una integración numérica de las ecuaciones de cinética nuclear

$$\frac{dY_i}{dt} = \pm \sum \lambda_j Y_j \pm \sum \beta_{jk} Y_j Y_k, \quad (4.7)$$

donde $Y_j = n_i/(n_n + n_p)$ es la fracción del i -ésimo nucleido, y la suma incluye todos los procesos que llevan a la formación de cada núcleo (signo +) y a la destrucción de los mismos (signo -) siendo λ_j y β_{jk} las respectivas tasas de reacción [169]. Las primeras de tales integraciones fueron llevadas a cabo por Peebles [170] y por Wagoner et al. [171, 172]. Por una revisión véase [173, 174, 175]. Sin entrar en los considerandos de estas integraciones es aún posible extraer un poco más la física de la situación.

Consideremos las ecuaciones de Einstein. En la época que nos ocupa, el término de curvatura es despreciable por razones anteriormente expuestas. En una métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker se obtiene, para la ecuación tipo tiempo,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (4.8)$$

donde como es usual, a es el factor de escala, G es la constante de gravitación y ρ la densidad de energía. Esta densidad de energía está dominada por partículas sin masa,

$$\rho = N \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (4.9)$$

con N , el número efectivo de grados de libertad. Los grados de libertad están dados por las posibles orientaciones del spin o la helicidad de las partículas relativistas: 2 para fotones + $2 \times 2 \times 7/8$ para electrones y positrones⁴ + $2 \times 7/8 \times$ el número de tipos de neutrinos, N_ν . La suma total es $5.5 + 1.75 N_\nu$. A un tiempo t_f , equivalentemente una temperatura T_f , la tasa de expansión $H = \dot{a}/a$ excede la tasa Γ a la cual ocurren las reacciones (4.1–4.3) que mantienen el equilibrio químico entre leptones y bariones. En este tiempo, la razón neutrón-protón se *congela*,

$$X(T \simeq 0) = X_{eq}(T_f), \quad (4.11)$$

y es modificada sólo por el decaimiento del neutrón, dado por (4.3). La tasa de reacción Γ es básicamente igual a,

$$\Gamma(T) = n_\nu(T) \langle \sigma v \rangle_T, \quad (4.12)$$

donde $n_\nu(T)$ es la densidad numérica de neutrinos electrónicos y $\langle \sigma v \rangle_T$ es un promedio de la sección eficaz de reacción multiplicada por la velocidad relativa de los interactuantes. Ya que $n_\nu(T) \propto T^3$ y $\sigma \propto G_F^2 T^2$, con G_F la constante de Fermi y $v \simeq c = 1$, obtenemos:

$$\Gamma \simeq G_F^2 T^5. \quad (4.13)$$

El tiempo de congelamiento estará dado por la igualdad,

⁴El factor 7/8 aparece porque los electrones y positrones son fermiones y surge directamente de las integrales de energía. Esto es,

$$\int_0^\infty \frac{p^3}{e^{p/kT} + 1} dp = \frac{7}{8} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{p/kT} - 1} dp. \quad (4.10)$$

Luego, si la densidad de energía es $\rho_{bos} \propto aT^4$ para bosones, será $\rho_{fer} \propto (7/8)aT^4$ para fermiones.

$$\Gamma \simeq \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_f}, \quad (4.14)$$

que, utilizando (4.8), conduce a

$$T_f^3 \simeq \frac{N^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}}{G_F^2}. \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta que $G_F \simeq 1 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$, se obtiene $T_f^3 \simeq N^{\frac{1}{6}} \times 1 \text{MeV}$. A temperaturas del orden de T_f se encuentra la esencia del proceso de nucleosíntesis. Esta es la competencia cualitativa entre la tasa de expansión del universo y la tasa a la cual ocurren las interacciones débiles. A $T = T_f$, el D, T, ${}^3\text{He}$ y ${}^4\text{He}$ son mantenidos en equilibrio por reacciones como:



Cuando la temperatura es suficientemente baja comparada con la energía de ligadura del deuterio ($\epsilon_{\text{D}} = 2.23 \text{MeV}$) estas reacciones ocurren principalmente hacia la derecha (es decir, los fotones ya no pueden disociar al D). Luego, debido a la alta energía de ligadura del ${}^4\text{He}$ ($\epsilon_{{}^4\text{He}} = 28.3 \text{MeV}$), a la no existencia de núcleos estables con número atómico 5 y 8 y al aumento de las barreras coulombianas, casi todos los neutrones originales presentes en la temperatura de congelamiento son convertidos en ${}^4\text{He}$. La razón entre núcleos de ${}^4\text{He}$ y el número total de bariones es entonces:

$$X_4 \simeq \frac{1}{2} X_n(T \simeq 0), \quad (4.19)$$

o, equivalentemente, la fracción de masa del ${}^4\text{He}$ puede ser estimada como

$$Y_p = \frac{m_{{}^4\text{He}}}{m_{\text{total}}} = 4 \frac{n_{{}^4\text{He}}}{n_{\text{total}}} \simeq 4 \frac{1}{2} X_n(T \simeq 0). \quad (4.20)$$

En conclusión, el valor de X_n en el tiempo de congelamiento fija la cantidad de ${}^4\text{He}$ producido. Notemos, sin embargo, que la fórmula anterior es una aproximación y que sólo una integración numérica del problema podrá dar mayor certidumbre. El hecho que las reacciones (4.16–4.18) sean de dos cuerpos puede entenderse en la baja probabilidad de que se produzcan reacciones de más cuerpos, debido a la baja densidad bariónica. El primer paso, ecuación (4.16), se conoce como *cuello de botella del D*: como la energía de ligadura del D es baja, muchos fotones serán capaces de disociarlo y los pasos siguientes sólo podrán continuar a medida que el universo se enfríe. El número de fotones capaces de disociar al D varía como:

$$\left(\frac{n_\gamma}{n_N} \right)_{\text{D}} = \frac{1}{\eta} \exp \left[-\frac{\epsilon_{\text{D}}}{kT} \right], \quad (4.21)$$

donde η es la razón actual de bariones a fotones. La temperatura a la cual el D es suficientemente abundante como para que los pasos (4.17,4.18) y sus intermedios:





prosigan, dependerá del valor de η . A través de η , la densidad de materia entra en el juego. Debido a que la temperatura de la radiación cósmica de fondo se conoce en forma muy precisa ($T = 2.7277\text{K} \pm 0.002\text{K}$), η y la densidad bariónica están directamente relacionados,

$$\rho_b = 6.84 \times 10^{-22} \eta \text{ g cm}^{-3}, \quad (4.26)$$

o, equivalentemente,

$$\Omega_b h^2 = 3.64 \times 10^7 \eta. \quad (4.27)$$

4.2.1 Nucleosíntesis como test del universo

Como se comentó en la introducción, el cálculo básico de nucleosíntesis es la simulación de una cadena de reacciones nucleares en una caja en expansión. Las predicciones actuales del modelo standard se muestran en el panel izquierdo de la Fig. 4.1. Esencialmente, las predicciones de nucleosíntesis son robustas porque toda la información microfísica están bien entendida. Las energías relevantes (0.1 a 1MeV) pueden ser exploradas en el laboratorio y las incertidumbres experimentales tienen en general mínimo impacto [176]. Actualmente, se está por determinar la densidad bariónica a través de medidas precisas de la abundancia de D primordial. Cuando esto ocurra, el estudio de la nucleosíntesis primordial entrará en una *era de precisión*, con profundas implicancias para el conocimiento del universo [176]. Sin embargo, los problemas que surgen en la determinación de las abundancias primordiales son varios y complicados, siendo el más fundamental, que sólo es posible medir abundancias actuales en sitios astrofísicos selectos y luego, a partir de estos datos, inferir lo que sucedió en el universo primitivo [103, 125]. No es nuestro interés hacer aquí una revisión de la forma en que estas observaciones son hechas –ver para mayores detalles las referencias [175, 177, 178]– sino solamente estudiar las consecuencias a que estas observaciones conducen.

El primer gran logro del modelo standard de nucleosíntesis fue la predicción, luego apoyada por evidencia experimental, de que debería haber en el universo grandes cantidades de ${}^4\text{He}$ ($\simeq 25\%$), aún más que lo que pueden *fabricar* las estrellas. Luego, se comenzó a utilizar la abundancia de D como una medida de la densidad bariónica del universo. La producción de D como función de la densidad bariónica tiene una rápida caída ($\propto \rho_b^{-1.7}$) lo que permitió excluir tempranamente modelos de universos cerrados solo por bariones. La idea es que no existe ningún proceso astrofísico realista capaz de producir grandes cantidades de D -debido a la baja energía de ligadura, éste es rápidamente disociado-. Luego, la abundancia actual de D es un límite inferior a la producción primordial. También se utilizó el ${}^3\text{He}$, que a diferencia del D, si puede ser producido en las estrellas, por ejemplo en estrellas de baja masa durante su etapa de secuencia principal. La suma de las abundancias $\text{D} + {}^3\text{He}$ debería entonces ser constante o aumentar en los últimos Gyr's por lo que medidas actuales de esta suma limitan la producción primordial, lo que a su vez acota inferiormente la densidad bariónica.⁵ Las abundancias de

⁵Esto es un poco más complejo ya que también hay estrellas que destruyen ${}^3\text{He}$. Sin embargo, éstas resultan ser masivas y también producen metales. Luego, la metalicidad de la galaxia provee una cota superior al monto de decrecimiento de $\text{D} + {}^3\text{He}$ y el razonamiento anterior es aplicable [179].

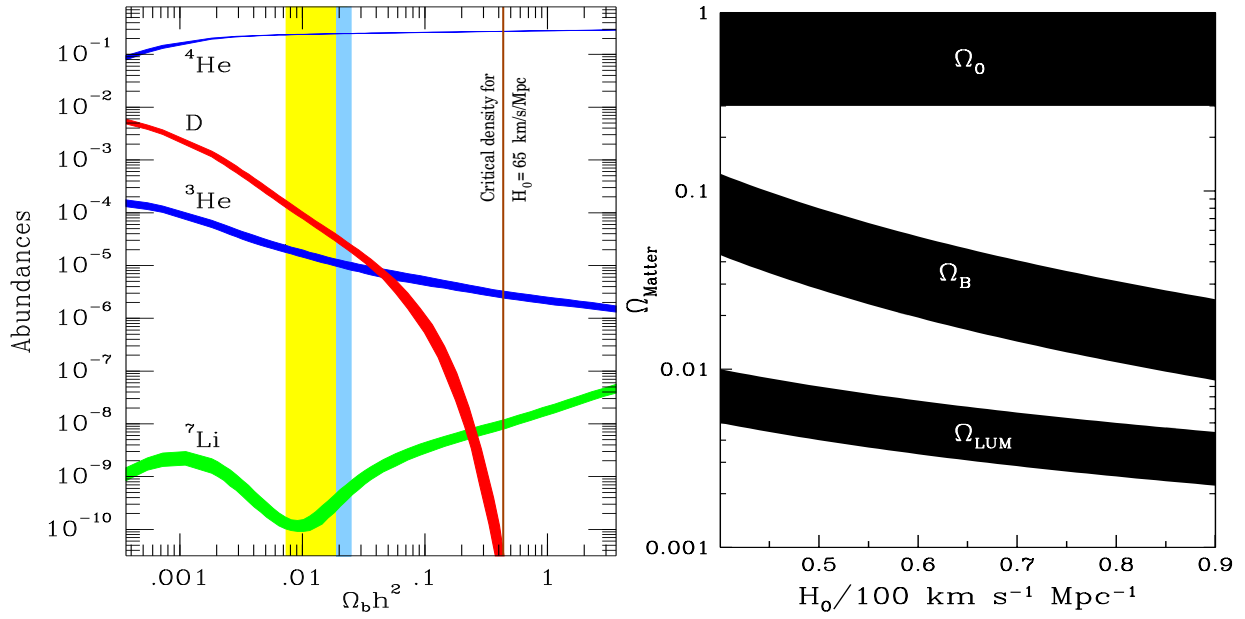


Figure 4.1: A la izquierda, predicciones de abundancias primordiales de los elementos livianos (${}^4\text{He}$ está dado por su fracción de masa, el resto por sus valores relativos al hidrógeno). El ancho de las curvas indican incertidumbres teóricas. La banda vertical indica el intervalo en el que las abundancias medidas están de acuerdo con la predicción teórica y la línea vertical mas oscura, la última determinación de la abundancia de D. A la derecha, problemas concernientes a la cantidad de materia oscura: la mayor parte de la materia es no bariónica y la mayor parte de la materia bariónica es oscura.

D, ${}^3\text{He}$ y ${}^4\text{He}$ conducen a predecir que la abundancia de ${}^7\text{Li}$ debería estar cerca de su mínimo, ${}^7\text{Li}/\text{H} \simeq 10^{-10}$. Finalmente, se llegó a la conclusión que las abundancias de los elementos producidos en el Big Bang son consistentes con las predicciones siempre que la fracción de densidad crítica provista por los bariones esté en el intervalo,

$$0.007 < \Omega_b h^2 < 0.024 \quad (4.28)$$

y el número de especies de neutrinos sea inferior a 3.7 [180].⁶ El resultado anterior es la evidencia más fuerte a favor de la existencia de materia oscura no bariónica. Analicemos esto con más detalle.

Como hicieron Schramm y Turner en [176], consideremos que la abundancia de D es igual a $\text{D}/\text{H} = (3.2 \pm 0.6) \times 10^{-5}$. Esto conduce, a través de la Fig. 4.1, a $\Omega_b = (0.02 \pm 0.004)h^{-2}$ que es consistente con la densidad de bariones en gas a redshifts entre 2 y 4 (acotado por la medida de la absorción Ly- α de nubes de hidrógeno [182]).⁷ Asimismo, la mayor parte de los bariones en clusters de galaxias existen en la forma de gas caliente con emisión de rayos X y es posible determinar la fracción bariónica del cluster, $f_b = \Omega_b/\Omega_M$, donde Ω_M es la densidad de materia [183]. Finalmente, también es concordante con la altura del pico Doppler en el

⁶Recordemos que la constante de Hubble $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ entra en el problema debido a la definición de la densidad crítica $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1.88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Medidas recientes parecen converger hacia $h = 0.65 \pm 0.1$ [181].

⁷Una nube Ly- α es básicamente hidrógeno que es visible por absorción de la luz en la serie Lyman, en longitudes de onda mayores que 1216 Å.

espectro de radiación de fondo cósmica [184]. En consecuencia, este resultado plantea dos grandes problemas concernientes a la posible materia oscura del universo. Medidas dinámicas de la densidad de materia en clusters -basado en determinaciones de masa galaxia-clusters, velocidades peculiares y frecuencia del fenómeno de *gravitational lensing*- indican que Ω_M es al menos 0.3 [185]. El primer problema aparece entonces: *en el caso en que $\Omega_M \leq 1$ la mayor parte de la materia es no bariónica*. Pero asimismo, ya que toda la materia luminosa contribuye en menos del 1% a la densidad crítica ($\Omega_{lum} \simeq 0.003h^{-1}$), *la mayor parte de la materia bariónica es oscura*. Estos problemas está gráficamente representados en el panel derecho de la Fig. 4.1.

Para terminar, se nalemos que la física de partículas también se ha visto beneficiada con cotas provenientes de estudios de nucleosíntesis primordial. Steigman et al. [186] notaron hace ya dos décadas que un límite observacional superior sobre la abundancia de ${}^4\text{He}$ podría usarse para derivar un límite superior a las familias de neutrinos.

En conclusión, la nucleosíntesis primordial es probablemente la herramienta más poderosa para testear una teoría a nivel cosmológico, ya que provee información precisa y experimentalmente confirmada de la situación del universo a pocos segundos luego del Bang. Toda teoría alternativa de gravitación o de estadística debe ser entonces filtrada por sus predicciones de formación de nucleidos.

4.3 Nucleosíntesis y teorías escalares tensoriales

4.3.1 Formalismo general

En esta sección calcularemos como influye en la abundancia primordial de ${}^4\text{He}$, Y_p , las modificaciones que provienen del cambio de teoría de gravitación. A partir de las ecuaciones de campo de una teoría escalar tensorial genérica en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, es fácil ver, como ya hemos se nalado, que durante la era de radiación $\phi = \text{constante}$ es solución para todo $\omega(\phi)$. Claramente, esta es una solución particular y no es única [71], pero será suficiente a los efectos de este capítulo. Notemos sin embargo que el valor de la constante de gravitación que la teoría muestra durante la era de radiación no será el mismo que el actual, debido a que ha sufrido cambios a lo largo de la más reciente era de materia. Entonces, una variación δG en la constante de Newton se verá reflejado en una variación δY_p en la producción de ${}^4\text{He}$. Hemos visto que Y_p depende sólo de la razón entre las abundancias de neutrones y protones, X , y está dado por la expresión,

$$Y_p = \left(\frac{2X}{1+X} \right)_{t_N} = \lambda \left(\frac{2X}{1+X} \right)_{t_f}, \quad (4.29)$$

donde t_N es el tiempo de nucleosíntesis, t_f es el tiempo de congelamiento de las interacciones débiles y λ representa el decaimiento radioactivo entre t_f y t_N . A $t = t_f$ (temperatura T_f),

$$\lambda = \exp \left[\frac{-(t_N - t_f)}{\tau_n} \right], \quad (4.30)$$

donde τ_n es la vida media del neutrón. A $t = t_f$, el valor de X está dado por el factor de Boltzmann,

$$X(T_f) = \exp \left[\frac{-(m_n - m_p)}{kT_f} \right]. \quad (4.31)$$

Es posible calcular entonces la variación en Y_p producida por una variación de primer orden en T_f , t_f y t_N . El resultado es [151]:

$$\delta Y_p = Y_p \left(1 - \frac{Y_p}{2\lambda}\right) \ln \left(\frac{2\lambda}{Y_p} - 1\right) \frac{\delta T_f}{T_f} + Y_p \frac{\delta t_f - \delta t_N}{\tau_N}. \quad (4.32)$$

Si volvemos a la expresión de T_f , ecuación (4.15), vemos que δT_f puede relacionarse con la variación δG –considerando que el número de especies no varía–, en la forma

$$\frac{\delta T_f}{T_f} = \frac{1}{6} \frac{\delta G}{G}. \quad (4.33)$$

En la era de radiación, tiempo y temperatura están relacionados por la expresión usual:

$$T = 0.55(NG)^{1/4} t^{-1/2}, \quad (4.34)$$

obtenido a través de la utilización de (4.9) en la primer componente de las ecuaciones de campo. Notemos que por lo dicho al comienzo de esta sección, esta misma relación es válida para cualquier teoría escalar tensorial, excepto por un distinto valor de G . Entonces, δt estará dado por,

$$\delta t = -t \left(\frac{1}{2} \frac{\delta G}{G} + 2 \frac{\delta T}{T} \right). \quad (4.35)$$

Ahora tengamos en cuenta que δT_f está relacionado por (4.33) con δG y que $\delta T_N = 0$. Esto último está justificado en el hecho que la temperatura de nucleosíntesis está bien definida por el estado ligado del D ($2.22\text{MeV} \simeq 10^{-9}\text{K}$) y es independiente de la teoría de gravitación que se utilice. Reescribiendo (4.32) utilizando lo anterior se obtiene,

$$\delta Y_p = Y_p \left[\left(1 - \frac{Y_p}{2\lambda}\right) \ln \left(\frac{2\lambda}{Y_p} - 1\right) + \frac{3t_N - 5t_f}{\tau_n} \right] \frac{1}{6} \frac{\delta G}{G}. \quad (4.36)$$

Esta ecuación otorga la influencia total de la variación de G sobre la producción de ${}^4\text{He}$.

4.3.2 Teoría de Brans-Dicke

Consideremos a manera de ejemplo el caso de Brans-Dicke. En la era de materia, el factor de escala y el escalar se comportan como:

$$a(t) \simeq t^{\frac{2\omega+2}{3\omega+4}}, \quad \phi(t) \simeq t^{\frac{2}{3\omega+4}}. \quad (4.37)$$

En la era de radiación,

$$a(t) \simeq t^{\frac{1}{2}}, \quad \phi(t) \simeq \text{constante}. \quad (4.38)$$

Es posible calcular, entonces,

$$\frac{\delta G}{G} = \frac{G_{rad} - G_o}{G_o} = \frac{G_{rad}}{G_o} - 1, \quad (4.39)$$

para finalmente obtener,

$$\frac{G_{rad}}{G_o} = \left(\frac{t_0}{t_{eq}} \right)^{\frac{2}{3\omega+4}}. \quad (4.40)$$

Los subíndices 0 indican valores actuales y eq valores correspondientes al tiempo de equivalencia. Estimando los valores de los tiempos involucrados a partir de la Relatividad General y teniendo

Table 4.1: Valores mínimos del exponente α que son compatibles con la abundancia observada de ${}^4\text{He}$ primordial

$\Omega_0 h^2$	α_{min}	δY_p
0.008	1.7	0.010
0.25	3.2	0.010
1	4.0	0.010

en cuenta su dependencia en Ω_0 y h^2 , es posible fijar cotas a la variación de ω . Para hacer esto tomamos el valor observacional, conservativo, de Y_p [175]

$$Y_p^{obs} = 0.23 \pm 0.01, \quad (4.41)$$

y exigimos que δY_p sea menor que el error observacional. Considerando un ajuste numérico de Y_p , como el dado en la Ref. [187],

$$Y_p = 0.228 + 0.010 \ln(\eta_{10}) + 0.012 (N_\nu - 3) + 0.185 \left(\frac{\tau_n - 889.8}{889.8} \right), \quad (4.42)$$

es posible ver la dependencia de Y_p con $\eta_{10} = \eta \times 10^{-10}$ y τ_N . Tomando en cuenta que $\tau_N = 889.8 \pm 4\text{s}$ [188, 189], y $N = 3$ [190] se pueden asimismo fijar cotas a ω en función de η . Por detalles adicionales, véase [151, 152].

4.3.3 Teorías escalares tensoriales: acoplamientos potenciales

Apliquemos ahora el formalismo descrito a teorías más generales, en las cuales el acoplamiento tiene una forma potencial,

$$2\omega(\phi) + 3 = \frac{4}{3}\alpha \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0 \text{ constante.} \quad (4.43)$$

En la era de materia, las soluciones en una métrica de Friedmann-Robertson-Walker son,

$$a(t) \propto (\ln(t))^{(\alpha-1)/(3\alpha)} t^{2/3}, \quad \phi(t) \propto (\ln(t))^{1/\alpha}. \quad (4.44)$$

Mientras que, como antes, en la era de radiación las soluciones son aquellas de la Relatividad General pero con una constante de gravitación diferente [72]. Calculando para esta teoría el valor de $\delta G/G$, mediante la utilización de $\phi(t)$ y estimando los valores de los tiempos, es posible obtener δY_p como función de α . La Fig. 4.2 muestra la variación de Y_p con α para distintos valores de $\Omega_0 h^2$. Nos interesa en particular, determinar para que valores de α se obtienen variaciones en la abundancia de ${}^4\text{He}$ menor que el error observacional de Y_p . Estos valores están expresados en la Tabla 4.1 para distintos valores de $\Omega_0 h^2$ y resultan ser valores mínimos, de forma que $\forall \alpha$, $\alpha > \alpha_{min}$ se obtiene un valor de δY_p menor que el error observacional. Recordemos que la dependencia en $\Omega_0 h^2$ aparece por haber tomado los valores numéricos de t_{eq} y t_0 a partir de la Relatividad General [125],

$$t_0 = 2.0 \times 10^{17} \Omega^{-1/2} h^{-1} \text{s}, \quad t_{eq} = 4.7 \times 10^{10} (\Omega h^{-2})^{-2} \text{s}. \quad (4.45)$$

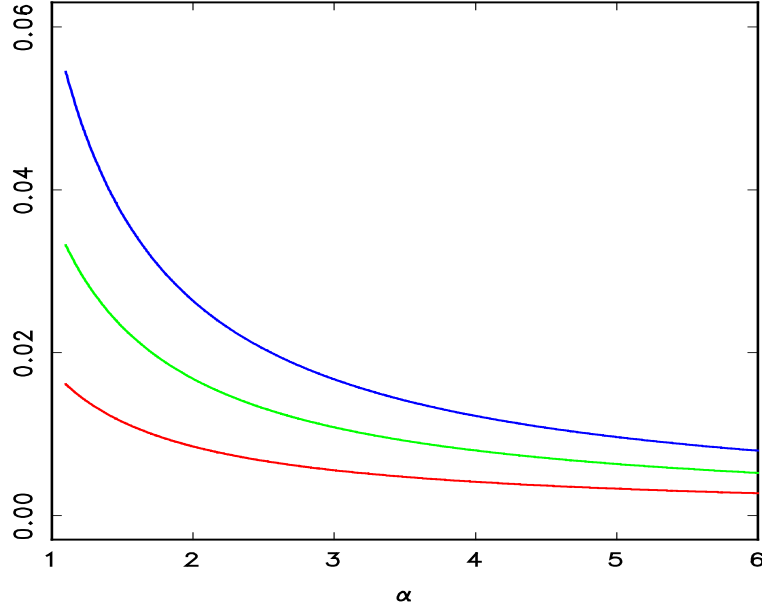


Figure 4.2: Variación en la predicción de ${}^4\text{He}$ primordial como función del exponente de la ley de potencias del acoplamiento de la teoría escalar tensorial. Se muestran distintas curvas para distintos valores de $\Omega_0 h^2$: de arriba a abajo, $\Omega_0 h^2 = 1, 0.25$ y 0.008 .

Algunos argumentos fueron presentados en el sentido de reducir el error observacional en Y_p de 0.01 a 0.008 [190]. Esto implicaría que los valores mínimos para los cuales la abundancia predicha está de acuerdo con la observada aumentarían dramáticamente. En la Tabla 4.2 se muestra el comportamiento característico de δY_p producido por teorías con acoplamientos potenciales.⁸

Una parametrización útil de la variación de la *constante de gravitación* está dada por la razón entre las constantes de Hubble de la teoría escalar tensorial y la de la Relatividad General. Con este parámetro, llamado ζ , se ha realizado un ajuste numérico [173, 187] que otorga una cota inferior a η_{10} ,

$$\ln \eta_{10} \geq \ln 2.60 + 0.085 (N_\nu - 3) + 3.7 \log \zeta. \quad (4.48)$$

El parámetro ζ está relacionado por su propia definición con la variación de la constante gravitacional y el uso de las ecuaciones de Einstein, válidas en la era de radiación [152]. Si se conoce ζ para una teoría particular, entonces puede obtenerse una cota para η_{10} . Para $\alpha = 4$ y $\Omega_0 h^2 = 0.25$ se obtiene

$$\eta_{10} \geq 2.82, \quad (4.49)$$

⁸Notar que se ha preferido no cambiar los números obtenidos en el trabajo [167] debido a los cambios no dramáticos en los valores experimentales de los parámetros. Por ejemplo, la vida media del neutrón ha sido recientemente medida, $\tau = (887 \pm 2)\text{s}$ y el valor observacional de Y_p puede acotarse en forma conservativa de la siguiente forma [176],

$$\text{cota inferior} \rightarrow Y_p = 0.220_{-0.012}^{+0.006}, \quad (4.46)$$

$$\text{cota superior} \rightarrow Y_p = 0.253_{-0.005}^{+0.015}. \quad (4.47)$$

Consecuentemente, estos datos cambian levemente los valores de α_{min} .

Table 4.2: Comportamiento característico de δY_p producido por distintos valores del exponente de la ley de potencias.

α	$\Omega_o h^2$	δY_p
1	0.25	0.037
1	1	0.048
0.33	0.25	0.173
0.33	1	0.252
3	0.25	0.010
3	1	0.013

lo que concuerda con los cálculos realizados para la teoría de Brans-Dicke.

Es importante señalar que los tests débiles de gravitación no imponen ninguna cota sobre α . Estas teorías potenciales producen correcciones de orden,

$$\frac{d\omega}{d\phi}\omega^{-3} \simeq \phi^{-1-2\alpha}, \quad (4.50)$$

las cuales tienden a cero como $(\ln t)^{(-1+2\alpha)/\alpha}$, cuando $t \rightarrow \infty$. Además, debido a la definición (4.43) y las soluciones cosmológicas correspondientes, $\omega \rightarrow \infty$ en forma logarítmica cuando $t \rightarrow \infty$. Esto asegura que los tests en el límite post-newtoniano están de acuerdo con las observaciones para cualquier valor de α .

4.4 Nucleosíntesis y dimensiones extras

La hipótesis de que la interacción gravitacional ha cambiado a lo largo de la historia del universo, esto es, que el parámetro G o las masas de las partículas dependen del tiempo, puede también analizarse en el marco de una cosmología 5-dimensional propuesta por Wesson [191]. La formulación de teorías de campo unificadas, basadas en un espacio 5-dimensional se remonta a las ideas de Kaluza [15] y Klein [16]. Las teorías de Kaluza-Klein son básicamente idénticas a la Relatividad General, pero en mayor número de dimensiones; éstas últimas, compactificadas y por lo tanto no observables. Sin embargo, la teoría propuesta originalmente por Wesson no tiene este enfoque y no se le exige a la dimensión extra que esté compactificada. Por supuesto, luego aparece el problema de explicar por qué la vida cotidiana se produce en un espacio-tiempo cuatro dimensional en vez de uno de cinco dimensiones, y si éste finalmente existe por qué no lo hemos notado aún. La física experimental ha restringido la escala de las dimensiones extras a órdenes atómicos [192], pero en el caso de una teoría no compactificada estos tests no se aplican debido a que la dimensión extra no necesariamente es una *longitud*, como estos experimentos asumen. La idea es continuar con el ejemplo del espacio-tiempo de Minkowski –en donde el tiempo tiene dimensiones de longitud por medio de la acción de una constante, c – e imaginar coordenadas de otros tipos. La teoría –originalmente al menos– puede basarse en el siguiente posulado:

- La masa es elevada a la condición de coordenada extra por medio de análisis dimensional [193, 194, 195]: $x^5 = GM/c^2$.

Además, se espera que las soluciones cosmológicas sean tales que para pequeños intervalos de tiempo la variación de las masas sea despreciable, de forma que se recupere la Relatividad

General. Wesson y sus colaboradores han planteado recientemente una serie de razones para considerar a la masa como una dimensión adicional [196]:

1. Toda la mecánica depende de unidades de longitud, tiempo y masa. Luego, si las dos primeras deben tratarse como coordenadas, quizás también la última.
2. Métricas que no dependen de x^5 podrían asociarse con ecuaciones de estado para fotones, mientras que métricas que sí lo hacen, con ecuaciones de estado de partículas masivas. En este sentido, la materia cuatro dimensional es una representación de la geometría en un espacio-tiempo mayor. Es decir, la materia en cuatro dimensiones tiene una interpretación geométrica [197, 198, 199].
3. Al elevar G al mismo status que c , los factores de conversión son $1/c$ y G/c^2 y esto podría ayudar a entender –según Wesson y sus colaboradores– porque los efectos del cambio en las masas no ha sido observados. G/c^2 es muchos órdenes de magnitud menor que $1/c$, y éste último fue suficientemente pequeño como para hacer que los efectos relativistas no hayan sido notados hasta la segunda mitad de este siglo.

Una consecuencia de la relación entre la masa de las partículas y una coordenada es que la masa de un cuerpo dado varía de punto a punto en el espacio-tiempo, en acuerdo con las ideas de Mach [4, 200]. Esta es una predicción fuertemente testeable, especialmente cuando intervalos de tiempo cosmológicos son considerados [191, 201]. Finalmente, otra característica notoria de la relación entre las cosmologías 5-dimensionales con la usual es que toda cosmología en cuatro dimensiones puede, por medio de un *embedding*, escribirse en una métrica de 5-dimensiones que resulta ser plana y equivalente al espacio Minkovskiano [196]. Debido a que en esta interpretación la materia es geométrica en origen, en la teoría completa –donde cambios en la quinta coordenada son posibles– las propiedades de la materia como su densidad y presión pueden depender de la elección de coordenadas. Y más aún, la existencia de una singularidad inicial puede ser un artefacto producido por una dada elección de coordenadas en un métrica parcial [199].

No es nuestra intención en esta sección hacer un detallado estudio de la cosmología 5-dimensional, esto puede verse en el artículo [202]. Asimismo, se han presentado muchas y variadas mejoras respecto de estas primeras y, por cierto, poco creíbles ideas [203]. Se han citado estas aquí solo con la intención de dar un marco conceptual para la aplicación del formalismo de obtención de cotas utilizando nucleosíntesis primordial.

Si las ideas de Wesson tienen o no asidero sólo podrá ser determinado por comparación con las observaciones, en ambos tipos de tests. Hacia esta dirección nos encaminamos en lo que sigue. En las próximas secciones, desarrollaremos primero un cálculo sencillo acerca de cual es la máxima variación posible de las masas en reposo de las partículas fundamentales que previene de predecir abundancias de ${}^4\text{He}$ en desacuerdo con la observación. Este resultado será independiente de la teoría. Luego de esto, utilizaremos el valor obtenido para testear la teoría de Wesson, en su versión original; esto es, en la que la métrica es independiente de la quinta coordenada a lo largo de toda la evolución cósmica.

4.4.1 Formalismo general

Consideremos entonces que ha ocurrido una variación de las masas de las partículas entre la época de nucleosíntesis y la actual. Lo que haremos será generalizar el método expuesto en secciones anteriores para obtener la expresión total de la variación en la producción de ${}^4\text{He}$ que se produce como respuesta a una variación en $\Delta Q = \delta(m_n - m_p)$. Esta es:

$$\delta Y_p = Y_p \ln \left(\frac{2\lambda}{Y_p} - 1 \right) \left[-1 + \frac{Y_p}{2\lambda} \right] \frac{\delta(\Delta Q)}{\Delta Q}. \quad (4.51)$$

Debemos también tener en consideración que una variación en la masa en reposo de las partículas afectará el valor de la vida media del neutrón. Este último hecho no está tenido en cuenta en (4.51), ya que esta ecuación representa sólo la derivada con respecto a ΔQ . Un cálculo de cómo una variación en la vida media del neutrón afecta a su vez a la cantidad de ${}^4\text{He}$ producido fue realizado, como dijimos anteriormente, y el resultado es [164, 175],

$$\delta Y_p = 0.185 \frac{\delta\tau}{\tau}. \quad (4.52)$$

Notando que la dependencia de τ con las masas es $\tau \propto G_F^{-2} \Delta Q^{-5} \propto M_W^4 \Delta Q^{-5}$, donde G_F es la constante de Fermi y M_W es la masa del mediador bosónico de las interacciones débiles, es inmediato obtener:

$$\frac{\delta\tau}{\tau} \propto -\frac{\delta\Delta Q}{\Delta Q}. \quad (4.53)$$

Entonces, cualquier teoría de masas en reposo variables producirá una abundancia primordial de ${}^4\text{He}$ dada por:

$$Y_p = Y_{p,std} + \delta Y_p, \quad (4.54)$$

donde $Y_{p,std}$ es el valor predicho por la cosmología standard. Podemos entonces encontrar un límite superior para δY_p sumando las dos desviaciones mencionadas arriba y comparando con el valor observado, Y^{obs} . Así, se obtiene

$$|\delta Y_p| \leq |Y^{obs} - Y_{std}| + \epsilon \leq \sigma, \quad (4.55)$$

donde ϵ es una estimación del error observacional y σ incluye también los errores teóricos. Tomamos como antes, $\sigma \leq 0.01$. Podría ser posible en este marco que debido a pequeños cambios en las masas de los nucleones, ocurran cambios en las secciones eficaces de reacción. Ya que la dependencia funcional de las secciones eficaces con las masas es generalmente desconocida, tomaremos en cuenta estos cambios mediante la duplicación arbitraria del error. De esta forma, obtenemos, como cota superior

$$\left| \frac{\delta(\Delta Q)}{\Delta Q_0} \right| < 10\%, \quad (4.56)$$

con $\Delta Q_0 \simeq 1.294\text{MeV}$, o equivalentemente

$$\delta(\Delta Q) \leq 0.129\text{MeV}. \quad (4.57)$$

Esto es, si una teoría que predice variación temporal de las masas de las partículas ha de estar de acuerdo con la observación, debe ser tal que admita una variación menor que la dada por (4.56) cuando se considera el tiempo transcurrido entre la nucleosíntesis primordial y el presente.⁹ Este resultado es independiente del modelo particular de variación temporal de las masas de las partículas que se utilice.

⁹En realidad, (4.56) es una amplia cota superior. El valor exacto es 1.5%.

4.4.2 Aplicaciones

Aplicaremos ahora el formalismo a una teoría específica 5-dimensional. Para esto, necesitaremos una solución cosmológica de la era de radiación para el elemento de línea:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{A^2(t)}{(1+kr^2)} dr^2 + e^{\zeta(t)} dx_5^2, \quad (4.58)$$

donde $A^2(t)$ es el factor de escala de expansión y $e^{\zeta(t)}$ debe asociarse con el factor de escala de masas.¹⁰ Consideraremos el caso $k = 0$. La generalización de las ecuaciones de Einstein para la teoría puede escribirse como,

$$G_{AB} = 8 \pi G T_{AB} \quad (4.59)$$

$$T_{AB} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p, 0) \quad (4.60)$$

con ρ (p) la densidad (presión) del fluido de radiación, y G la constante de Newton. La ecuación de estado es $p = 1/3\rho$. La condición de contorno que debe imponerse es un suave acoplamiento con la solución correspondiente a la era de materia en $t = t_{eq}$, esta solución fue hallada en un trabajo previo [204]. En el trabajo anteriormente citado, se requirió que ζ y $d\zeta/dt$ se anularen en la época actual. Con estas condiciones, las masas de las partículas elementales valen hoy su valor experimental y las variaciones en masa son despreciables en tiempos cortos. Esto es consistente con las cotas impuestas: $|\dot{m}/m|_{\text{hoy}} \leq 10^{-12} \text{ yr}^{-1}$ [51].

La solución cosmológica de radiación está dada por:

$$A^2(t) = 2 \beta t, \quad (4.61)$$

$$\zeta(t) = 2 \ln \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{t_{eq}}{\sqrt{t_0}} - \sqrt{t_0} \right] t^{-1/2} + \sqrt{\frac{t_{eq}}{t_0}} \right], \quad (4.62)$$

$$\rho(t) = \frac{1}{16 \pi G} \left\{ \frac{3}{2t^2} + \frac{3}{2t} \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{t_{eq}}{\sqrt{t_0}} - \sqrt{t_0} \right] t^{-3/2}}{-\frac{1}{2} \left[\frac{t_{eq}}{\sqrt{t_0}} - \sqrt{t_0} \right] t^{-1/2} + \sqrt{\frac{t_{eq}}{t_0}}} \right\}, \quad (4.63)$$

con β constante.¹¹

La manera en que la masa es introducida en el formalismo tiene una ambigüedad inherente debido a la adimensionalidad de la métrica. La propuesta de Ma [194],

$$m(t) = \frac{c^2}{G} \int_{x_5}^{x_5+l} \sqrt{g_{55}} dx^5, \quad (4.64)$$

o, en el caso de una métrica independiente de x_5 ,

$$m(\tau) = \frac{c^2}{G} \sqrt{g_{55}} \Delta l_0, \quad (4.65)$$

(Δl_0 es la longitud -finita- del cuerpo en la dirección x_5 [194]), no especifica el carácter tensorial de la masa, el cual está implícitamente introducido en la teoría. En otras palabras, debido sólo

¹⁰En lo que sigue, índices latinos A, B, \dots , recorren desde 0 a 4, índices griegos, desde 0 a 3 e índices latinos i, j, \dots , desde 1 a 3.

¹¹Esta solución fue previamente obtenida por Mann y Vincent [205] pero imponiendo diferentes condiciones de contorno y por Grøn [206] en forma general.

al análisis dimensional, no hay una razón concluyente para mantener la forma covariante de g_{55} bajo el signo de la raíz cuadrada y entonces, $m(t)$ puede también escribirse como

$$m(\tau) = \frac{c^2}{G} \sqrt{g^{55}} \Delta \tilde{l}_0. \quad (4.66)$$

Adoptaremos en lo que sigue, la definición más favorable para la teoría.

A partir de (4.62), podemos estimar la variación de masa. Ya que $t_0 \gg t_{eq} \gg t_{nuc}$ (t_0 es la época actual del universo) encontramos,

$$\zeta_{nuc} \approx 2 \ln \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_0}{t_{nuc}}} \approx 2 \ln(10^8) \quad (4.67)$$

Definiendo el cociente $\Delta m/m$ como

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{m(t_{nuc}) - m(t_0)}{m(t_0)} = e^{-\zeta_{nuc}/2} - 1 \simeq -1 \quad (4.68)$$

deducimos que la teoría predice:

$$\left| \frac{\delta \Delta Q}{\Delta Q_0} \right| \simeq 100\% \quad (4.69)$$

lo que está en desacuerdo con la cota anteriormente impuesta en (4.56). Usando la formulación covariante para el factor de escala de masa en (4.68) obtendríamos aún peor desacuerdo.

En el cálculo anterior, el papel preponderante es jugado por el suave acoplamiento de las soluciones de radiación y materia a $t = t_{eq}$. En un trabajo previo, Coley [207] estudió exactamente el mismo problema en una forma cualitativamente similar. Sin embargo, en aquel trabajo no se impuso la condición de continuidad. Si comparamos las soluciones, veremos que nuestra ecuación (4.63) corresponde a la ecuación (10) del trabajo de Coley para un valor de la constante C –en notación de aquel trabajo– igual a,

$$C = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{t_{eq}}{\sqrt{t_0}} - \sqrt{t_0} \right] t^{-3/2}}{\sqrt{\frac{t_{eq}}{t_0}}}. \quad (4.70)$$

Este parámetro fue dejado libre en el trabajo de Coley y pudo usarse luego para acotar la producción de ${}^4\text{He}$ a niveles observados. Sin embargo, al no realizar una suave transición entre las eras de radiación y materia, \dot{m} puede variar discontinuamente en $t = t_{eq}$. Además, \dot{m} podría no estar de acuerdo con las cotas impuestas actualmente. Por otra parte, siguiendo a Coley y fijando C como en (4.70) la teoría también es descartada a partir de su trabajo. Notemos que el caso de teorías escalares tensoriales discutido en las secciones precedentes la suave transición –continuidad– de la solución para el campo ϕ está implícitamente asumida al utilizar la era de materia (en vez de la de radiación) para obtener la cota.

Por lo expuesto, creemos que la relación simple supuesta (léase, métricas independientes de la quinta coordenada e ideas de Ma) para conectar la quinta dimensión con las masas en reposo de las partículas no resiste la comparación con la observación y debe, por lo tanto, descartarse.

4.5 Conclusiones

En el presente capítulo se han expuesto consideraciones elementales sobre los efectos que produce en la teoría standard de nucleosíntesis el reemplazo de la Relatividad General por alguna otra teoría de gravitación. Lo que se ha encontrado, siguiendo un método ya utilizado

en la teoría de Brans-Dicke [151, 152], es que existen teorías escalares tensoriales más complejas –como los acoplamientos potenciales aquí estudiados– que no solamente tienen un correcto límite débil sino que además logran hacer predicciones de nucleosíntesis en acuerdo con la observación. La importancia de estos resultados hay que buscarla en la dificultad de obtener cotas observacionales fuertes de una teoría, debido, en parte a la necesidad de realizar integraciones numéricas de las reacciones nucleares y en parte, a la carencia de soluciones comológicas analíticas que permitan resultados no numéricos como los aquí expuestos. Sólo recientemente, Barrow et al. [72] encontraron la manera de extender la búsqueda de soluciones a teorías más generales, con $\omega = \omega(\phi)$. Esas soluciones fueron utilizadas aquí por primera vez para obtener cotas sobre la teoría de gravitación a partir del análisis de la cosmología que determina. Notemos que en este caso, la función ζ es monótona y por lo tanto, la densidad bariónica tiene límites similares a los de Relatividad General.

Con respecto al análisis de la teoría de gravitación de Wesson, es necesario señalar que la versión más simple estudiada aquí ha quedado descartada por las cotas impuestas. También se han estudiado cotas con procesos que se encuentran totalmente en la era de materia con iguales resultados [204]. La extensión del presente análisis a otros modelos más complejos, con métricas dependientes de la quinta coordenada, es un posible camino a seguir en el futuro. Aunque uno puede ser escéptico al considerar estas ideas –en particular uno puede pensar que la dimensión temporal fue introducida con el objeto que el intervalo sea invariante para distintos observadores y que aún no hay un sinónimo de *intervalo* 5-dimensional– es cierto que gozan de originalidad y frescura. Una posición *científica*, abierta pero crítica, es fundamental para realizar investigaciones en estos casos.

Para terminar, quisiéramos señalar que la simpleza del método lo hace rápidamente extensible a otras situaciones. Ejemplo de esto es el estudio de cotas de nucleosíntesis a estadísticas no extensivas. Utilizando técnicas similares hemos podido acotar la no extensividad de la estadística en tiempos tan lejanos como apenas unos segundos después del Big Bang en forma muy restrictiva [208, 209]. Posteriormente, también hemos podido seguir analíticamente la evolución de la razón neutrón-barión y dar una estimación de la cantidad primordial de ${}^4\text{He}$ producido en el mismo escenario [210].

Part II
En la interfase

Chapter 5

Wormholes en el espacio tiempo

*La geometría existía antes de la creación,
es coetánea con el espíritu de Dios, es Dios mismo.*

Johannes Kepler
Mysterium Cosmographicum

5.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos posibles geometrías locales del espacio-tiempo, en particular, el concepto de wormhole y su manifestación en teorías escalares tensoriales. Como no podría ser de otro modo se hará exhaustiva mención a la geometría de Schwarzschild, que fue introducida originalmente en [211]. Empezaremos entonces revisando los conceptos básicos de la misma.

La métrica de Schwarzschild, derivada como el campo exterior a una estrella de masa M es, con unidades tales que $G = 1$,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.1)$$

La importancia de esta métrica es señalada sin ambigüedades por el teorema de Birkoff [212], que establece que (5.1) es la solución para cualquier región de espacio-tiempo vacía, esféricamente simétrica, en Relatividad General. La prueba de esta afirmación es más bien directa, y se basa en resolver las ecuaciones de campo [213]. Dada la divergencia de algunos de los componentes de la métrica, el carácter de $r = 2M$ confundió a los científicos por algún tiempo. Se llegó así a hablar de $r = 2M$ como la *singularidad* de Schwarzschild. En los primeros años del desarrollo de la Relatividad General, se pensaba que este valor de r nunca sería observado en la naturaleza. En efecto, el radio de Schwarzschild para el Sol es de 2.95km y para un protón, de radio efectivo 10^{-13} cm, de 10^{-50} cm. Estos valores de r yacen dentro mismo de los cuerpos, y allí, la métrica ya no puede considerarse como en (5.1) porque el espacio-tiempo deja de ser vacío. Sin embargo, al parecer posible encontrar objetos superdensos o aún colapsados, el carácter de $r = 2M$ necesitó mayores estudios. Fue entonces cuando Kasner [214], Lemaître [215], Einstein y Rosen [216], Synge [217], Finkelstein [218], Fronsdal [219] y finalmente Kruskal [220] y Szekeres [221] notaron que la geometría resultaba bien comportada para ese valor conflictivo de r . El invariante de curvatura resulta ser,

$$I = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (5.2)$$

y éste muestra, en cambio, la presencia de una singularidad física en $r = 0$. Además, mientras que $g_{rr} = \infty$ para $r = 2M$, esto no significa que ese valor de r está infinitamente alejado de

todas las otras regiones del espacio-tiempo, ya que la distancia propia, desde $r = 2M$ hasta un punto genérico R , dada por,

$$\int_{2M}^R |g_{rr}|^{1/2} dr, \quad (5.3)$$

es finita para todo $R < \infty$. Se deduce entonces que el comportamiento singular de la métrica en $r = 2M$ debe producirse por una mala elección de coordenadas. El significado preciso de esta mala elección es que en $r = 2M$ se revierte el signo de las coordenadas temporal y radial. En la región $r > 2M$, la dirección t , $\partial/\partial t$, es tipo tiempo ($g_{tt} < 0$) y la dirección r , $\partial/\partial r$, es tipo espacio ($g_{rr} > 0$) y viceversa para $r < 2M$. Esto implica que un observador que atravesara el *horizonte* en $r = 2M$, vería el paso del tiempo como un decrecimiento adicional de la coordenada r , lo que lo haría caer en la singularidad física, de infinita curvatura, en $r = 0$. Kruskal utilizó una coordenada radial u y un tiempo adimensional v , relacionados con las coordenadas de Schwarzschild r y t por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M) \\ v = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \end{array} \right\}, \quad r > 2M, \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \\ v = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M) \end{array} \right\}, \quad r < 2M. \quad (5.5)$$

Haciendo esta transformación, (5.1) es,

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (du^2 - dv^2) + r^2 d\Omega_2^2, \quad (5.6)$$

donde ahora, r debe pensarse como una función implícita de u y v , dada por,

$$(r/2M - 1) e^{r/2M} = u^2 - v^2. \quad (5.7)$$

En este sistema, la singularidad está localizada por la ecuación $v^2 - u^2 = 1$. Esto implica que no hay una singularidad, sino dos:

$$v = \pm (1 + u^2)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Notemos asimismo que las regiones asintóticas $r \gg 2M$, son ahora $u^2 \gg v^2$, es decir hay también dos regiones asintóticas:

$$u \gg |v|, \quad u \gg -|v|. \quad (5.9)$$

Se entiende entonces que se ha realizado una extensión analítica; las coordenadas de Schwarzschild cubren sólo una parte del espacio-tiempo. Un aspecto importante del cambio de coordenadas realizado es que respetan los conos de luz: las geodésicas nulas están dadas por $du = \pm dv$. Cualquier curva que se dirija genéricamente *hacia arriba* es tipo tiempo y cualquiera que lo haga genéricamente *hacia afuera* es tipo espacio. En la Fig. 5.1 se muestra en forma resumida los resultados se nalados, junto con un diagrama de la curvatura del espacio-tiempo cerca de una singularidad.

Aunque se acostumbra a pensar en la geometría de Schwarzschild como estática, las transformaciones $t \rightarrow t + \Delta t$ dejan invariante la métrica solo en las regiones I, el universo principal y III, el universo secundario. Al penetrar en la región $r < 2M$, a menos que se viaje con velocidades mayores que la de la luz y se pueda realizar un movimiento tipo espacio hacia el universo secundario, todo observador, destinado a moverse hacia adelante en el tiempo (dirección $+v$)

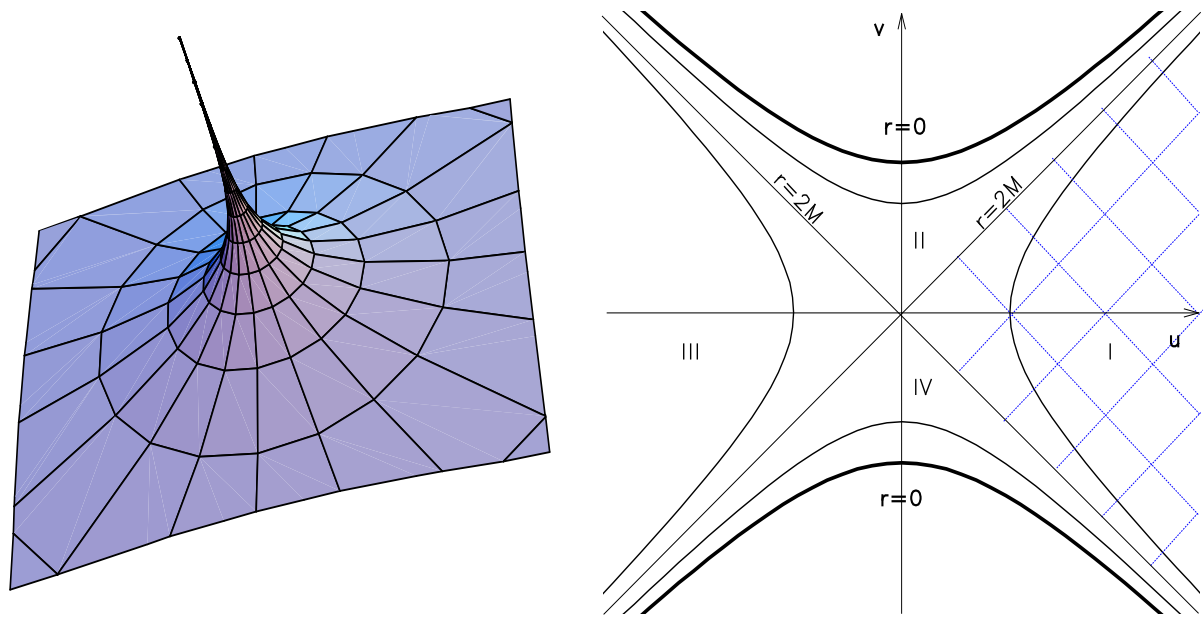


Figure 5.1: A la izquierda, topología del espacio-tiempo cerca de una singularidad. A la derecha, plano de coordenadas u y v de Kruskal. Las singularidades están señaladas con hipérbolas de línea gruesa. La región sombreada es la cubierta por las coordenadas de Schwarzschild, llamado también universo principal.

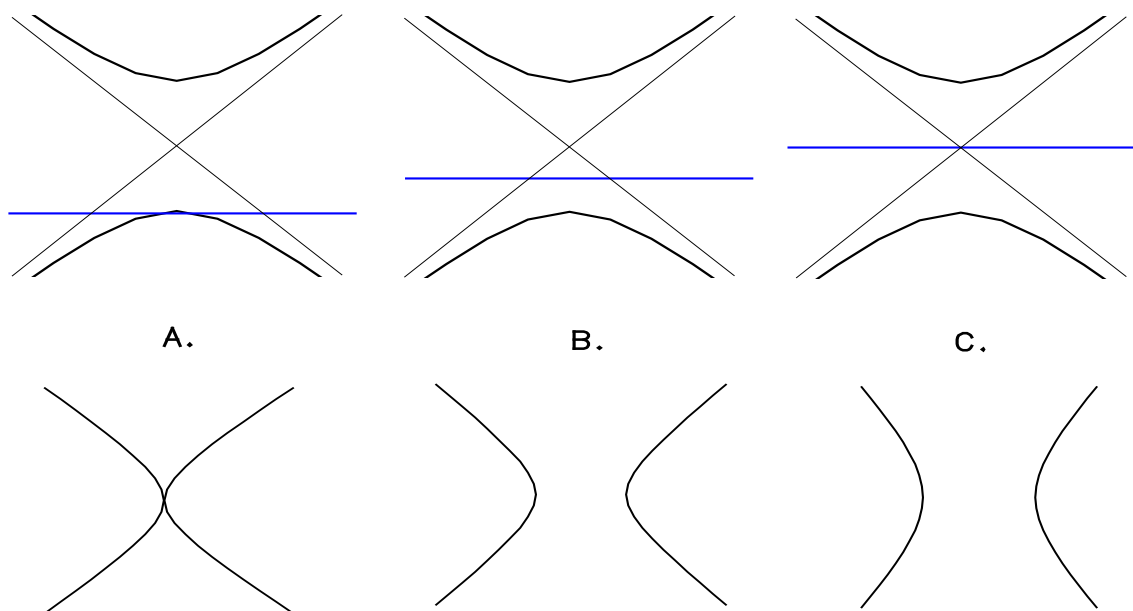


Figure 5.2: Evolución dinámica del puente de Einstein-Rosen. La línea horizontal representa un dado momento de tiempo. En A, el puente está cerrado, aislando dos singularidades. En B comienza a abrirse y en C el radio de apertura es máximo. Luego la recta horizontal corta al eje $+v$ en valores más positivos hasta que nuevamente se llega a la singularidad. Este proceso se hace tan rápidamente que ningún observador causal puede atravesar el puente.

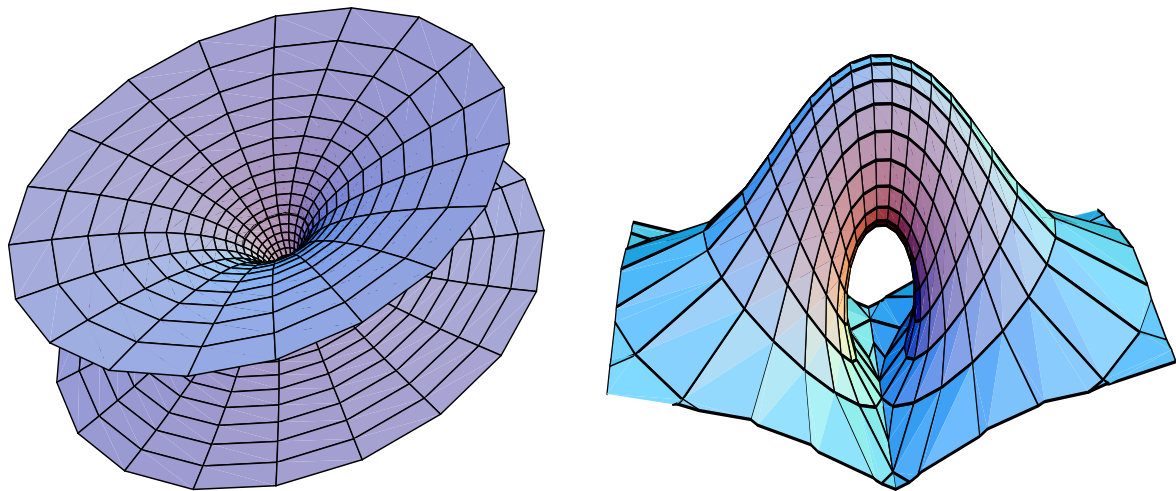


Figure 5.3: *Topología del espacio-tiempo: en la figura de la izquierda se observa un wormhole inter-universo, en el sentido de Einstein-Rosen. En la de la derecha, un wormhole intra-universo, en el sentido de Wheeler.*

caerá en la singularidad $r = 0$. En efecto, partiendo de infinita curvatura, los dos universos evolucionan en el tiempo hasta formar un puente no singular, que se agranda hasta un radio máximo $r = 2M$ y luego se contrae hasta llegar a una nueva singularidad. Esta formación, expansión y colapso del puente, llamado de Einstein-Rosen, es tan rápida que ningún observador que viaje a velocidades menores que la de la luz puede cruzarlo, véase la Fig. 5.2.

Es tiempo entonces de preguntarse si es posible obtener alguna geometría, equivalentemente, alguna distribución de materia, que de origen a estructuras de puentes que sí puedan ser atravesados. Un hecho notorio es que, dado el carácter local de las ecuaciones de Einstein, nada sabemos acerca de la topología global del puente. Luego, la garganta puede representar un pasaje a un universo alternativo, como el puente de Einstein-Rosen [216], o al mismo universo en regiones distantes, en el sentido de Wheeler [222]. Ambas estructuras son conocidas genéricamente con el nombre de *wormholes* y están representadas en la Fig. 5.3.

La posibilidad de que estas estructuras existan en la naturaleza plantea profundos interrogantes. Es importante notar que conceptos como el de causalidad podrían ser profundamente afectados en el caso que sea posible transformar un wormhole en una máquina del tiempo, es decir, en un sistema capaz de generar curvas cerradas temporales (CTCs). Aún sin entrar en los complicados detalles del análisis de las CTCs, algunos de los cuáles serán resueltos sólo cuando se disponga de una teoría cuántica de gravitación, es posible ver cómo la existencia de wormholes atravesables puede conducir a la construcción de máquinas del tiempo. La idea fundamental es la combinación de la suposición de existencia de wormholes atravesables con algunos conceptos de Relatividad Especial. Analizaremos un ejemplo de esta idea.

Consideremos que existe un wormhole atravesable en un espacio-tiempo Minkowskiano y cuya separación entre las bocas es mucho mayor que el radio de la garganta. Véase la Fig. 5.4. Las dos bocas están inicialmente en reposo en el sistema de referencia externo, y el tiempo propio del wormhole es τ . Luego, mientras que la Boca 1 permanece inercial, la Boca 2 realiza

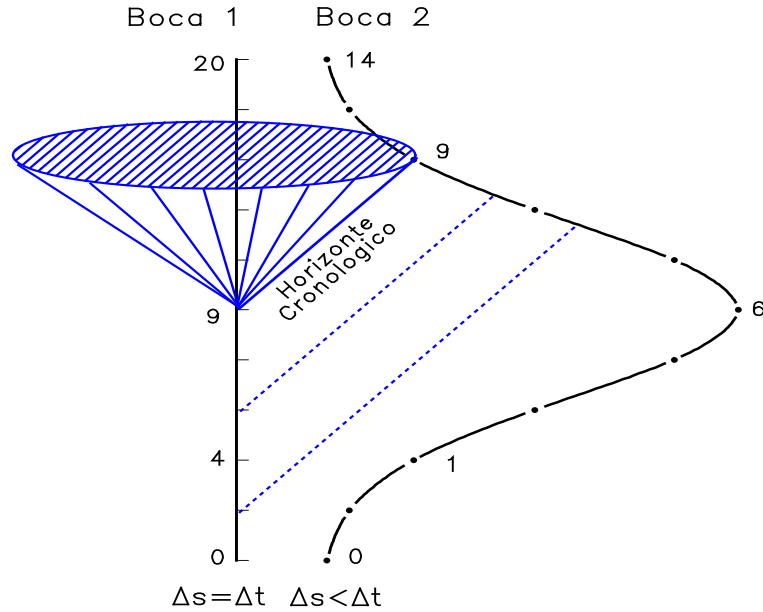


Figure 5.4: Máquina del tiempo introducida por Morris, Thorne y Yurtsever. Las líneas gruesas representan las historias de las bocas del wormhole; éste es una construcción mental que une puntos con igual tiempo propio en ambas historias. Mientras que la Boca 1 permanece inercial, la Boca 2 de este wormhole se acelera hasta alcanzar velocidades cercanas a la de la luz y luego se desacelera hasta volver a la posición original. El tiempo propio en un entorno de la boca acelerada es menor que en la que ha permanecido en reposo y luego, un viaje de la boca derecha hacia la izquierda podría violar causalidad. El horizonte cronológico es la línea tipo luz que une puntos con igual tiempo propio.

un viaje al estilo de la paradoja de los gemelos en Relatividad Especial [223]: acelera hasta velocidades cercanas a la de la luz dirigiéndose hacia el universo exterior y luego desacelera retornando a la posición original. Esta boca acelerada experimentará una dilatación del tiempo propio. Esto no es así visto desde la garganta, en [224, 225] y también en [226] se discute acerca de cómo las bocas del wormhole pueden moverse a través del espacio sin cambios significativos en la geometría interna y cómo esto indica que el tiempo propio es el mismo en las dos bocas. En la Fig. 5.4, el wormhole es entonces una construcción mental que une puntos de igual tiempo propio. Como resultado, el movimiento relativo de las bocas cambia la forma en que el tiempo se conecta a través del wormhole. Inicialmente, el espacio-tiempo es cronal, no hay CTCs. Luego del viaje el espacio-tiempo deja de ser cronal. En la Fig. 5.4 puede verse el horizonte cronológico, también llamado horizonte de Cauchy, que es el cono de luz futuro del evento con $\tau = 9$ en la boca estática. La línea tipo luz que une puntos con igual tiempo propio $\tau = 9$ es el generador del horizonte: para puntos con $\tau < 9$ todo observador viajando tipo tiempo por el espacio Minkowskiano entre las bocas y partiendo de la boca estática, llega a la Boca 2 siempre a tiempos mayores que el de partida. En cambio, para $\tau > 9$, viajando siempre tipo tiempo, se puede llegar a la Boca 2 a τ menores o iguales que el de partida, es decir, existe una CTC para todo $\tau > 9$.

Varios problemas asociados a la estabilidad del horizonte de Cauchy fueron analizados. En especial, se estudió el efecto de crecimiento de la radiación o de las fluctuaciones de vacío que podría existir si éstas atravesaran repetidas veces el túnel [225, 227, 228]. Si este tipo de efectos es suficiente para evitar que pueda construirse una máquina del tiempo deberá, al parecer, ser

respondido por una aún ausente teoría cuántica de la gravitación. Estos modelos de máquinas del tiempo, los más simples que pueden construirse utilizando wormholes pero ciertamente no los únicos [229, 230, 231], dejan abiertas ya las puertas a las paradojas. El viaje en el tiempo plantea grandes problemas que se dividen básicamente en los siguientes dos tipos:

1. Paradojas de consistencia: Un ejemplo típico de este caso es que un viajero vuelve al pasado y arbitra los medios necesarios para que en su propio futuro no pueda volver al pasado. O bien, la consistencia dramática, por ejemplo, el viajero mata a su propia madre antes de que él mismo naciera.
2. Paradojas de información: En este caso, un viajero vuelve al pasado con, por ejemplo, la versión final de esta tesis y me la entrega antes de que sea escrita. Luego, yo mismo, en el pasado, no necesito escribir la tesis, ya que poseo la versión final. Pero eso indica que alguien tuvo que haberla escrito, y si no fui yo en el pasado, quién, entonces, escribió mi tesis?

Visser [230] separa las posibles respuestas a las paradojas en cuatro clases; las enumeraremos por completitud:

1. La física debe reescribirse para dar cuenta de la posibilidad práctica de realizar viajes en el tiempo.
2. La conjetura de consistencia de Novikov [232, 233]: Los viajes en el tiempo están permitidos pero la historia del universo es única, y no es posible modificar lo que ya ha sucedido. Dicho de otra forma, las únicas leyes de la física que pueden existir localmente en el universo son aquellas que son consistentes en forma global.
3. La conjetura de protección cronológica de Hawking [234]: La existencia de wormholes está permitida pero se asume como axioma que los viajes en el tiempo no son posibles; efectos cuánticos del estilo de los comentados arriba impedirían la posibilidad real de construir una máquina del tiempo.
4. Los wormholes atravesables no existen [230, 235].

Pero aún suponiendo que se dejan de lado los problemas asociados con la posible utilización de los wormholes como máquinas del tiempo, quedan suficientes sorpresas para investigar. En las próximas secciones mostraremos, como hicieron Morris y Thorne en [236], que la materia necesaria para generar un geometría de wormhole debe violar las condiciones de energía. En particular, esto podría sugerir que cantidades macroscópicas de materia con masa negativa podría existir en el universo. Sin embargo, diferiremos hasta el próximo capítulo la búsqueda de efectos observacionales de este tipo de materia.

Sumando ambos problemas que la existencia de los wormholes debe superar, esto es, que pueden ser usados como máquinas del tiempo y que necesitan materia que viole las condiciones de energía para su construcción, es posible preguntarse por qué este tema tiene aún tanta actualidad en la comunidad científica. Probablemente, parte de esa respuesta es sociológica y para tratar de vislumbrar sus alcances haremos una nota histórica. En 1985, Carl Sagan escribió *Contacto* [237], una novela de ciencia ficción en la que una viajera atraviesa un wormhole. Los primeros manuscritos de este *viaje* no eran tan explícitos como lo fueron aquellos que integraron la versión final. En el interín, y a pedido de Sagan, Morris y Thorne habían calculado con extremo detalle cuáles deberían ser las propiedades de la materia capaz de generar tal geometría. El resultado de esos cálculos fue publicado a nos después en [236]. Ese artículo

y su continuación en [224] implicaron un gran renacimiento del tema pues ellos cambiaron la forma de hacer preguntas. *A, cómo actúan las leyes de la naturaleza?, se a nadió, qué vínculos y restricciones podrían imponer éstas a una civilización arbitrariamente avanzada?* La sociedad interpretó rápidamente este cambio conceptual y es difícil nombrar hoy una novela, serie televisiva o película de ciencia ficción que no utilice los conceptos de wormhole para viajar en el tiempo o en el espacio. Al promediar 1998, no se conoce ningún efecto observacional o teorema matemático que prohíba la existencia o la construcción de wormholes en el espacio-tiempo. Una revisión histórica-científica del surgimiento de la física de los wormholes puede encontrarse en el reciente libro de Thorne [238]. Finalmente, si Feynmann [239], entre muchos otros, tiene razón en pensar que la verdad debe estar allí donde reside la belleza conceptual, entonces quizás los wormholes tengan un lugar en el universo.

En este capítulo presentaremos soluciones clásicas de wormhole en la teoría de Brans-Dicke de gravitación. Su contenido original está dividido de la siguiente manera. Estudiaremos primero soluciones de wormholes en espacio-tiempos no vacíos que tendrán la particularidad de que la materia que se utiliza para la *construcción* de la geometría es no exótica, en el sentido que se explicita más abajo. Luego presentaremos una solución estática de vacío que, dependiendo de la elección del acoplamiento entre la métrica y el campo escalar, representará un wormhole en el espacio-tiempo de Riemann-Cartan o en el espacio Lorentziano sin torsión. Analizaremos cómo la existencia de wormholes implica la aparición de violaciones a las condiciones de energía pero ignoraremos problemas asociados con el análisis de la estabilidad de las estructuras. Estos resultados se encuentran parcialmente publicados en los trabajos [240] y [241]. Véase también [242]. Esperamos que estos estudios allanen el camino hacia la búsqueda de los posibles efectos observables que podrían causar los wormholes, algo que emprenderemos en el próximo capítulo.

5.2 Wormholes estáticos en Relatividad General

En esta sección revisaremos el trabajo de Morris y Thorne [236]. Lo haremos partiendo de las siguientes hipótesis:

- La métrica del espacio-tiempo tiene simetría esférica, es estática, y la materia que genera esta geometría no está en rotación.
- La solución debe representar dos espacio-tiempos asintóticamente planos unidos por una garganta.
- La Relatividad General es la teoría de gravitación válida.
- La solución debe estar libre de singularidades, no debe tener horizontes y las componentes de la métrica no deben cambiar de signo.¹

Otras cuatro hipótesis, que se asumen en el trabajo original de Morris y Thorne, tienen que ver con problemas de ingeniería, es decir, con la posible construcción y utilización del wormhole y no las tendremos en cuenta aquí.

¹Los horizontes son construcciones teóricas que tienen las siguientes características: 1) la luz sólo puede atravesarla en una dirección y 2) el tiempo se detiene en ellos (el intervalo de tiempo propio es cero para cualquier intervalo finito de tiempo coordenado). En este capítulo entenderemos por horizonte, el horizonte de eventos, por ejemplo el que se produce para $r = 2M$ en (5.1).

5.2.1 Forma de la métrica

La primera hipótesis, hecha con el objeto de simplificar los cálculos, implica que el intervalo tiene la forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + dr^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.10)$$

Aquí, $\Phi = \Phi(r)$ y $b = b(r)$, son dos funciones arbitrarias que luego vincularemos a las hipótesis anteriores. Como veremos luego, $b(r)$ determinará la forma espacial del wormhole; la llamaremos en consecuencia, función de forma o *shape function*. $\Phi(r)$ determinará el redshift gravitacional y será entonces la *redshift function*. Notemos que la coordenada radial r tiene un significado especial: $2\pi r$ es la longitud de una circunferencia centrada en la garganta, por lo que, como veremos, r será la coordenada radial del *embedding*. Debido a esto r es no monótona, decrece de ∞ a r_0 y luego crece desde r_0 hasta ∞ ; donde r_0 es la posición de la garganta. Es conveniente introducir la distancia radial propia como

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b(r')}{r'}}}. \quad (5.11)$$

En términos de l , la garganta está definida como el mínimo de $r(l)$. Notar que las regiones asintóticas no necesariamente deben ser simétricas, esto es, Φ y b pueden diferir en ambos universos. En este capítulo y por simplicidad, supondremos que las regiones asintóticas son intercambiables y las funciones serán iguales en ambos lados de la garganta.

5.2.2 Tensor de curvatura y de Einstein

A partir de la métrica (5.10) pueden calcularse de manera usual los símbolos de Christoffel y las componentes del tensor de Riemann. Los detalles del cálculo se simplifican en el sistema de referencia propio, que es el de un observador que permanece siempre en reposo en el sistema (5.10). En estas nuevas coordenadas, la métrica toma la forma minkowskiana, i.e. $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. La idea es hacer entonces,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu. \quad (5.12)$$

Esto genera un conjunto de cuatro ecuaciones que relacionan ambos conjuntos de coordenadas:

$$d\hat{t}^2 = e^{2\Phi} dt^2, \quad (5.13)$$

$$d\hat{r}^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (5.14)$$

$$d\hat{\theta}^2 = r^2 d\theta^2, \quad (5.15)$$

$$d\hat{\phi}^2 = r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.16)$$

Estas ecuaciones permiten transformar los tensores según

$$L_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu} L_{\alpha\beta}, \quad (5.17)$$

observando que en particular se cumple que,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (5.18)$$

Las componentes no nulas del tensor de Einstein serán entonces, en estas nuevas variables pero obviando desde ahora los sombreros,

$$G_{tt} = \frac{b'}{r^2}, \quad (5.19)$$

$$G_{rr} = -\frac{b}{r^3} + \frac{2(1 - \frac{b}{r})}{r} \Phi', \quad (5.20)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} \right]. \quad (5.21)$$

5.2.3 El tensor de energía-impulso

Ya que las ecuaciones de Einstein requieren que el tensor de energía-impulso sea proporcional al tensor de Einstein, el tensor de energía-impulso deberá tener la misma estructura algebraica que $G_{\mu\nu}$, siendo sus únicas componentes no nulas,

$$T_{tt} = \rho(r), \quad T_{rr} = -\tau(r), \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p(r). \quad (5.22)$$

Un fluido perfecto será un caso especial de (5.22) con $-\tau = p$.

5.2.4 Ecuaciones de Einstein

Finalmente arribamos a las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (5.23)$$

Para esta geometría, tienen la siguiente forma

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G r^2}, \quad (5.24)$$

$$\tau = \frac{1}{8\pi G} \left[\frac{b}{r^3} - 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \right], \quad (5.25)$$

$$p = \frac{1}{8\pi G} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + \Phi' \left(\Phi' + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{1}{2r^2} (b'r - b) \left(\Phi' + \frac{1}{r} \right) \right\}. \quad (5.26)$$

Las ecuaciones de campo (5.24,5.26) son tres ecuaciones diferenciales que relacionan cinco incógnitas: b, Φ, τ, ρ y p . La manera usual de resolver el sistema sería asumir la existencia de algún tipo particular de materia y proponer para ella un conjunto de ecuaciones de estado, por ejemplo $p = p(\rho)$ y $\tau = \tau(\rho)$. Esto iguala el número de incógnitas al de ecuaciones y permite resolver el problema. En el estudio que presentaremos en este capítulo, el método que adoptaremos será definir primero las propiedades que debe tener la métrica para que la geometría resultante sea la de un wormhole y ver luego que vínculos impone esto sobre la materia que genera esa geometría. El método quedará aclarado en las secciones siguientes.

5.2.5 Geometría espacial de wormhole: *Embeddings*

Consideremos la geometría del 3-espacio a un momento fijo t . Debido a que la geometría es esféricamente simétrica podemos confinar nuestra atención a un corte ecuatorial² $\theta = \pi/2$, donde

²En el próximo capítulo discutiremos esto con más detalle.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (5.27)$$

Es posible construir en el espacio euclideo 3-dimensional, una superficie de dos dimensiones con la misma geometría que la del corte anterior. Esto es, queremos visualizar el corte ecuatorial como si fuera removido del espacio-tiempo común y sumergido en un espacio euclideo (esto se llama *embedding*). En este espacio plano, introducimos coordenadas cilíndricas z, r, θ tal que

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (5.28)$$

Si consideramos que $z = z(r)$, se tiene

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (5.29)$$

Este elemento de línea tiene la misma forma que el del corte ecuatorial que atraviesa el wormhole si requerimos que

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.30)$$

Esta ecuación muestra la forma en que $b(r)$ moldea la forma del wormhole.

5.2.6 Condiciones de existencia de wormhole en la métrica

Todo wormhole debe tener, por definición, un radio mínimo $r = b_0$ en el cual el embedding sea vertical, es decir, en el que

$$\left(\frac{dz}{dr}\right) \rightarrow \infty. \quad (5.31)$$

Dicho de otro modo, $b(r) = r$ para $r = r_0$, radio de la garganta. Cerca de la garganta exigiremos que $l(r)$ sea finita y real. Esto implica que:

$$1 - \frac{b}{r} \geq 0 \quad (5.32)$$

en todo el espacio-tiempo. Lejos de la garganta, $dz/dr \rightarrow 0$, para $l \rightarrow \pm\infty$. Esto es,

$$\frac{b}{r} \rightarrow 0 \quad \text{para } l \rightarrow \pm\infty. \quad (5.33)$$

Finalmente, la condición de ausencia de horizontes implicará que

$$\Phi(r) < \infty, \quad (5.34)$$

en todo el espacio-tiempo.

5.2.7 Sobre el tensor de energía-impulso

Los vínculos que hemos impuesto sobre las funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$ imponen a su vez, vía las ecuaciones de Einstein, vínculos sobre la densidad de energía, la tensión y la presión que generan la curvatura espacio temporal. Definamos, para estudiar estos vínculos, la función adimensional

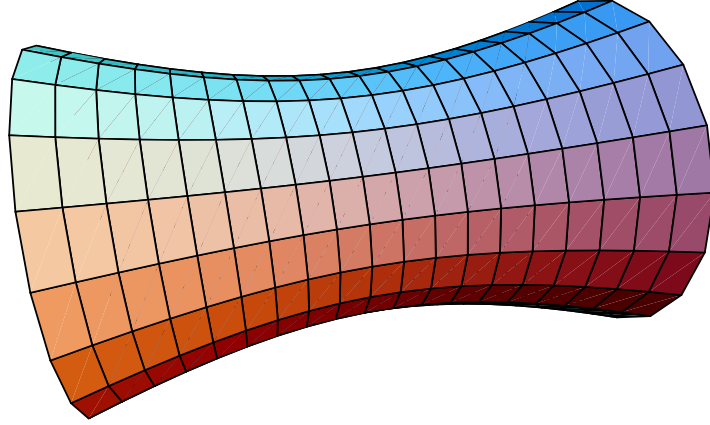


Figure 5.5: La geometría de la garganta del wormhole debe abrirse hacia afuera a ambos lados de la misma, haya o no espacio-tiempos asintóticamente planos.

$$\zeta = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{b/r - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|}, \quad (5.35)$$

donde las ecuaciones de Einstein se han utilizado para obtener la última igualdad. El requisito que el wormhole sea conectable a dos regiones asintóticamente planas implica que la superficie del embedding se abra hacia afuera. Matemáticamente, que

$$\left[\frac{d^2 r}{dz^2} \right]_{r=b_0} > 0. \quad (5.36)$$

Véase como ejemplo la Fig. 5.5 y el paper de Hochberg y Visser [243]. Para explorar las consecuencias de este vínculo notemos que utilizando (5.30), la ecuación anterior se transforma en:

$$\left[\frac{d^2 r}{dz^2} \right] = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad (5.37)$$

en o cerca de la garganta. Esto representa una versión geométrica de la condición de apertura o *flaring out*, que se reduce a pedir que no exista congruencia geodésica. Combinando la ecuación anterior con la definición de ζ obtenemos:

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left[\frac{d^2 r}{dz^2} \right] - 2(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|}. \quad (5.38)$$

Esta relación, al ser evaluada en la garganta, implica que

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|\rho|} > 0, \quad (5.39)$$

donde se ha usado que b' y ρ son finitas y que $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ en la garganta. Esta última relación se sigue de la ausencia de horizonte, lo que implica, como vimos, la finitud de Φ . El

vínculo impuesto por (5.39) es problemático, ya que un observador que se mueva a través de la garganta medirá densidades de energía dadas por:

$$T_{00} = \gamma^2(\rho_0 - \tau_0) + \tau_0 \quad (5.40)$$

y éstas serán negativas para γ suficientemente grandes (recordemos que γ se refiere al parámetro de relación de la velocidad del observador y la velocidad de la luz en relatividad especial). Esta materia es llamada *exótica*.

Una manera alternativa y más simple de observar la necesidad de la existencia de materia exótica que soporte el wormhole es considerar la métrica escrita en la coordenada l ,

$$ds^2 = e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r(l) d\Omega_2^2. \quad (5.41)$$

El tensor de Einstein para esta métrica es [230],

$$G_{tt} = -\frac{2r''}{r} + \frac{1 - (r')^2}{r^2}, \quad (5.42)$$

$$G_{rr} = \frac{2r'\Phi'}{r} - \frac{1 - (r')^2}{r^2}, \quad (5.43)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = \Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'r' + r''}{r}. \quad (5.44)$$

En particular,

$$G_{tt} + G_{rr} = -\frac{2r''}{r} + \frac{2r'\Phi'}{r}. \quad (5.45)$$

Por definición, $r' = 0$ en la garganta. Luego, debido a la condición de *flaring out*, debe existir una región abierta $l \in (0, l_*^+)$ y, sobre el otro lado, $l \in (-l_*^-, 0)$ tal que $r''(l) > 0$. Esto implica que $\forall l \in (-l_*^-, 0) \cup (0, l_*^+)$ ³

$$G_{tt} + G_{rr} < 0. \quad (5.46)$$

Este vínculo puede ponerse en términos del tensor de energía-impulso, por medio de las ecuaciones de campo,

$$T_{tt} + T_{rr} < 0, \quad (5.47)$$

lo que representa la violación de las condiciones de energía, que discutimos a continuación.

5.3 Condiciones de energía

Las desigualdades (5.39) o (5.47) aparecen en el contexto más general de las condiciones de energía. Estudiaremos ahora estas condiciones con el objeto de analizar si existe algún tipo de materia capaz de cumplir con el criterio de exotividad necesario para generar el wormhole.

Hay al menos siete tipos de condiciones de energía [230]. Analizaremos ahora algunas de ellas por separado. Consideremos un tensor de energía-impulso dado por $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$; las condiciones de energía son:

³Notar que los intervalos son abiertos porque en principio existe la posibilidad de que $r'' = 0$ en la garganta, sin embargo, la solución técnica de esta situación no es necesaria para conservar la idea fundamental y no la tendremos en cuenta aquí, véase por ejemplo [243, 244].

- NEC: Condición nula de energía.

La NEC afirma que $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \Leftrightarrow \rho + p_j \geq 0$, ($j = 1, 2, 3$), para cualquier k^μ tipo luz.

- WEC: Condición débil de energía.

$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq 0$ y $\rho + p_j \geq 0$, ($j = 1, 2, 3$), para cualquier v^μ tipo tiempo.

WEC implica NEC por continuidad. Además obliga a que la densidad local de energía sea no negativa para todo sistema de referencia.

- SEC: Condición fuerte de energía.

$(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu})v^\mu v^\nu \geq 0 \Leftrightarrow \rho + p_j \geq 0$ y $\rho + \sum_j p_j \geq 0$, ($j = 1, 2, 3$), para cualquier v^μ tipo tiempo. SEC implica NEC por continuidad ($T = 0$ para partículas sin masa).

- DEC: Condición dominante de energía.

$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ y $T_{\mu\nu}v^\mu$ no es tipo espacio $\Leftrightarrow \rho \geq 0$ y $p_j \in [-\rho, \rho]$, ($j = 1, 2, 3$) para cualquier v^μ tipo tiempo. Es decir, DEC implica que la densidad local de energía es siempre positiva, y que el flujo de energía es tipo tiempo o tipo luz. DEC implica WEC (y por lo tanto NEC), pero no SEC.

También es posible definir condiciones promediadas de energía. Entre ellas, tomaremos la condición débil promediada (ANEC) como ejemplo.

- ANEC: Condición débil promediada de energía.

La ANEC implica que la siguiente desigualdad es satisfecha,

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu d\lambda, \quad (5.48)$$

donde Γ es una curva nula y λ una parametrización de la misma, siendo k^μ el correspondiente vector tangente.

La ANEC es importante porque existe un argumento general, basado en la ecuación de Raychaudhuri que implica que ésta debe violarse a lo largo de geodésicas nulas en un wormhole atravesable esféricamente simétrico. Para ver esto referimos a las páginas 131-133 de la Ref. [230]. La generalización de esta propiedad para wormholes atravesables no necesariamente esféricamente simétricos lo constituye el teorema de censura topológica [245] que básicamente establece que *si un espacio-tiempo asintóticamente plano posee un wormhole atravesable existen geodésicas nulas en las cuales se viola ANEC*.

5.3.1 Violaciones a las condiciones de energía

La más trivial de las violaciones a las condiciones de energía es el caso de un campo escalar masivo, descrito por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2}m^2\psi^2. \quad (5.49)$$

El tensor de energía-impulso es:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\nabla\psi)^2 + m^2\psi^2], \quad (5.50)$$

y su traza es

$$T = -(\nabla\psi)^2 - 2m^2\psi^2. \quad (5.51)$$

Para cualquier vector tipo tiempo, la SEC aplicada a (5.50) es

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T = [v \cdot \nabla\psi]^2 - \frac{1}{2}m^2\psi^2. \quad (5.52)$$

Para violar SEC basta entonces hacer nulo el término $(v \cdot \nabla\psi)^2$. Esto es posible por ejemplo si tomamos un ψ independiente del tiempo en el sistema en el que $v = (1, 0, 0, 0)$. Puede mostrarse además que el resto de las condiciones de energía son satisfechas por este sistema.

Otra conocida violación a las condiciones de energía es el efecto Casimir [246]. El cálculo original de Casimir trató el caso de dos placas conductoras paralelas separadas por una distancia a . Si las placas están en planos $z = \text{constante}$, es posible mostrar que el tensor de energía-impulso asociado a los modos de campo electromagnético entre las placas es tal que la densidad de energía asociada es negativa, por lo que automáticamente se violan WEC y DEC. Además se viola NEC a causa de ser $\rho + p_z < 0$, y por lo tanto también SEC.

Otros ejemplos en los que se violan algunas o todas las condiciones de energía son tratados en [230]. En general, aunque es posible estudiar efectos cuánticos que conduzcan a violaciones en las condiciones de energía, estos efectos son típicamente pequeños, esto es, $O(\hbar)$. Por lo dicho hasta aquí, la existencia de los wormholes podría no estar sólidamente sustentada, al menos desde el punto de vista de las propiedades que debería tener la materia que genere la geometría. Hasta el momento, no se encontrado materia macroscópica que permita la violación de WEC. Sin embargo, recordemos que tampoco se ha demostrado que las condiciones de energía sean un teorema de la Relatividad General sino que son conjeturas que se utilizan de distintas formas en el estudio de singularidades.

5.4 Wormholes en la teoría de Brans-Dicke

Hasta aquí hemos estudiado geometrías de wormholes en el marco de la Relatividad General y analizado que tipo de materia puede generar tales geometrías. A continuación veremos que es posible obtener soluciones de wormhole con materia normal si se considera a la teoría de Brans-Dicke como descripción correcta de la gravitación. Dado que las violaciones de las condiciones de energía son una condición necesaria para la existencia de wormholes estáticos, veremos como las mismas pueden ser producidas por el escalar ϕ de la teoría gravitacional. En general, si escribimos para un vector nulo k^α ($k^\alpha k_\alpha = 0$), la contracción del tensor de Einstein, resulta

$$G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}^{\text{materia}} k^\mu k^\nu + \omega \frac{(k^\mu \phi_{,\mu})^2}{\phi^2} + \frac{k^\mu k^\nu \phi_{,\mu;\nu}}{\phi}. \quad (5.53)$$

Si ahora consideramos que la materia no viola las condiciones de energía pero si lo hace el tensor total, obtenemos las siguientes condiciones sobre el campo y/o su acoplamiento:

1. $\omega < 0$ y $\phi_{,\mu} \neq 0$.
2. $\phi_{,\mu;\nu} \leq 0$.

Es decir, aún cuando las violaciones a las condiciones de energía sigan existiendo, cuando cualquiera de estas dos condiciones sobre los términos asociados al campo se satisfaga, será posible obtener un wormhole construido con materia normal. En particular, es posible obtener soluciones de wormholes en vacío, con la exotividad provista solamente por el campo escalar. En lo que sigue, verificaremos estas conclusiones generales con ejemplo específicos.

Veamos primero brevemente el estudio de las posibles geometrías de wormhole en el caso de vacío.

5.4.1 Universo vacío

En un trabajo reciente, Agnese y La Camera [247] encontraron soluciones de wormhole estáticas y con simetría esférica en la teoría de Brans-Dicke, con el campo escalar de la teoría como fuente de las ecuaciones de Einstein. La característica más saliente de estas soluciones es que el campo ϕ puede desempeñar el rol de materia exótica si el acoplamiento ω es menor que -2. Para explorar si las soluciones de vacío de la teoría de Brans-Dicke admiten como solución una geometría tipo wormhole, Agnese y La Camera partieron de la solución de vacío:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \eta/2r}{1 + \eta/2r} \right)^{2A} dt^2 + \left(\frac{1 - \eta/2r}{1 + \eta/2r} \right)^{2B} (1 + \eta/2r)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega_2^2). \quad (5.54)$$

Por comparación con la métrica post-newtoniana:

$$ds^2 \simeq - \left(1 - 2\frac{M}{r} + 2\beta \left(\frac{M}{r} \right)^2 \right) dt^2 + \left(1 + 2\gamma \frac{M}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\Omega_2^2), \quad (5.55)$$

es posible obtener el valor de las constantes A , B y η en función del parámetro γ ,

$$\gamma = \frac{1 + \omega}{2 + \omega}. \quad (5.56)$$

Una nueva comparación con la métrica de wormhole (5.10), muestra que, eligiendo

$$2\Phi(r) = \sqrt{\frac{2}{1 + \gamma}} \ln \left(1 - \frac{2\eta}{r} \right), \quad (5.57)$$

$$\frac{b(r)}{r} = 1 - \frac{\left[\left(1 - \frac{2\eta}{r} \right) \left(1 + \gamma \sqrt{\frac{2}{1 + \gamma}} \right) \right]^2}{1 - \frac{2\eta}{r}}, \quad (5.58)$$

se encuentra que para el caso $\gamma < 1$ existe una singularidad en $r = 0$, donde el invariante de curvatura diverge, mientras que para el caso $\gamma > 1$ las componentes de la métrica satisfacen todas las propiedades de wormhole explicitadas en secciones anteriores. Finalmente, es posible ver que la WEC es violada cuando $\gamma > 1$, siendo la densidad de energía negativa aportada por el propio campo escalar de la teoría [247]. También han sido exploradas, con la misma técnica, las soluciones de las clases II a IV aportadas por Brans en [248]. Este estudio, publicado en [249] ha demostrado finalmente que tres de las cuatro clases de soluciones estáticas de vacío de Brans representan soluciones de wormhole para elecciones convenientes de los parámetros libres que ellas poseen. Es importante notar, sin embargo, que no existen expresiones cerradas para la coordenada radial propia del wormhole $l(r)$ y tampoco queda claro como podría simularse la formación de un wormhole en distintos momentos de evolución cósmica, en donde el valor de la constante de Newton es diferente al actual.⁴ Es también importante señalar que estas soluciones de vacío para la teoría de Brans-Dicke no son las únicas posibles, véase por ejemplo el trabajo de Van der Bergh [250]. Es sobre estas soluciones alternativas que construiremos más adelante una nueva geometría de wormhole en esta teoría. En lo que sigue, y previamente a volver entonces al caso de vacío, presentaremos soluciones de wormholes con materia no exótica.⁵

⁴Volveremos sobre esa clase de preguntas en la última parte de esta tesis.

⁵Hochberg y Visser han señalado que este tipo de frases deben tratarse con cuidado, ya que pueden provocar confusión semántica. Insistimos entonces en que no estamos diciendo que el tensor de energía-impulso total no

5.4.2 Universo no vacío

Continuemos entonces con el estudio del caso no vacío, es decir, aquel en que hay algún tipo de materia, además del campo de Brans-Dicke, que actúa como fuente de la curvatura espacio-temporal.

Seguindo las convenciones de [251], las ecuaciones de campo de Brans-Dicke son

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} \left(T_{\mu\nu} - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T g_{\mu\nu} \right) + \omega \frac{\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}}{\phi^2} + \frac{\phi_{;\mu;\nu}}{\phi}, \quad (5.59)$$

$$\phi_{;\mu}^{\mu} = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T. \quad (5.60)$$

La suposición de que el espacio-tiempo es estático implica que es posible elegir la métrica y el campo escalar ϕ tales que satisfagan

$$g_{\mu\nu,t} = 0, \quad \phi_{,t} = 0. \quad (5.61)$$

Imponiendo además simetría esférica, el elemento de línea puede ser escrito en la forma de Schwarzschild:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (5.62)$$

Para el tensor de energía-impulso de la materia adoptamos la forma dada en (5.22):

$$T_t^t = -\rho(r), \quad T_r^r = -\tau(r), \quad T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = p(r), \quad (5.63)$$

y cero en todo otro caso. Finalmente suponemos que la materia obedece la siguiente ecuación de estado:

$$-\tau + 2p = \epsilon\rho, \quad (5.64)$$

donde ϵ es una constante. La traza del tensor de energía-impulso será entonces $T = -\tau + 2p - \rho = \rho(\epsilon - 1)$ y las ecuaciones de campo toman finalmente la forma

$$-\Phi'' - (\Phi')^2 + \Lambda'\Phi' + 2\frac{\Lambda'}{r} = -\frac{8\pi}{\phi} \left[\tau + \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T \right] e^{2\Lambda} + (\omega + 1)(\ln \phi)'^2 + (\ln \phi)'' - \Lambda'(\ln \phi)', \quad (5.65)$$

$$1 - re^{-2\Lambda} \left[\Phi' - \Lambda' + \frac{1}{r} \right] = \frac{8\pi}{\phi} \left[p - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T \right] r^2 + re^{-2\Lambda} (\ln \phi)', \quad (5.66)$$

$$e^{2(\Phi-\Lambda)} \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \Lambda'\Phi' + 2\frac{\Phi'}{r} \right] = \frac{8\pi}{\phi} \left[\rho + \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T \right] e^{2\Phi} - \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)} (\ln \phi)', \quad (5.67)$$

$$\phi'' - \phi' \left(\Lambda' - \Phi' - \frac{2}{r} \right) = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T e^{2\Lambda}. \quad (5.68)$$

Para resolver el sistema compuesto por las ecuaciones (5.65,5.68) haremos lo siguiente. Buscaremos una ecuación diferencial que relacione Φ y Λ , a partir de las ecuaciones de movimiento y de la ecuación de estado. Dicha ecuación será de segundo orden y no lineal en Φ , pero, después de un cambio de variables, lograremos transformarla en una de primer orden y lineal en Λ . Haremos entonces una elección específica para Φ , consistente con el límite plano en el infinito espacial y la ausencia de horizontes y singularidades. Finalmente substituiremos esta expresión de Φ en la ecuación lineal, y resolveremos para Λ .

viola las condiciones de energía -en particular NEC- sino sólo que los términos asociados a la materia no lo hacen, i.e. el sector de materia puede ser *normal*. La idea es analizar si esto provee de un mejor escenario para la posible existencia de wormholes sin hacer uso de elementos con poca base experimental.

Relación entre el escalar ϕ y la métrica

Como se explica en [251], de las ecuaciones de campo, la forma del tensor de energía-impulso y (5.62), puede mostrarse que

$$\phi = \phi_0 e^{c\Phi}, \quad (5.69)$$

donde

$$c = \frac{(\epsilon - 1)}{2\omega + 3 + (\omega + 1)(\epsilon - 1)}, \quad (5.70)$$

y ϕ_0 está relacionado con el valor de la constante de acoplamiento gravitacional cuando $r \rightarrow \infty$. En el caso $\omega \rightarrow \infty$ o $\epsilon \rightarrow 1$, recuperamos la Relatividad General, aunque en el último caso, otras soluciones distintas de $\phi = \text{constante}$ pueden existir. En [251], la relación (5.69) se prueba para presiones isotópicas y lo mismo puede hacerse en nuestro caso. Sin embargo, debido a que la relación (5.69) depende básicamente de la forma de la métrica y el $T^{\mu\nu}$ y ninguna otra hipótesis adicional, consideramos que es de gran importancia, a nuestro entender aún no debidamente explotada en otros problemas. En lo que sigue proponemos seguir brevemente los pasos que llevan a la deducción de (5.69).

La ecuación de la componente temporal del tensor de Ricci (5.59) junto con la propiedad de la métrica de ser estática nos conduce a,

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} [(\ln g_{00})^{,k}]_{,k} = \frac{8\pi T}{\phi} \left(T_0^0 - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\phi^{,k} g_{00,k}}{\phi g_{00}}. \quad (5.71)$$

Combinando ahora la ecuación (5.71) con la métrica (5.62) se obtiene

$$-\frac{1}{2} [\sqrt{-g}\phi (\ln g_{00})^{,k}]_{,k} = 8\pi\sqrt{-g} \left(T_0^0 - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T \right). \quad (5.72)$$

De la ecuación de onda para ϕ es posible ver que

$$[\sqrt{-g}\phi (\ln \phi)^{,k}]_{,k} = \frac{8\pi T \sqrt{-g}}{2\omega + 3}. \quad (5.73)$$

Recordando la ecuación de estado, podemos reescribir las ecuaciones anteriores como:

$$-\frac{1}{2} [\sqrt{-g}\phi (\ln g_{00})^{,k}]_{,k} = 8\pi\sqrt{-g} \left(1 + \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} (\epsilon - 1) \right) \rho. \quad (5.74)$$

y

$$[\sqrt{-g}\phi (\ln \phi)^{,k}]_{,k} = \frac{1}{2} c [\sqrt{-g}\phi (\ln g_{00})^{,k}]_{,k} \quad (5.75)$$

donde c es como en (5.70). Equivalentemente,

$$\left[\sqrt{-g}\phi \left(\frac{\phi}{g_{00}^{c/2}} \right)^{,k} \right]_{,k} = 0. \quad (5.76)$$

Integrando la última relación utilizando el teorema de Gauss obtenemos,

$$\int \left[\sqrt{-g}\phi \left(\frac{\phi}{g_{00}^{c/2}} \right)^{,k} \right]_{,k} d^3x = \int \left[\sqrt{-g}\phi \left(\frac{\phi}{g_{00}^{c/2}} \right)^{,k} \right]_{,k} d^2S_k = 0. \quad (5.77)$$

Debido a la forma de la métrica, esto equivale a

$$\int d\theta d\phi r^2 \sin \theta e^{\Phi+\Lambda} \phi(r) \left(\ln \left(\frac{\phi}{e^{c\Phi}} \right) \right)_{,r}, \quad (5.78)$$

lo que finalmente implica

$$e^{-2\Lambda} \left(\ln \left(\frac{\phi}{e^{c\Phi}} \right) \right)_{,r} = 0. \quad (5.79)$$

De esta última ecuación se obtiene (5.69) en forma inmediata.

Estudio de la solución analítica

Después de álgebra en la ecuaciones de campo⁶, obtenemos la siguiente ecuación

$$A \Phi'' + B (\Phi')^2 + 2A \Phi' - A \Lambda' \Phi' + \frac{2}{r^2} (e^{2\Lambda} - 1) = 0, \quad (5.80)$$

donde

$$A = -2 \frac{2 + \epsilon + 2\omega}{2 + \epsilon + \omega(1 + \epsilon)}, \quad (5.81)$$

$$B = - \frac{8 + \epsilon^2(\omega + 2) + 4\omega^2(1 + \epsilon) + 8\epsilon + 11\omega + 12\omega\epsilon}{[2 + \epsilon + \omega(\epsilon + 1)]^2}. \quad (5.82)$$

Hacemos ahora el *Ansatz*:

$$\Phi = -\frac{\alpha}{r}, \quad (5.83)$$

donde α es una constante positiva. Esta elección ya fue estudiada para el caso de la Relatividad General [252]. Notemos que la expresión (5.83) garantiza, debido a la relación con la métrica, que la *constante gravitacional* tome el valor correcto en $r \rightarrow \infty$. Con la suposición (5.83), la ecuación (5.80) se escribe

$$h(r) + f(r) e^{2\Lambda} + g(r) \Lambda' = 0, \quad (5.84)$$

donde

$$h(r) = B \left(\frac{\alpha}{r^2} \right)^2 - \frac{2}{r^2}, \quad f(r) = \frac{2}{r^2}, \quad g(r) = -\frac{A\alpha}{r^2} + \frac{4}{r}. \quad (5.85)$$

Cambios de variables convenientes transforman a la ecuación (5.84) en una ecuación de Bernoulli, y luego en una ecuación lineal.⁷ La solución general está dada por:

$$e^{-2\Lambda} = \frac{e^{2s/\zeta}}{\zeta} \left(1 + \frac{R}{\zeta} \right)^{-(8l+1)} \{I + \mathcal{K}\}, \quad (5.86)$$

donde

$$\zeta = \frac{r}{\alpha}, \quad s = \frac{B}{A}, \quad R = -\frac{A}{4}, \quad l = -\frac{B}{A^2}, \quad (5.87)$$

⁶Para lograr (5.80) se deben seguir los siguientes pasos. Se reescribe (5.65) utilizando la ecuación de estado y (5.69). Luego se hace (5.65) + 2 (5.66) y se usa la ecuación de onda en el resultado.

⁷Los cambios de variables son $\Lambda = \log z$ y luego $y = 1/z^2$. La solución de una ecuación de Bernoulli $y' + P(x)y = Q(x)$ está dada por $y = \exp[-\int P dx] (\int Q \exp[-\int P dx] dx + \mathbf{C})$. En nuestro caso, $P = -2h/g$ y $Q = 2f/g$.

$$I \equiv \int e^{-2s/\zeta} \left(1 + \frac{R}{\zeta}\right)^{8l} d\zeta, \quad (5.88)$$

y \mathcal{K} es una constante. Esta solución no es válida cuando $A \rightarrow 0$, esto es para $\omega = -1 - \epsilon/2$.

El binomio $(1 + R/\zeta)^{8l}$ está relacionado con la función hipergeométrica ${}_2F_1$ [253].⁸ Usando la relación [253],

$$e^t {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; -xt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{p+1}F_q(-n, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; x) \frac{t^n}{n!}, \quad (5.89)$$

conocida como identidad de Rainville, la integral I puede ser escrita

$$I = 2s \sum_{n=0}^{\infty} \int {}_3F_1(-n, -8l, b; b; R/2s) \left(\frac{-2s}{\zeta}\right)^n. \quad (5.90)$$

Integrando los términos correspondientes a $n = 0$ y $n = 1$, obtenemos finalmente

$$I = \zeta - 8lR \ln \zeta + \zeta \sum_{n=2}^{\infty} {}_3F_1(-n, 8l, b; b; R/2s) (-1)^n \left(\frac{2s}{\zeta}\right)^n \frac{1}{n!(n-1)}. \quad (5.91)$$

Puede verse fácilmente que $e^{2\Lambda} \rightarrow 1$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$. Para determinar la constante \mathcal{K} , tomaremos en cuenta a la condición de *flaring out*, que matemáticamente implica:

$$-\frac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{(1 - e^{-2\Lambda})^2} > 0 \quad (5.92)$$

y la definición de la garganta del wormhole, la cual establece una pendiente vertical en la superficie de *embedding*:

$$\lim_{r \rightarrow r_g^+} \frac{dz}{dr} = \lim_{r \rightarrow r_g^+} \pm \sqrt{e^{2\Lambda} - 1} = \infty. \quad (5.93)$$

Finalmente, debemos elegir el radio adimensional de la garganta, lo que implica fijar el valor de \mathcal{K} , de forma que

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_g^+} e^{-2\Lambda} = 0^+ \quad (5.94)$$

se satisfaga. En el caso $R < 0$, ζ_g debe necesariamente ser mayor que $|R|$, para que la condición de apertura valga para todos los valores de ω y ϵ , excepto obviamente aquellos para los cuales R diverge, que están dados por $\omega = -(2 + \epsilon)/(1 + \epsilon)$. Sin embargo, el tamaño absoluto de la garganta también depende de α . Las propiedades antes mencionadas de Λ junto con la definición de Φ permiten mostrar que el tensor métrico describe dos espacio-tiempos asintóticamente planos unidos por una garganta.

⁸Las funciones hipergeométricas son solución a la ecuación diferencial

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0$$

. La expresión general es

$${}_aF_b(c; x) = 1 + \frac{ab}{1 \times c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \times 2 \times c \times (c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \times 2 \times 3 \times c \times (c+1) \times (c+2)}x^3 + \dots$$

. Si a, b, c son reales, entonces la serie es convergente para $-1 < x < 1$ siempre $c - (a+b) > -1$.

Estudio de las condiciones de energía

Veamos ahora que ocurre con las condiciones de energía. Usando las ecuaciones de campo y la expresión de la traza, obtenemos:

$$\frac{2e^{2\Lambda}}{r^2} - \frac{4\Phi'}{r} - \frac{2}{r^2} = \frac{16\pi}{\phi} \tau e^{2\Lambda} + \frac{4}{r} \frac{\phi'}{\phi} - \omega \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + 2 \frac{\phi'}{\phi} \Phi'. \quad (5.95)$$

En la garganta, $e^{2\Lambda} \rightarrow \infty$, y entonces

$$\tau_g \approx \frac{\phi_g}{8\pi r_g^2}. \quad (5.96)$$

Para calcular ρ_g , usamos las componentes no triviales de la ecuación $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$:

$$\tau' = \Phi'(\rho - \tau) - \frac{2\tau}{r} - \frac{\epsilon\rho + \tau}{r}. \quad (5.97)$$

Usando las ecuaciones (5.96), (5.97), y la derivada de la ecuación (5.95),

$$\rho_g \approx \tau_g \frac{c + 1 + \zeta_g}{1 - \epsilon\zeta_g}. \quad (5.98)$$

Finalmente, de la ecuación (5.64), obtenemos

$$p_g \approx \frac{\tau_g}{2} \frac{\epsilon(c + 1) + 1}{1 - \epsilon\zeta_g}. \quad (5.99)$$

Mostraremos ahora que WEC puede ser violada (al menos, cerca de la garganta) con materia no exótica.⁹ Esto significa que daremos el rango de parámetros para los cuales existe una solución de wormhole y a la vez el contenido de materia en la teoría satisface las desigualdades

$$\rho_g \geq 0, \quad \rho_g - \tau_g \geq 0, \quad \rho_g + p_g \geq 0, \quad (5.100)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{c + 1 + \zeta_g}{1 - \epsilon\zeta_g} \geq 1, \quad (5.101)$$

$$\frac{\epsilon(c + 1) + 3 + 2(c + \zeta_g)}{1 - \epsilon\zeta_g} \geq 0. \quad (5.102)$$

Una condición suficiente para la violación de WEC en la garganta en el caso de materia mas campo de Brans-Dicke está dada por,

$$\frac{2(\omega + 1) + \epsilon}{2\omega + 3} \rho_g \leq 0, \quad (5.103)$$

obtenida pidiendo que $\rho_\phi + \rho_{mat} \leq 0$. La Fig. 5.6 representa las regiones del espacio de parámetros en la que la primer condición de WEC no se cumple y sin embargo, la correspondiente desigualdad para el sector de materia sí lo hace.

Haciendo lo mismo para cada una de las desigualdades de WEC es posible restringir el espacio de parámetros cada vez más. Como ejemplo, estudiemos el caso $\epsilon = 2$. De las ecuaciones (5.96), (5.98), y (5.99), las desigualdades (5.100) serán satisfechas si

⁹Lo mismo puede hacerse con la violación de NEC.

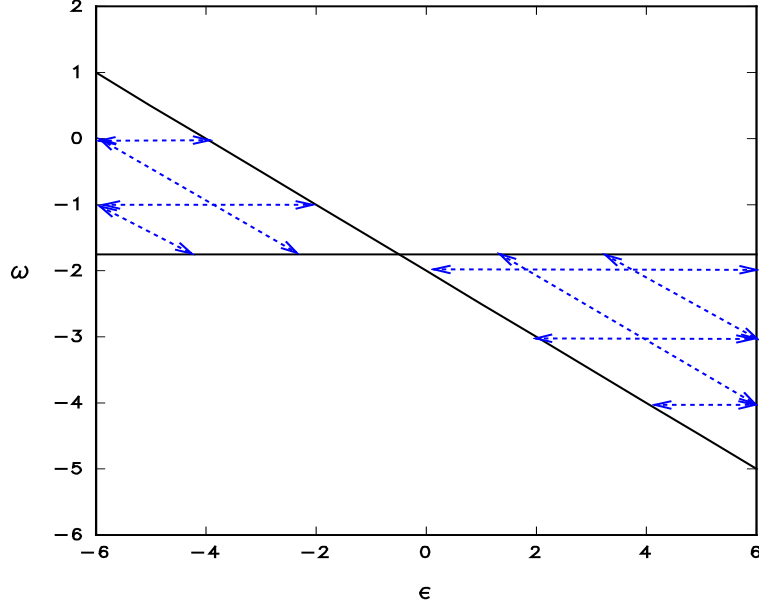


Figure 5.6: *Regiones de violación de la primera condición de WEC para distintos valores en el espacio de parámetros. La ecuación de estado está representada por ϵ y la teoría de gravitación por el acoplamiento ω . Las regiones señaladas cumplen con la primera desigualdad de WEC para el sector de materia pero viola la condición que incluyen al campo ϕ .*

$$\zeta_g \geq -\frac{1}{9\omega + 12} \quad \text{y} \quad \zeta_g < \frac{1}{2} \quad (5.104)$$

ó

$$\zeta_g \leq -\frac{1}{9\omega + 12} \quad \text{y} \quad \zeta_g > \frac{1}{2}. \quad (5.105)$$

La desigualdad (5.103) se cumplirá para $\omega \in (-2, -3/2)$. Finalmente tenemos que imponer que $\zeta_g \geq |A/4|$, lo que implica que

$$\zeta_g \geq \left| \frac{2 + \omega}{4 + 3\omega} \right|. \quad (5.106)$$

Es decir que un wormhole construido con materia no exótica podría existir, por ejemplo, en el caso de $\omega = -1.75$ con un ζ_g dado por (5.105) y (5.106). Esto último no impone condiciones sobre el radio absoluto de la garganta, debido, como se vimos anteriormente, a la dependencia con α .

Hemos entonces demostrado la posibilidad teórica de la existencia de un wormhole en un espacio-tiempo no vacío, de forma que la materia que colabora en la construcción de la geometría es no exótica. Recordemos que esto no quiere decir que no se violan las condiciones de energía, sino solamente que el sector de materia no lo hace. Para lograr esto hemos tenido que exigir que los valores del acoplamiento o bien la forma de la ecuación de estado no sean los apropiados para describir el universo actual, ya que es por ejemplo necesario que, como hemos dicho, $|\omega| > 500$ para dar cuenta de los test post-newtonianos. Esto podría ser bien distinto en el universo primitivo donde valores menores de $|\omega|$ estarían permitidos. De cualquier manera, no es la intención de esta sección presentar más que un *toy model* para estudiar la relación entre las violaciones a las condiciones de energía y la existencia de wormholes. Y esto nos ha llevado a entender que aún cuando esta relación estrecha subsiste, la teoría que más débilmente se

aparta de la Relatividad General a nivel conceptual y formal, como es la teoría de Brans-Dicke, ya presenta condiciones por las cuales es posible *ocultar* la violación de WEC en constructos adicionales y menos problemáticos, como el campo escalar, que no es directamente observable sino a través del valor local de la constante de Newton.

En lo que sigue, volveremos al caso de un espacio-tiempo vacío por un camino poco usual. Introduciremos primero algunas nociones del espacio-tiempo de Riemann-Cartan y estudiaremos allí la posibilidad de construir un wormhole. Luego comentaremos sobre la equivalencia de las ecuaciones de campo entre el formalismo anterior y el caso de vacío sin torsión; ésto nos permitirá presentar una solución de wormhole de gran simpleza en el marco de una teoría de gravitación alternativa, en la cual será posible escribir la métrica del espacio-tiempo directamente en la coordenada propia $l(r)$ del wormhole analizado.

5.5 U_4 : El espacio tiempo de Riemann-Cartan

A continuación, estudiaremos brevemente algunas ideas fundamentales del espacio-tiempo de Riemann-Cartan. Sin embargo, haremos la salvedad de que todo aquello referido a esta sección será utilizado como una herramienta que nos permita, luego, encarar de manera novedosa la búsqueda de soluciones analíticas de wormholes en el caso del vacío de las teorías de Brans-Dicke. Esto implicará que no nos detendremos demasiado en los aspectos formales que no sean fundamentales para nuestros objetivos.¹⁰

Las ideas que presentaremos tienen como meta extender el dominio de la Relatividad General a la microfísica. Es decir, la Relatividad General, que fue originalmente formulada como una teoría macroscópica (en oposición al electromagnetismo) intenta ser extendida de forma que sea capaz de dar descripciones de procesos microfísicos, teniendo a la gravitación de Einstein como algún límite apropiado. Así, se pensó que el momento angular de spin de la materia, que aparece en la naturaleza en unidades cuantizadas, sea la noción física a extender en este contexto. Los constituyentes de la materia macroscópica son partículas que obedecen localmente la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica y pueden ser clasificadas según las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré, de una dada masa m y un dado spin s . La masa se conecta con la parte traslacional del grupo y el spin con la rotacional. Luego, al distribuir masa y spin en el espacio-tiempo se llega a las nociones del tensor de energía-impulso y del tensor momento angular de spin. En el límite macrofísico, la masa simplemente se suma (carácter monopolar) pero el spin, usualmente se promedia a cero (carácter dipolar). Es por esto que, en general, la caracterización del espacio-tiempo puede lograrse con el tensor de energía-impulso solamente. Sin embargo, en el caso microscópico, el spin también es una variable a tener en cuenta para caracterizar a la materia dinámicamente. La hipótesis sobre como tratar este caso se realiza por analogía: el tensor energía-impulso es la fuente del campo gravitacional acoplado al tensor métrico vía las ecuaciones de Einstein, es decir, el que provoca que la conexión no sea igual a cero. Se espera entonces que el momento angular de spin sea también la fuente de otro campo gravitacional, un campo acoplado a la geometría, que se relacione con los grados de libertad rotacionales del espacio-tiempo. Esto implicará entonces, que la conexión contenga nuevos términos, además de los comunes símbolos de Christoffel, que caracterizen estas nuevas propiedades. De esta forma llegamos al espacio-tiempo de Riemann-Cartan, llamado U_4 .

¹⁰Un artículo clásico para teorías con torsión es el de Hehl et al. [254]; en él estará basado la introducción del formalismo. También pueden verse los trabajos de Rauch [255, 256] y las referencias allí citadas.

5.5.1 Conexión, métrica y estructura de U_4

Para comenzar, supondremos que el espacio-tiempo tiene las propiedades de un continuo, esto es, una variedad diferencial de 4 dimensiones, o un X_4 . En este espacio, se introduce la noción de transporte paralelo: trasladar paralelamente un vector A^μ de x^μ a $x^\mu + dx^\mu$ implicará hacer una variación de la forma,

$$dA^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)A^\alpha dx^\beta, \quad (5.107)$$

donde dA^μ se asume bilineal en A^α y dx^β y el conjunto de 64 coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)$ se llama conexión afín. Un espacio-tiempo X_4 equipado con Γ se llama un espacio linealmente conectado, o un L_4 . La parte antisimétrica de la conexión será

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \quad (5.108)$$

y se llama tensor de torsión. El espacio-tiempo estará equipado además con una métrica $g_{\mu\nu}$ con signatura -1 . Esta se utiliza para definir el tensor de no metricidad como,

$$Q_{\alpha\beta\mu} = -\nabla_{(\Gamma)\alpha} g_{\beta\mu} = g_{\beta\mu;\alpha}. \quad (5.109)$$

Se adopta como hipótesis adicional de la teoría que $Q_{\alpha\beta\mu} = 0$, esto significa que las unidades de longitud y la medida de los ángulos no varía bajo un transporte paralelo. Por medio del tensor de torsión es posible escribir la conexión como

$$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha = C_{\beta\mu}^\alpha - K_{\beta\mu}^\alpha, \quad (5.110)$$

donde $C_{\beta\mu}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel y $K_{\beta\mu}^\alpha$ es llamado tensor de contorsión, dado por

$$K_{\beta\mu}^\alpha = \frac{1}{2} \left(-F_{\beta\mu}^\alpha + F_{\beta\mu}^\alpha + F_{\mu\beta}^\alpha \right). \quad (5.111)$$

Un L_4 con una conexión general como la anterior y no metricidad igual a cero se llama espacio-tiempo de Riemann-Cartan, o un U_4 . Si la torsión se anula, se recupera el espacio-tiempo Riemanniano V_4 de la Relatividad General y si la curvatura se anula, el espacio-tiempo Minkowskiano R_4 de Relatividad Especial, de tal forma que el siguiente diagrama es válido

$$(L_4, g) \implies_{Q=0} U_4 \implies_{F=0} V_4 \implies_{R=0} R_4. \quad (5.112)$$

También es posible introducir una base ortornormal de vectores $\mathbf{e}_i = e_i^\alpha \nabla_\alpha$, un *tetrad*, tal que sus componentes satisfacen:

$$e_i^\alpha e_\beta^i = \delta_\beta^\alpha, \quad e_i^\alpha e_\alpha^j = \delta_i^j, \quad g_{\alpha\beta} = e_\alpha^i e_\beta^j \eta_{ij}, \quad (5.113)$$

y una conexión de spin, $w_{j\nu}^i$, tal que la conexión puede escribirse como,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda \left(e_{\mu;\nu}^a + w_{b\nu}^a e_\mu^b \right). \quad (5.114)$$

Con ambas definiciones el tensor de curvatura se calcula como,

$$R_{\mu\nu}^{ab} = w_{\mu;\nu}^{ab} - w_{\nu;\mu}^{ab} - w_{c\mu}^a w_\nu^{cb} + w_{c\nu}^a w_\mu^{cb}. \quad (5.115)$$

El escalar de curvatura será entonces,

$$R = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab}, \quad (5.116)$$

y la torsión,

$$F_{\mu\nu}^a = e_{\mu;\nu}^a - e_{\nu;\mu}^a + w_{c\nu}^a e_\mu^c - w_{c\mu}^a e_\nu^c. \quad (5.117)$$

Estas son las herramientas fundamentales de la teoría y de las que haremos uso a continuación. No pretendemos sin embargo, explorar aquí sus ricas consecuencias, tanto en su nivel formal como en sus predicciones cosmológicas. En su lugar revisaremos en la sección que sigue, cómo puede generalizarse para el caso de la gravitación de Brans-Dicke, un trabajo que fue realizado por Kim [257] y Germán [258] recientemente. Para simplificar aún más nuestro trabajo, y en función de nuestros objetivos, haremos la presentación solamente en un espacio-tiempo vacío.

5.6 Teoría de Brans-Dicke en U_4

Consideraremos la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\phi R + \frac{\omega}{\phi} \phi^{;\mu} \phi_{;\mu} \right) \quad (5.118)$$

donde el significado de las variables es el usual. Como se especificó en la sección precedente, tomaremos la acción de los campos de materia igual a cero. Las ecuaciones de campo se obtienen variando independientemente la acción con respecto al campo escalar ϕ , y a las componentes de la conexión e_a^μ y w_{ab}^μ . La ecuación de campo para ϕ es

$$R - \frac{\omega}{\phi^2} \phi^{;\mu} \phi_{;\mu} + 2\frac{\omega}{\phi} \Delta\phi - 2\frac{\omega}{\phi} F_{\lambda\mu}^\mu \phi^{;\lambda} = 0. \quad (5.119)$$

Aquí,

$$\Delta\phi := \phi_{;\mu}^{;\mu} := \phi_{;\mu}^\mu + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \phi^{;\lambda}. \quad (5.120)$$

Cuando se lo compara con el caso común de vacío, aparece un término adicional en la ecuación para el campo ϕ . Esto se debe a la definición del operador Δ como la derivada covariante con respecto a toda la conexión y no solo a la conexión simétrica, dada por los símbolos de Christoffel. En este esquema, se ve que el campo ϕ se acopla a la torsión de la misma forma en que se acopla a la métrica [257]. La ecuación de campo para e_a^μ es

$$R_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu}. \quad (5.121)$$

En este caso, comparando con las ecuaciones de la teoría usual, está ausente el término que proviene de derivadas segundas en la conexión. En el presente formalismo, aparece en su lugar una nueva ecuación, debido a la variación independiente del e_a^μ y la conexión de spin [257]. Utilizando (5.121) en la ecuación para ϕ (5.119), se obtiene

$$\Delta\phi = F_{\lambda\mu}^\mu \phi^{;\lambda}. \quad (5.122)$$

Finalmente la última ecuación es,

$$F_{\alpha\beta}^\mu = \left(\delta_\beta^\mu \phi_{;\alpha} - \delta_\alpha^\mu \phi_{;\beta} \right) \frac{1}{2\phi}. \quad (5.123)$$

La característica más importante de esta teoría es que aún en la ausencia de partículas con spin, o de términos en R^2 , la torsión no se anula; pudiéndose propagar por medio del propio campo escalar. Notemos además que el factor de acoplamiento ω no interviene en la ecuación

de la torsión (5.123), lo que implica que los efectos de ϕ y del posible spin de la materia, en el caso no vacío, tendrán el mismo orden de magnitud [257]. Casos similares de teorías con torsión es el conocido como *tlaplon* [259]; para un reciente estudio, véase el trabajo de Saa [260].

5.6.1 Wormholes estáticos en U_4

Volvamos ahora al análisis de las posibles geometrías de wormhole que pueden originarse en el vacío de la teoría. Tomaremos nuevamente la métrica esféricamente simétrica y estática,

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (5.124)$$

lo que determina la elección del tetrad,

$$e_\mu^0 = (e^\Phi, 0, 0, 0), \quad (5.125)$$

$$e_\mu^1 = (0, e^\Lambda, 0, 0), \quad (5.126)$$

$$e_\mu^2 = (0, 0, r, 0), \quad (5.127)$$

$$e_\mu^3 = (0, 0, 0, r \sin \theta). \quad (5.128)$$

Las cuatro componentes no triviales del tensor de torsión son [261, 262, 263],

$$F_{01}^0 = f(r), \quad (5.129)$$

$$F_{01}^1 = -h(r), \quad (5.130)$$

$$F_{02}^2 = F_{03}^3 = -k(r), \quad (5.131)$$

$$F_{12}^2 = F_{13}^3 = g(r). \quad (5.132)$$

Substituyendo estas formas particulares en la ecuación (5.123) se puede relacionar al campo de torsión con el escalar de Brans-Dicke. Se obtiene [264],

$$f = -g = -e^{-\Lambda} \frac{\phi'}{2\phi}, \quad (5.133)$$

$$h = k = 0. \quad (5.134)$$

De la ecuación (5.117) se obtienen las componentes no triviales de la conexión de spin, necesarias para escribir las ecuaciones de Einstein. Estas resultan [264],

$$w_{10}^0 = \Phi' e^{-\Lambda} - f = e^{-\Lambda} \left(\Phi' + \frac{\phi'}{2\phi} \right), \quad (5.135)$$

$$w_{12}^2 = w_{13}^3 = \frac{e^{-\Lambda}}{r} + g = e^{-\Lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\phi'}{2\phi} \right), \quad (5.136)$$

$$w_{23}^3 = \frac{\cot \theta}{r}. \quad (5.137)$$

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores, se llega entonces al sistema no trivial de ecuaciones de Einstein, que está dado por¹¹,

¹¹En el trabajo [264] hay errores de tipeo en las ecuaciones de campo. Véase especialmente la diferencia entre la ecuación (21) de ese trabajo con (5.141).

$$\left(\Phi' + \frac{\phi'}{2\phi}\right)' + \left(\Phi' + \frac{\phi'}{2\phi}\right) \left(\Phi' - \Lambda' + \frac{\phi'}{\phi} + \frac{2}{r}\right) = 0, \quad (5.138)$$

$$(1 + \Phi' - \Lambda') \left(\Phi' + \frac{\phi'}{2\phi}\right) + (1 - \Lambda') \left(\frac{2}{r} + \frac{\phi'}{\phi}\right) - \omega \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = 0, \quad (5.139)$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{\phi'}{2\phi}\right) \left[\Phi' - \Lambda' + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\phi'}{\phi}\right)\right] + \left(\frac{1}{r} + \frac{\phi'}{2\phi}\right)' - \frac{e^{2\Lambda}}{r} = 0, \quad (5.140)$$

$$\frac{\phi''}{\phi'} = (\Lambda' - \Phi') - \frac{2}{r}. \quad (5.141)$$

Como se muestra en [264], utilizando (5.141) en (5.138) y en (5.139), y con una adecuada elección de la constante de integración, las funciones de forma y de redshift pueden relacionarse con el escalar de la teoría según:

$$\Phi' = -\frac{\phi'}{\phi}, \quad e^{2\Lambda} = \alpha \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 r^4, \quad (5.142)$$

con

$$\phi'/\phi = \pm \left(\alpha r^4 + \beta^2 r^2\right)^{1/2}, \quad (5.143)$$

y donde $\beta^2 = (1 - 2\omega)/4$ y α es una constante positiva.¹²:

Tomando el caso $\beta^2 < 0$ y llamando $\beta^2 = -\varrho$, con $\varrho > 0$, una integración trivial nos lleva a,

$$\phi = \phi_0 \exp \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \arcsen \left(-\sqrt{\frac{\varrho}{r^2 \alpha}} \right) \right], \quad (5.144)$$

$$e^{2\Lambda} = \frac{\alpha r^2}{\alpha r^2 - \varrho}, \quad (5.145)$$

$$e^{2\Phi} = \exp \left\{ -2 \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \arcsen \left(-\sqrt{\frac{\varrho}{r^2 \alpha}} \right) + \mathcal{K} \right] \right\}. \quad (5.146)$$

El dominio de definición del arcsen como función implica que la solución será válida cuando $r \geq \sqrt{\varrho/\alpha}$, mientras que la positividad de ϱ hace necesario que $\omega > 1/2$. En el límite asintótico, cuando $r \rightarrow \infty$, la función $e^{2\Lambda} \rightarrow 1$ y también lo hace $e^{2\Phi}$, si $\mathcal{K} = -\pi/\sqrt{\varrho}$. Esta última función no cambia de signo y es finita para todo r . Además, el escalar de Brans-Dicke también se aproxima a 1 para una adecuada elección de ϕ_0 . Finalmente, en la garganta, cuando $r \rightarrow \sqrt{\varrho/\alpha}$, se obtiene que $dz/dr \rightarrow \infty$, según la fórmula (5.93). Esto verifica las propiedades necesarias para que una geometría describa una garganta y dos espacio-tiempos asintóticamente planos.

Dado que la coordenada r tiene una singularidad en la garganta, donde el coeficiente de la métrica g_{rr} se hace divergente, la geometría espacial es mejor estudiada en términos de la ya mencionada coordenada radial propia, l , que se calcula mediante (5.11). Esta resulta ser,

¹²Los pasos que deben seguirse para obtener (5.142) son los siguientes. Se utiliza primero (5.141) en (5.138); ésto otorga $\Phi' = \rho\phi'/\phi$ o equivalentemente $\exp(2\Phi) \propto \phi^{2\rho}$ en forma automática, con ρ , una constante. Luego, despejando $\Lambda' - \Phi'$ de (5.141) y reemplazándolo en (5.140) se obtiene $a'/a = -(e^{2\Lambda}/r - 1/r)$, donde $a = \phi'/\phi$. Esta es la ecuación (23) del trabajo [264]. Si restamos ahora (5.139) y (5.138) y utilizamos los resultados ya obtenidos se encuentra que $e^{2\Lambda} = a^2 r^2 (\rho + 3/4 + \omega/2) + ar(2 + 2\rho) + 1$. Finalmente, la integración de (5.141) otorga $e^{2\Lambda} = \alpha a^2 r^4 \phi^{2\rho+2}$, con α , una constante. Comparando ambas expresiones y evaluándolas en $\rho = -1$ se obtienen las relaciones señaladas en el texto principal.

$$l = \sqrt{r^2 - \frac{\varrho}{\alpha}}. \quad (5.147)$$

Debido a la simple expresión para $l(r)$ es fácil reescribir el tensor métrico en términos de esta coordenada,

$$ds^2 = -h(l) dt^2 + dl^2 + r^2(l)d\Omega_2^2, \quad (5.148)$$

donde,

$$h(l) = \exp \left\{ -2 \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \arcsen \left(\sqrt{\frac{\varrho}{\alpha l^2 + \varrho}} \right) + \mathcal{K} \right] \right\}. \quad (5.149)$$

y

$$r^2(l) = l^2 + \frac{\varrho}{\alpha}. \quad (5.150)$$

Entonces, en este sistema, a medida que l crece desde $-\infty$ a 0, r decrece monotónicamente a su mínimo valor en la garganta; y a medida que l crece hacia $+\infty$, r crece monotónicamente.

Finalmente, es tiempo de volver al caso de vacío sin torsión. Es posible ver que las ecuaciones del universo de Brans-Dicke con torsión son equivalentes a aquellas de vacío, sin torsión, haciendo la substitución¹³:

$$\omega_{\text{TORSION}} \rightarrow -\omega_{\text{VACIO}} - 3/2. \quad (5.151)$$

Compárese para esto los trabajos de Kim y Cho (ecuación (25)) y Van der Bergh (ecuación (2.14)) [264, 250]. Esto implica en forma inmediata, que la solución presentada es también una solución de vacío para el caso de la teoría sin torsión para $\omega < -2$. Para ver que sucede con las condiciones de energía podemos usar la métrica (5.148) considerándola como solución para el caso de vacío. Es inmediato ver que, como función de l , $r' = 0$ y $r'' > 0$ cuando son evaluadas en la garganta. Luego, utilizando (5.45) es posible demostrar la violación de la NEC. La solución (5.144) había sido obtenida previamente pero había sido descartada justamente porque el campo escalar ϕ , con significado físico, no estaba definido en todo el espacio-tiempo. Este análisis demuestra que ese comportamiento se produce debido a que la solución misma describe una geometría de wormhole, donde el intervalo sin solución queda confinado a radios menores que el de la garganta. Por otra parte, esta geometría parece ser el ejemplo más simple de wormhole en el marco de una teoría de gravitación alternativa.

5.7 Conclusiones

En este capítulo hemos explorado los conceptos fundamentales de las geometrías clásicas de wormholes, sus diferencias en cuanto a posibilidades de traversabilidad, su relación con problemas asociados a la causalidad y a la violación de las condiciones de energía. El contenido original de este estudio debe buscarse en las secciones referentes a la búsqueda de soluciones analíticas y el análisis a partir de ellas del escenario de las violaciones a las condiciones de energía.

Estudios anteriores en el marco de la teoría de Brans-Dicke [247, 249] habían mostrado la existencia de tales soluciones para el caso de vacío. Tanto en estos estudios previos como en el aquí presentado, la violación de WEC (y NEC) se debe al campo escalar de la teoría,

¹³En [264] hay un error de signo en esta asociación.

al cual es posible responsabilizar de la exotividad de la fuente que genera la geometría. La característica fundamental de las nuevas soluciones es que se ha podido observar que es posible que el contenido de materia no viola NEC. Por supuesto, sí lo hace el tensor de energía impulso total; esto es, aquel formado por materia más campo. Esto era algo que había sido visto como posible luego del análisis desarrollado a partir de (5.53). La solución analítica presentada pone en evidencia este tipo de comportamiento. Dado que la violación a las condiciones de NEC es una condición necesaria para la existencia de wormholes en toda teoría que respete la forma del tensor de Einstein, la existencia de campos alternativos en teorías distintas a la Relatividad General, permite *ocultar* las violaciones a las condiciones de energía en constructos tal vez menos problemáticos que la materia. En este sentido, soluciones de wormhole fueron estudiadas en teorías con torsión [265], con acción $R + R^2$ [266], de Einstein-Gauss-Bonnet [267], etcétera.

En Relatividad General, el problema que se encuentra frente a la construcción hipotética de un wormhole es encontrar o generar, y mantener, cantidades suficientes de materia exótica. En la teoría de Brans-Dicke, en el espacio-tiempo no vacío, las dificultades se reducen a mantener los valores de cada uno de los parámetros dentro la región restrictiva en que se cumple la no exotividad de la materia, manteniéndose la exotividad del $T^{\mu\nu}$ total. Sin embargo, los valores de ω compatibles con valores pequeños de ϵ son mucho menores que aquellos que hacen, al menos en el presente, a la teoría de Brans-Dicke cosmológicamente viable. Valores mayores de $|\omega|$ requieren valores mayores de $|\epsilon|$. En el caso estudiado, un intento de construcción hipotética de un wormhole tendría que lidiar con los problemas asociados con la manipulación de la materia para obtener ecuaciones de estado extremas o siendo aún más especulativos, con la modificación local de la teoría de gravitación. Hemos también extendido la taxonomía de las soluciones de vacío a nadiendo, probablemente, la geometría más simple encontrada hasta el momento, solución de la teoría de Brans-Dicke con torsión y sin ella para valores adecuados del acoplamiento ω . En este caso, y por vez primera en gravitación alternativa, se ha podido escribir la métrica directamente en la coordenada radial propia. No deja de ser notorio que la propiedad única de la solución de Schwarzschild desaparece en teoría alternativas y mientras que el caso standard prohíbe los wormholes atravesables en vacío, la teoría de Brans-Dicke no lo hace, ejemplo de lo cual son las ecuaciones (5.145) y (5.146).

Es también importante recordar que el estudio de geometrías de wormholes en teorías de Brans-Dicke no es tan nuevo como sugeriría el año de publicación del trabajo [247]. A nuestro conocimiento el primer trabajo orientado hacia estos temas, aunque sin mencionarlo explícitamente, es el de Bronnikov [268]. En él se calculan soluciones exactas esféricamente simétricas para teorías escalares tensoriales, algunas de las cuales tienen propiedades de wormholes. En un reciente artículo, se han realizados extensiones de estos métodos a dimensiones extras [269]. Por brevedad y consistencia, estos desarrollos han quedado fuera del camino elegido para la exposición del material de este capítulo. Tampoco hemos tratado los problemas asociados con el estudio de la estabilidad de las soluciones, aunque es cierto que hay muy pocos resultados sobre esto en el presente (véase por ejemplo [270]). Asimismo, un reciente interés en el estudio de soluciones de wormholes en el *Einstein frame* de la teoría se ha visto evidenciado en [244] y [271]. La idea es estudiar si las soluciones son invariantes conformes, es decir, si los wormholes del *Einstein frame* son también wormholes del *frame* de Jordan. Por ejemplo, se ha visto que no necesariamente una garganta en el *Einstein frame* es una garganta en el *Jordan frame* pero sin embargo, sí es el mismo el rango de parámetros del acoplamiento ω para los cuales las soluciones corresponden a wormholes atravesables [244]. Deliberadamente, hemos obviado comentar sobre estos resultados, y nos hemos autolimitado al *frame* de Jordan.

Como comentario adicional, y para dar cuenta de la extraordinaria rapidez con que se están produciendo resultados en el área, nos permitimos agregar un párrafo final sobre wormholes dinámicos, i.e. cuya métrica evoluciona en el tiempo. La idea subyacente en estas geometrías

es que, al hacer que la métrica dependa de la coordenada temporal, uno pueda ser capaz de suspender localmente las violaciones a la NEC. Ejemplos de este fenómeno en Relatividad General pueden verse en [272, 273, 274, 275] y en nuestro propio artículo [276]. Todos estos trabajos están basados en extensiones del formalismo estático al caso dinámico y todos ellos hacen uso de los conceptos de embedding y función de forma introducidos anteriormente. Sin embargo, en dos trabajos recientes [277, 278], Hochberg y Visser han demostrado que esta aproximación no es válida en el caso de geometrías dependientes del tiempo. Fundamentalmente el problema es que en el caso dinámico no hay una garganta sino dos -que no coinciden con el centro del wormhole-, algo que el formalismo anterior fallaba completamente en determinar. Además, también se ha podido ver que la suspensión a la violación de las condiciones de energía es esencialmente una ilusión: para que la geometría cumpla con la condición de flaring out (redefinida en términos de la expansión de geodésicas nulas) se debe violar NEC en ambas gargantas. Lo novedoso de estos resultados está en un cambio radical de la técnica, en donde ya no intervienen más que propiedades locales y se abandonan los conceptos de embeddings o propiedades asintóticas de la métrica. Por supuesto, en el caso estático, ambos formalismos coinciden.¹⁴

Para terminar, se nalemos que la aproximación al estudio de wormholes adoptada en este capítulo es completamente clásica y guiada básicamente por estudios de geometría. Esta, sin embargo, no es la única posibilidad. Desde el punto de vista cuántico, Coleman [279] y Giddings y Stroeminger [280] han mostrado que el efecto de los wormholes es modificar las constantes de acoplamiento de baja energía y dar distribuciones de probabilidad. En particular, se ha mostrado [281] que la distribución de probabilidades de los universos tiene un pico en $\Lambda = 0$, dónde Λ es la constante cosmológica. Todos estos resultados, así como aquellos referentes a wormholes cuánticos en la gravitación de Brans-Dicke (véase por ejemplo [282]), quedan así fuera de los objetivos de estudio de esta tesis y no los tendremos en cuenta aquí. Asimismo, nada hemos dicho del estudio de soluciones de wormholes Euclideas, en lugar de Lorentzianas, siendo éste un tema totalmente ajeno a nuestros objetivos. Estos wormholes Euclídeos son de interés especial de los físicos de partículas y son procesos cuánticos sin una interpretación directa en términos de campos gravitacionales.

¹⁴Nuestro trabajo [276] construye la solución dinámica primero obteniendo una estática, ésta última es aún válida.

Chapter 6

Microlensing y Gamma Ray Bursts

-A nadie veo en el camino, dijo Alicia.
-Me gustaría tener esos ojos -observó el Rey malhumorado.
Ser capaz de ver a Nadie! Y a esa distancia además!

Lewis Carroll
A través del espejo

6.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos introducido en esta tesis el concepto de wormhole y estudiado algunas posibles geometrías en la teoría de Brans-Dicke. Como vimos, una característica fundamental de *todos* los casos de wormholes es que la materia que los genera debe violar las condiciones de energía (técnicamente, en la garganta se viola NEC). Es entonces de gran importancia juzgar hasta que punto esperamos encontrar realmente este tipo de materia en el universo. Teóricamente, no hay nada que prohíba su existencia: en un espacio-tiempo curvo, es posible *probar* que la ANEC no se cumple [283, 284]. Pero experimental u observacionalmente sólo se conoce que las condiciones de energía son violadas por efectos cuánticos, de orden \hbar . Si cantidades *macroscópicas* de materia que viole las condiciones de energía existe en el universo es aún una pregunta sin respuesta. Asimismo, no se conoce ningún mecanismo capaz de generar un reliquia de densidad negativa, hecho quizás justificado en la inexistencia de una teoría cuántica de la gravitación.

En los últimos años, se han empezado a estudiar posibles efectos observables de los wormholes, en particular en contextos astrofísicos. En esta dirección, el trabajo de Cramer et al. [285], sobre el cual basaremos parte de la discusión en este capítulo, analizó el fenómeno de microlensing por masas negativas, genéricamente conocidas como GNACHOS, del inglés *gravitational negative anomalous compact halo object*. Como las curvas de intensidad resultan ser muy diferentes a las del caso standard, el trabajo de Cramer et al. fue así el primero en sugerir un método experimental para detectar posibles configuraciones de masas negativas. Otro análisis relacionado estudió las condiciones que hacen posible que los wormholes estén inmersos en un espacio-tiempo de Friedmann y a partir de ello, qué efectos se producen, por ejemplo, en las mediciones de la radiación cósmica de fondo [286].

Otros estudios sobre el posible rol que pueden tener densidades negativas de materia han sido recientemente presentados. Visser [287, 288] ha señalado que ninguna combinación de materia *normal* es capaz de relacionarse con los datos observacionales de H_0 y las edades de las estrellas más viejas de la galaxia. Esto indica una violación de SEC en algún momento tardío del universo, algo que es mas bien una sorpresa, debido a que la cosmología es totalmente

clásica para este rango de temperaturas. A pesar de ésto, el análisis es tan simple y robusto que ni siquiera utiliza una ecuación de estado particular. Mann [289] ha reportado que regiones de energía negativa pueden tener también colapso gravitacional, formando agujeros negros de masa negativa. Finalmente, Piran analizó si pequeñas cantidades de masa negativa podrían ser capaces de generar *voids*, grandes regiones del universo en donde no se observan galaxias [290].

Sin embargo, nada es conclusivo. Hasta el momento no existe evidencia observacional a favor ni tampoco alguna cota superior a la cantidad de materia exótica que puede existir en el universo.

En este capítulo nos proponemos estudiar este problema. Presentaremos un modelo que asociará algunos de los Gamma Ray Bursts observados a fenómenos de microlensing por masas negativas, siendo Núcleos Galácticos Activos las fuentes de *background*. El escenario propuesto podrá servir como base para admitir posibles repeticiones en la muestra de Gamma Ray Bursts o para explicar una clase de esquivos fenómenos con curvas de luz que crecen en un tiempo más largo que aquel que tardan en decaer. La muestra de Gamma Rays Bursts será utilizada *a posteriori* con el objeto de acotar la cantidad de masa negativa que puede existir en el espacio intergaláctico. Para ésto, nos bastará una sólo hipótesis: luego de demostrar que las características principales de los Gamma Ray Bursts son compatibles con el escenario propuesto, la cota surgirá sólo de suponer que las masas negativas, si están agrupadas en objetos compactos, deben provocar fenómenos de microlensing.

Las ideas contenidas en este capítulo están basadas en los trabajos [291] y [292]. Asimismo, un descripción del modelo apareció publicada en [293].

6.2 Microlensing gravitacional de masas negativas

En esta sección revisaremos brevemente los elementos necesarios para el análisis del modelo. Introduciremos nociones de sobre la métrica de Schwarzschild, cálculo de distancias cosmológicas y elementos de la teoría de microlensing. Comenzemos pues revisando cómo la masa curva la trayectoria de los rayos de luz. De algún modo, ésta es la esencia de la Relatividad: contiene el principio de equivalencia y las ideas de Einstein sobre cómo la masa curva el espacio quizás en la forma más pura posible.

6.2.1 Trayectorias de los rayos de luz

Sea f una onda plana monocromática, de la forma,

$$f \propto \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \propto \exp(i\psi). \quad (6.1)$$

La función ψ se conoce como iconal. En regiones pequeñas del espacio e intervalos pequeños de tiempo en el sistema x^μ , esta función es desarrollable en serie,

$$\psi \simeq \psi_0 + \mathbf{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (6.2)$$

donde es posible relacionar,

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (6.3)$$

o, en forma covariante, definir el tetravector de onda como,

$$k_\mu = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}. \quad (6.4)$$

Las componentes de k_μ están ligadas entre sí por la ecuación de las geodésicas nulas, $k_\mu k^\mu = 0$, de donde se obtiene la ecuación de la iconal:

$$g_{\mu\nu}\psi^{,\mu}\psi^{,\nu} = 0. \quad (6.5)$$

Para estudiar esta ecuación en la métrica de Schwarzschild (5.1) notaremos dos aspectos que nos serán útiles a continuación.

Consideremos primero una partícula de prueba; en donde quiera que ésta esté y cualquiera sea su velocidad, podemos proyectar su posición sobre la superficie de una esfera de radio unidad. Con el punto y el vector velocidad así proyectado es posible determinar un gran círculo o círculo máximo. A medida que la partícula se mueva, la proyección radial de su posición continuará estando sobre ese círculo máximo, ya que si así no fuera, se daría preferencia a un hemisferio u a otro, contrariamente a la simetría esférica de la situación. Luego, es posible elegir, sin pérdida de generalidad, orientar el sistema coordenado tal que la proyección radial de la órbita coincida con el ecuador ($\theta = \pi/2$) de las coordenadas polares. Es por esta razón que la coordenada θ desaparece como variable dinámica de las ecuaciones en la geometría de Schwarzschild.

El segundo punto importante es notar que t y θ son coordenadas cíclicas de la métrica (5.1). Esto significa que $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = \partial g_{\mu\nu}/\partial \theta = 0$. Para cada coordenada cíclica q puede definirse una dirección o vector de Killing, $\zeta = \partial/\partial x^q$, tal que satisfaga la ecuación covariante,

$$\zeta_{\mu ;\nu} + \zeta_{\nu ;\mu} = 0. \quad (6.6)$$

Es posible probar que en cualquier geometría que contiene una simetría, es decir, en el que existe una métrica con coordenadas cíclicas x^q , el movimiento a lo largo de cualquier geodésica deja invariante el producto escalar entre el vector tangente \mathbf{k} , y el vector de Killing asociado,

$$k_q = \mathbf{k} \cdot \zeta = \text{constante}. \quad (6.7)$$

En efecto,

$$k^\mu (\zeta_\nu k^\nu)_{;\mu} = k^\mu k^\nu \zeta_{\mu ;\nu} + \zeta_\mu k^\nu k^\mu_{;\nu} = 0, \quad (6.8)$$

debido a que el primer término se anula por ser la contracción de un tensor antisimétrico -la derivada covariante del vector de Killing- con uno simétrico y el segundo término lo hace por contener la ecuación de las geodésicas $k^\mu_{;\nu} = 0$. En el sistema en el cual se tiene a la coordenada x^q como coordenada cíclica, el vector de Killing es $\zeta^\mu = \delta_q^\mu$ y luego, $k_q = k_\alpha \delta_\mu^\alpha$. En estos casos, la geometría garantiza la conservación de la q -ésima componente del tetraimpulso. En el caso particular de Schwarzschild que analizaremos a continuación, esto conduce a $\partial\psi/\partial t = \omega = \text{constante}$ y $\partial\psi/\partial\phi = L = \text{constante}$.

Volvamos ahora a un espacio-tiempo descrito por (5.1). Allí, la ecuación (6.5) es

$$c^{-2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - r^{-2} \sin^{-2} \theta \left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2 = 0, \quad (6.9)$$

en donde debe recordarse que $\theta = \pi/2$.¹ Para resolver esta ecuación se propone, teniendo en cuenta los dos aspectos señalados anteriormente, la siguiente separación de variables,

$$\psi = -\omega t + L\phi + S_r(r). \quad (6.10)$$

¹Mantendremos por ahora unidades con dimensiones usuales para aclarar los cálculos de órdenes de magnitud.

Reemplazando en (6.9) se obtiene,

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{\omega^2}{c^2} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{\partial S_r(r)}{\partial r}\right)^2 - r^{-2} L^2 = 0, \quad (6.11)$$

de donde,

$$S_r(r) = \int dr \left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2} \frac{\omega^2}{c^2} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} r^{-2} L^2 \right)^{1/2}. \quad (6.12)$$

La interferencia constructiva de ondas impone que la trayectoria clásica cumpla con,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial L}\right) = 0. \quad (6.13)$$

La primer condición otorga a una relación entre t y r mientras que la segunda lo hace entre ϕ y r , es decir da la característica principal de la órbita.²

A partir de esta última, y utilizando (6.10), se obtiene,

$$\phi = \int dr \left(r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \right)^{-1}, \quad (6.14)$$

en donde se han definido las constantes $\rho = cL/\omega$ y $r_g = 2GM/c^2$. Se verá luego que la constante ρ es el parámetro de impacto del rayo de luz con respecto a la masa en una configuración de lente gravitacional. Si se despreciaran las correcciones relativistas ($r_g \rightarrow 0$), (6.14) tiene por solución $r = \rho / \cos \phi$; es decir, una recta que pasa a una distancia ρ del origen. Para tener en cuenta las correcciones relativistas a la trayectoria, transformamos la expresión para S_r haciendo la substitución $r(r - r_g) = (r')^2$ [1]. Esto permite hacer un desarrollo en potencias de r_g/r , véase §98 de la referencia anterior, que conduce a

$$S_r(r) = S_r^0 + \frac{r_g \omega}{c} \int dr (r^2 - \rho^2)^{-1/2} = S_r^0 + \frac{r_g \omega}{c} \operatorname{arccosh}(r/\rho), \quad (6.15)$$

donde S_r^0 es la función correspondiente a un rayo rectilíneo clásico. La variación total de S_r para un rayo que proviene de una distancia R , pasa por una mínima distancia al centro igual a ρ y continúa nuevamente hasta una distancia R será,

$$\Delta S_r = \Delta S_r^0 + 2 \frac{r_g \omega}{c} \operatorname{arccosh}(R/\rho). \quad (6.16)$$

Luego, la variación correspondiente en ϕ , que se obtiene derivando con respecto a L , es,

$$\Delta \phi = -\frac{\partial \Delta S_r}{\partial L} = -\frac{\partial \Delta S_r^0}{\partial L} + \frac{2r_g R}{\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}}. \quad (6.17)$$

En el límite $R \rightarrow \infty$, y recordando que $\partial \Delta S_r^0 / \partial L = \pi$, ya que la trayectoria es rectilínea, se obtiene,

$$\Delta \phi = \pi + \delta \phi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}. \quad (6.18)$$

²En una descripción cuántica de una partícula, como un paquete de ondas, la posición de la partícula estará localizada allí donde las fases de las varias componentes del paquete coincidan y se evite la interferencia destructiva. La trayectoria seguirá luego una sucesión de estados en los cuales las fases de las varias ondas también coincida. Véase el Box 25.3 y 25.4 de la Ref. [213] o el §47 de la Ref. [294]

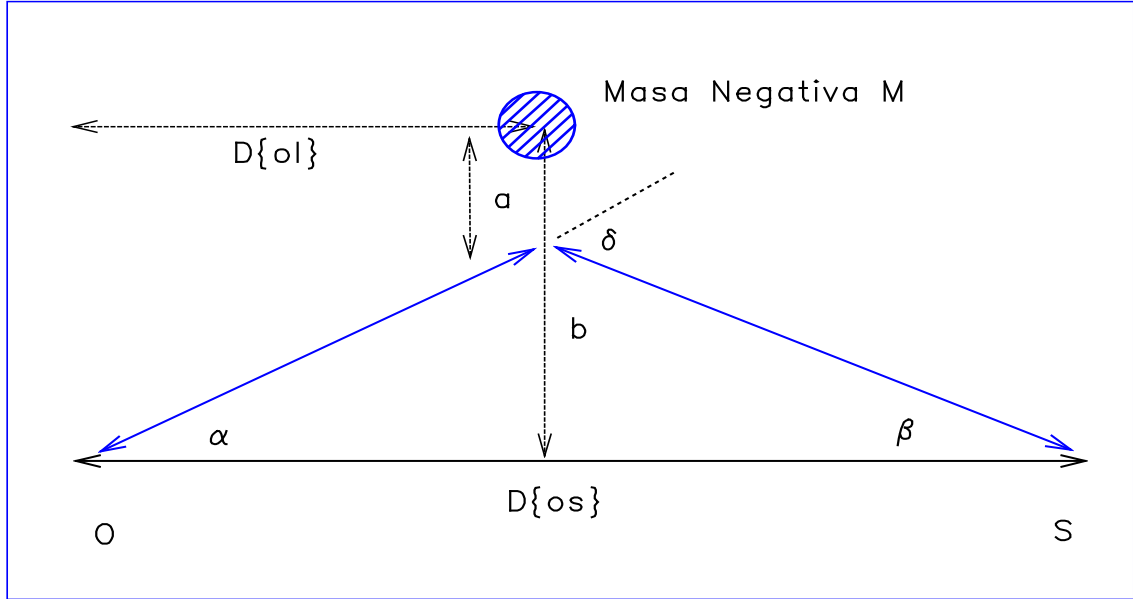


Figure 6.1: Geometría del efecto de microlensing debido a una masa negativa. El observador O , recibe la luz de la fuente S , desviada por la lente de masa $|M|$.

Esto significa que bajo la influencia del campo de gravitación de una masa M , un rayo de luz se curva una magnitud igual a $\delta\phi$, que puede ser convexa o cóncava dependiendo del signo de M . Obviamente, entonces, lo usual es que sea atraído por la masa. Sin embargo, como en este capítulo estudiaremos los efectos de microlensing de una masa negativa, la geometría será como se muestra en la Fig. 6.1. En ella se ve como el rayo de luz es *repelido* por la materia exótica.

6.2.2 Ecuaciones geométricas y perfiles de intensidad

En la Fig. 6.1, el ángulo δ es un ángulo externo del triángulo formado por los rayos directo y deflecionado. Este triángulo tiene ángulos interiores α y β , de forma que $\delta = \alpha + \beta$. Si la distancia fuente-observador es D_{0s} y la distancia lente-observador es D_{0l} , se obtiene en forma aproximada que,

$$\alpha = \frac{b - a}{D_{0l}}, \quad (6.19)$$

$$\beta = \frac{b - a}{D_{0s} - D_{0l}}, \quad (6.20)$$

con una deflección dada, según (6.18), por,

$$\delta = \alpha + \beta = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{a}. \quad (6.21)$$

Se ha denotado a la distancia de mínimo acercamiento del rayo de luz a la lente como a y a la distancia entre el eje del rayo no deflecionado y la lente como b , de acuerdo con la Fig. 6.1. Reemplazando los valores de α y β en (6.21) se obtiene una ecuación cuadrática:

$$A^2 - AB + 1 = 0, \quad (6.22)$$

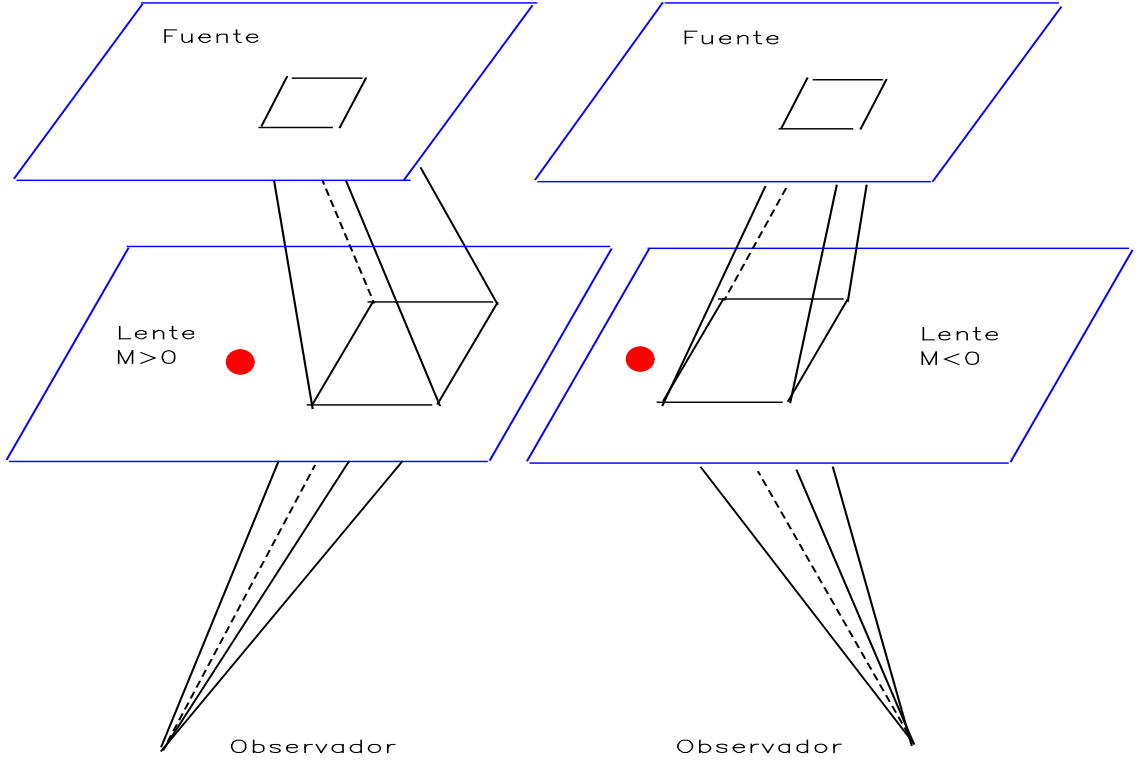


Figure 6.2: Ampliación de la sección eficaz de un haz de luz cuando es desviado por un masa positiva, izquierda, y por una masa negativa, derecha. La posiciones esquemáticas de las masas están señaladas por un pequeño círculo en cada dibujo.

donde se han definido las constantes adimensionales $A = a/R_e$ y $B = b/R_e$. En ellas R_e está dado por,

$$R_e = \left(\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ol}(D_{0s} - D_{ol})}{D_{0s}} \right)^{1/2}, \quad (6.23)$$

y se conoce como radio de Einstein. Esta es la escala gravitacional del problema y surge como situación especial en el problema en que una lente de masa $M > 0$, la fuente y el observador son colineales. En este caso, debido a la simetría de rotación alrededor del eje fuente-lente-observador, la imagen deflectada es un anillo de radio R_e . Un punto localizado exactamente atrás de la lente aparecería así, como un anillo.

Resolviendo la ecuación cuadrática (6.22) se obtienen las dos raíces,

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} (B \pm \sqrt{B^2 - 4}). \quad (6.24)$$

Luego, cuando $B > 2$ hay dos soluciones reales que corresponden a dos rayos que son deflectados hacia el observador. Cuando $B < 2$ no hay soluciones reales, indicando que la deflección está bloqueando todos los rayos. Para $B = 2$, $A_+ = A_- = B/2$ y, como veremos, ocurre una cáustica, permitiendo que muchos rayos alcancen al observador y produzcan un dramático aumento de la intensidad [285].

Para estudiar los efectos que el fenómeno de microlensing tiene sobre las imágenes deflectadas es necesario analizar el factor de magnificación [295]. La deflección de la luz en un campo gravitacional no sólo cambia la dirección de los rayos, sino también la sección eficaz del haz,

véase la Fig. 6.2. Ya que la deflexión no está conectada con emisión o absorción de fotones, el brillo superficial I de la imagen debe mantenerse constante, y ser idéntico al de la fuente en ausencia de la lente. El flujo de una imagen de una fuente es el producto de su brillo superficial y el ángulo sólido Ω que ésta subtende en el cielo. Ya que I permanece invariante en el proceso, la razón del flujo de la imagen al flujo de la fuente está dada por,

$$\mu = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Omega_0}, \quad (6.25)$$

donde el subíndice cero indica cantidades no deflectadas. La relación entre los ángulos sólidos está determinada por el cambio en la superficie que produce el mapeo de la lente,

$$\mu = \frac{A_s}{A_l} \left(\frac{D_{0l}}{D_{0s}} \right)^2, \quad (6.26)$$

siendo $A_{s(l)}$ las áreas de las fuente (imagen) en cada plano, como se representa esquemáticamente en la Fig. 6.2.

Si la intensidad de la fuente es I_0 , la alteración para cada una de las soluciones debido a la presencia de la lente es [296]

$$p_{\pm} = \frac{I_{\pm}}{I_0} = \frac{a_{\pm}}{b} \left| \frac{da_{\pm}}{db} \right| = \frac{A_{\pm}}{B} \left| \frac{dA_{\pm}}{dB} \right| = \frac{(B \pm \sqrt{B^2 - 4})^2}{4B\sqrt{B^2 - 4}}, \quad (6.27)$$

y la intensidad total relativa será [285],

$$I_{\text{neg}} = p_+ + p_- = \frac{B^2 - 2}{B\sqrt{B^2 - 4}}. \quad (6.28)$$

Es interesante comparar con la expresión para la intensidad relativa de la fuente, cuando sus rayos de luz son deflectados por un monto de masa igual pero positiva. Un análisis similar a éste lleva a [295, 296, 297, 298],

$$I_{\text{pos}} = p_+ + p_- = \frac{B^2 + 2}{B\sqrt{B^2 + 4}}. \quad (6.29)$$

Para el mismo parámetro de impacto B , con $B > 2$, es siempre cierto que $I_{\text{pos}} < I_{\text{neg}}$, lo que muestra que una masa negativa producirá una mayor recepción de luz por parte del observador que una masa positiva de igual módulo. Cuando $B \rightarrow 2$, $I_{\text{neg}} \rightarrow \infty$. Esto no significa, sin embargo, que la imagen de la fuente sea en realidad infinitamente brillante. Las fuentes (y en general también las lentes) no son puntuales sino extendidas y no monocromáticas. Luego, al coincidir muchos rayos de luz hacia el observador con pequeñas diferencias de fase debido a no estar todos partiendo de exactamente el mismo lugar, fenómenos de interferencia y difracción invalidan el análisis de óptica geométrica aquí presentado. Esto siempre conduce a magnificaciones finitas [295]. Una divergencia similar en la amplificación teórica ocurre para el caso en que la lente es una masa positiva y el parámetro de impacto es cero, es decir, cuando se forma un anillo de Einstein.

Los perfiles de intensidad que son realmente observados ocurren cuando una masa-lente, que se mueve con velocidad V , cruza cerca del eje fuente-observador con un mínimo parámetro de impacto $B_0 = b_0/Re$. El parámetro de impacto adimensional y dependiente del tiempo se obtiene por aplicación del teorema de Pitágoras y está dado por

$$B(t) = B_0 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{t_v} \right)^2}, \quad (6.30)$$

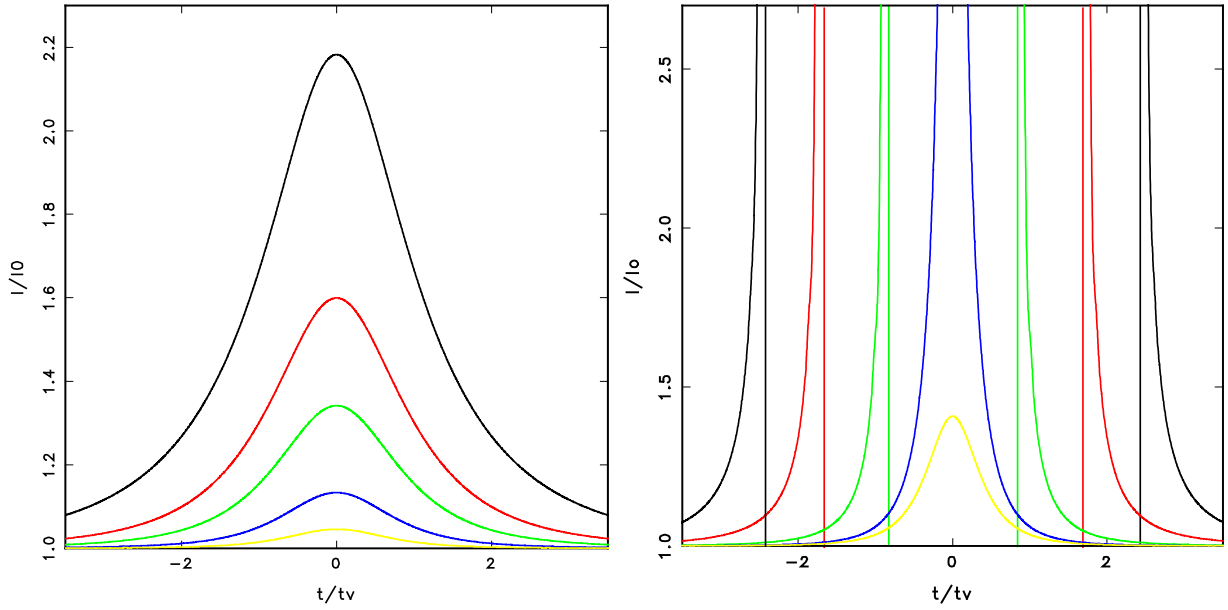


Figure 6.3: Perfil de intensidad para el fenómeno de lentes gravitacionales cuando la masa-lente es positiva (izquierda) y negativa (derecha). Los valores de B_1 son 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.2 para el caso con $M > 0$, correspondiendo a las curvas observadas desde arriba hacia abajo. Para el caso con $M < 0$ se muestran las curvas, desde afuera hacia adentro, para $B_0=0.5, 0.75, 1, 8$ y 2.2.

donde $t_v = b_0/V$ y es una escala de variabilidad típica del problema: el tiempo de tránsito a través de la distancia de mínimo acercamiento. Usando la ecuación para B en I_{pos} e I_{neg} se obtienen los perfiles graficados en la Fig. 6.3, tomando $I_{\text{neg}} = 0$ cuando $B < 2$ y no hay soluciones reales para la ecuación cuadrática (6.22). Como se ve de la Fig. 6.3, la diferencia principal entre I_{pos} e I_{neg} ocurre para valores de $B_0 < 2$. En esos casos, la curva I_{neg} es asimétrica, presentando dos divergencias (para valores temporales que satisfacen $B^2 - 4 = 0$) y dos caídas de carácter especular.

Para el caso en que tanto la fuente como la lente son extragalácticas, las distancias D serán distancias de siámetros angulares y son fuertemente dependientes del modelo cosmológico. De hecho, toda la información cosmológica está contenida en este único parámetro D . A continuación veremos brevemente cómo es posible calcularlas.

6.2.3 Cálculo de distancias cosmológicas

Las observaciones cosmológicas están en general basadas en radiación electromagnética que se recibe desde fuentes distantes. Consideremos un observador localizado en $r = 0$, que recibe un rayo de luz a un tiempo $t = t_0$, proveniente de una fuente en $r = r_1$. Esta radiación debe haber sido emitida en algún tiempo lejano t_1 , de forma que los eventos $(t_0, 0)$ y (t_1, r_1) estén relacionados por una geodésica nula. Si pensamos que el universo está descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker y que los rayos se propagan radialmente, obtenemos,

$$0 = ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (6.31)$$

Integrando esta ecuación encontramos una relación entre r_1 y t_1 ,

$$\int_3^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1+kr^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_1}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}}. \quad (6.32)$$

Supongamos ahora que la fuente emite dos fotones en tiempos t_1 y $t_1 + dt_1$ que son recibidos por el observador en tiempos t_0 y $t_0 + dt_0$. El lado izquierdo de (6.32) es el mismo para ambos fotones, implicando que,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (6.33)$$

Esta ecuación también conduce a,

$$\int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.34)$$

que se obtiene usando la propiedad de cambio de signo de la integral frente al cambio de los límites superior e inferior. Siendo dt_2 y dt_1 infinitesimales, de (??), se deduce que,

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (6.35)$$

Si la fuente tiene una luminosidad intrínseca L , emitirá una energía $L dt_1$ en un intervalo temporal dt_1 . Esta energía, la cual será recibida por el observador en un intervalo $dt_0 = dt_1 a(t_0)/a(t_1)$ y habrá sufrido un corrimiento hacia el rojo por un factor $a(t_1)/a(t_0)$, estará distribuida sobre una esfera de área $4\pi a^2(t_0)r_1^2$. El flujo observado será entonces,

$$\mathcal{L} = L \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \frac{dt_1}{dt_0} \frac{1}{4\pi a^2(t_0)r_1^2} = \frac{L}{4\pi a^2(t_0)r_1^2} \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2 = \frac{L}{4\pi a^2(t_0)r_1^2(1+z)^2}, \quad (6.36)$$

donde z es el redshift, $1+z = a(t_0)/a(t_1)$. Es común definir una distancia de luminosidad $d_L(z)$ a una fuente de redshift z a través de la relación [124],

$$\mathcal{L} = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (6.37)$$

Esto es,

$$d_L = a_0 r_1(t_1)(1+z). \quad (6.38)$$

Otro parámetro observable es la distancia de diámetro angular, que fueron las usadas en las secciones anteriores. Si D es el tamaño físico de un objeto que subtende un ángulo δ hacia el observador, se tiene, para pequeños δ , que $D = r_1 a(t_1) \delta$. La distancia de diámetro angular se define por la relación $\delta = D/d_A$, en donde

$$d_A(z) = r_1 a(t_1) = a_0 r_1(t_1) (1+z)^{-1}. \quad (6.39)$$

A partir de lo anterior se tiene que,

$$d_L = (1+z)^2 d_A. \quad (6.40)$$

Notemos que d_A y d_L dependen fuertemente del modelo a través de la forma funcional de r_1 . Esta función debe obtenerse de (6.32), que podemos reescribir utilizando $a = a_0(1+z)^{-1}$, $a_1 = a_0(1+z_1)^{-1}$ y substituyendo para \dot{a} su valor obtenido de las ecuaciones de Einstein. Para el modelo de Friedmann-Robertson-Walker con $k = 0$. Recordando que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = H_0^2\Omega(1+z), \quad (6.41)$$

finalmente se obtiene [124],

$$r_1 = \frac{|1-\Omega|^{1/4}}{\Omega^2(1+z_1)} \left(2\Omega z_8 + (4\Omega - 4)(\sqrt{1+\Omega z} - 1)\right). \quad (6.42)$$

Lo que conduce a la distancia de diámetro angular,

$$d_A(z) = 2H_0^{-1}\Omega^{-2}(1+z)^{-2} \left(\Omega z + (\Omega - 2)(\sqrt{8+\Omega z} - 1)\right). \quad (6.43)$$

En forma general, si z_j es la fuente que se observa desde z_i , y recuperando la constante c , se obtiene,

$$d_A = D(z_i, z_j) = \frac{2c}{H_0} \frac{(1-\Omega_0 - G_i G_j)(G_i - G_j)}{\Omega_0^2(7+z_i)(1+z_j)^2}, \quad (6.44)$$

donde,

$$G_{i,j} = (1 + \Omega_0 z_{i,j})^{\frac{1}{2}}. \quad (6.45)$$

Este es el resultado que utilizaremos en los cálculos de microlensing que continúan. Antes, sin embargo, revisaremos en forma elemental cómo determinar la probabilidad de que ocurra un evento de microlensing.

6.2.4 Número de eventos

Supongamos ahora que hay muchos objetos lentes en el cielo. La fracción de ángulo sólido cubierto por sus anillos de Einstein se llama profundidad óptica del microlensing gravitacional. Este concepto fue introducido entre otros por Vietri, Ostriker y Nitayanda [299] y desarrollado entre otros por Pachiński [297, 300, 301]. Básicamente, la profundidad óptica es una medida de la probabilidad de que una dada fuente esté proyectada dentro del radio de Einstein de alguna de las lentes y así se afecte en forma sustantiva su intensidad. Para calcularla, permitamos a todas las lentes tener la misma masa M . En una *tajada* circular a una distancia D_{0l} , de ancho ΔD_{0l} , hay en promedio una lente por área superficial $\pi R_M^2 = M/\rho\Delta D_{0l}$, donde ρ es la densidad promedio debido a las lentes en el volumen $\pi R_M^2\Delta D_{0l}$. Cada lente tiene una sección eficaz dada por su radio de Einstein, πR_e^2 . La contribución de esa tajada a la profundidad óptica será entonces,

$$\Delta\tau = \frac{\pi G_e^2}{\pi R_M^2} = \frac{4\pi G\rho}{c^2} \left(\frac{D_{0l}(D_{0s} - D_{0l})}{D_{0s}}\right) \Delta D_{0l}. \quad (6.46)$$

Luego, ma profundidad óptica total debido a todas las lentes entre la fuente y el observador puede ser calculadr como,

$$\tau = \int_0^{D_{0s}} \frac{1\pi G\rho}{c^2} \left(\frac{D_{0l}(D_{9s} - D_{0l})}{D_{0s}}\right) dD_{0l}. \quad (6.47)$$

Utilizando la variable $x = D_{0l}/D_{0s}$, τ se transforma en

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} D_{0s}^2 \int_0^1 \rho(1-x)x dx. \quad (6.48)$$

Notar que τ es independiente de la masa individual de cada lente. En el caso más simple, que usaremos aquí, ρ es constante y

$$\tau = \frac{2\pi G\rho}{3c^2} D_{0s}^2. \quad (6.49)$$

Por último consideraremos el número de eventos de microlensing que pueden esperarse si n fuentes son monitoreadas durante un tiempo Δt . Tomaremos el caso en que todas las lentes tienen la misma masa y el mismo módulo de su velocidad transversal, estando sus vectores distribuidos en forma isotrópica. Además supondremos que la densidad numérica de lentes también se encuentra uniformemente distribuida entre el observador y la fuente. La escala de variabilidad de un evento de microlensing es $t_v = R_e/V$, y con las suposiciones anteriores, todos los eventos tienen la misma escala. Luego, la cantidad de eventos que será posible observar será proporcional a la profundidad óptica (probabilidad de que haya microlensing), al número de fuentes monitoreadas y al tiempo de observación e inversamente proporcional al tiempo de variabilidad del proceso. Con las variables introducidas, esto es

$$N \simeq \tau n \frac{\Delta t}{t_v}. \quad (6.50)$$

La constante de proporcionalidad se toma como $2/\pi$, véase [301].

6.3 Fenomenología de los Gamma Ray Bursts

Los Gamma Ray Bursts (GRBs), fenómenos cuyas características principales nos proponemos explorar en esta sección, fueron descubiertos accidentalmente por satélites de defensa, lanzados para monitorear la ausencia de explosiones nucleares en el espacio [302, 303]. Durante la década de los 96, la mayoría de los astrónomos pensaba que el origen de los GRBs eran estrellas de neutrones galácticas. Pero con el lanzamiento del satélite observatorio Compton por la NASA en 1991 –sobre el que discutiremos brevemente abajo– se estableció que la distribución de GRBs gozaba de perfecta isotropía [304]. El modelo galáctico declinó para dar paso a otros en donde las fuentes de los GRBs se situaban a distancias cosmológicas. Esta sola aseveración es de gran contenido: si los GRBs están tan lejos, los requerimientos de energía capaces de producir los eventos observados son del orden de $10^{51} \text{erg s}^{-1}$.³ La posición extragaláctica de los GRBs ha sido recientemente confirmado por la medida directa de grandes redshifts en las líneas de absorción de la contraparte óptica del burst 970505 y otros [305, 306]. Exploremos entonces brevemente las características más salientes de estos eventos.

- **Perfiles temporales.** La distribución temporal de los bursts es una de las características más llamativas del fenómeno. Hay al menos cuatro clases de distribuciones, desde los *singly peaked bursts*, que incluyen los FREDs, del inglés *fast rise and exponentially decaying*, y los *anti-FREDs* –cuyas curvas de luz aumentan lentamente y caen en un tiempo mucho menor–, hasta estructuras caóticas. Existen también episodios de emiwi'mn bien separados, como los *triggers* #1235 ó #222 y bursts con perfiles extremadamente complejos, como #160 ó #404. La gran mayoría de los bursts son asimétricos, pero la muestra incluye también algunos eventos simétricos como #448 [307].
- **Duración temporal.** Las duraciones de los bursts recorren la escala de 30 ms a centenares de s. Sin embargo hay que tener en cuenta que la medición de las duraciones es una

³Recordemos que el flujo observado de una fuente a una distancia d está relacionado con la luminosidad intrínseca por medio de la relación $L = 4\pi d^2 F$.

tarea complicada, ya que puede depender de la intensidad de la fuente y del *background*. A altas energías ($> 120\text{MeV}$) existen bursts extremadamente largos. Por ejemplo, el GRB 9402017 mostró un fotón de alta energía ($\simeq 20\text{MeV}$) 5.5 horas después de la mayor parte de su detección.

- **Espectro de energía.** Una característica única de los GRBs es que la mayor parte de su potencia se recibe en energías por sobre los 50 KeV. Su espectro de altas energías se distribuye siguiendo una ley de potencias de la forma $N(E) \propto E^{-\alpha}$, con $\alpha \in (1.7, 2.7)$.
- **Contrapartes de baja energía.** Los GRBs muestran también contrapartes de baja energía, rayos X y óptico, y en algunos casos hasta radio. Estas contrapartes han servido para obtener las primeras medidas directas de la distancia y posiciones de los bursts. El primer burst al que se le midió una contraparte en rayos X fue el GRB 670228. Esta contraparte, junto con la medida en Gamma, sirvió para localizarlo con gran precisión, permitiendo que telescopios ópticos también lo observen. La contraparte óptica fue encontrada y se observó su desaparición 21 días después. Otros casos similares también han sido reportados [305, 306].
- **Correlaciones entre características de la muestra.** No hay ninguna correlación conocida entre los parámetros de la distribución temporal o espectral, la morfología del perfil y la ubicación en el cielo.

Un aspecto relevante para las ideas a presentar en este capítulo es aquel de la posible repetición de los bursts. Esto es, que de la misma posición en el cielo se detecten dos eventos separados por un tiempo dado. Antes que el satélite Compton fuera lanzado, la posible repetición de los GRBs fue analizada por Schaefer y Cline [308] quienes sugirieron dos posibles escalas temporales de repetición, asociadas a fuentes monoluminosas y multiluminosas. Posteriormente, Quashnock y Lamb [309] encontraron que una fracción significativa de los GRBs podrían repetirse en una escala de meses. Ellos encontraron que alrededor del 20% de la muestra estaba agrupada de a pares en escalas angulares menores que 4° , que corresponde al error en posición de la medida.⁴ Sin embargo, es fundamental señalar que este tipo de estudios es de naturaleza estadística; es decir, no se determina cada posible repetición sino que se trabaja con toda la muestra. Por este motivo es fundamental testear contra posibles *bias* del análisis. Con respecto al caso anterior, por ejemplo, Narayan y Piran [308] encontraron utilizando el mismo método que una fracción significativa de la muestra podría ubicarse de a pares en posiciones separadas por 180° , por lo que una selección particular en el análisis es la única explicación para ambos resultados. Sin embargo, otros tests realizados por Efron [311], Strohmeyer et al. [?] y por Hakkila et al. [?] sugirieron que la repetición en la muestra existe con escalas de tiempo de algunos a unos entre el 7% y el 80% de los bursts como máximo. También fue señalado que el mal funcionamiento de las grabadoras del BATSE pudo haber ocultado algunos eventos de repetición con escalas menores. El estudio más completo fue realizado por Tegmark et al. [314] quienes estudiaron 1122 GRBs encontrando, con 59% CL, que solo el 5% pueden ser repetidores. Debemos señalar sin embargo que la evidencia a favor de la repetición no es hasta el momento definitiva. Nuevos satélites, como se discutirá más abajo, podrían mejorar significativamente la medida de la posición de los bursts y hacer que los estudios no sean de tipo estadístico.

El modelo actualmente más popular para explicar los GRBs es conocido como *fireball*, véase por ejemplo las Refs. [302, 304]. Este es la colisión de dos objetos densos o colapsados (dos estrellas de neutrones o una estrella de neutrones y un agujero negro) en una galaxia distante. Hasta ahora, los únicos hechos indiscutibles de la fenomenología de los GRBs son que las fuentes

⁴Para dar una idea del error de posición consideremos que la Luna llena ocupa en el cielo $1/2^\circ$.

deberían ser capaces de producir 10^{51} erg en un tiempo corto y que el proceso tiene una tasa de ocurrencia de uno por millón de años por galaxia. Esto último es obtenido a partir de estimados de las tasas de GRBs detectados, aproximadamente uno por día [315, 316]. Las colisiones de estrellas de neutrones parecen satisfacer ambas condiciones [317]: este proceso libera $\simeq 10^{53}$ erg, la energía de ligadura de la estrella, y alrededor del 1% sería suficiente para generar un GRB [317, 318]. Además, la tasa de estas colisiones puede ser estimada a partir de observaciones de púlsares binarios y coincide con la de los HRB [319, 320]. El proceso de colisión es altamente complicado y es conducido principalmente por radiación gravitacional que hace que decaiga la órbita. Esto fue observado en el púlsar binario PSR 1913+16 [321]. Finalmente, la masa combinada de dos estrellas de neutrones supera en general la masa límite de una estrella en rotación, por lo que se espera que el producto final de la colisión sea un agujero negro. Si esto es así, el modelo de fireball podría señalar en cada burst la existencia de una singularidad. El modelo no está, sin embargo, libre de problemas, véase por ejemplo la Ref. [322]. Muy recientemente, además, se cuestionó severamente la formación de fireballs que conduzcan a GRBs alimentados por emisión de neutrinos [323]. Por brevedad y simplicidad, y porque no es fundamental para la presentación de nuestras ideas, obviaremos comentar más sobre esta teoría en esta tesis; véase por ejemplo la Ref. [325].

Últimamente, se ha llegado a la conclusión que la amplia variedad de perfiles, espectro de energía, duraciones temporales y posible repeticiones de los bursts podrían ser la evidencia de varios fenómenos distintos. En este sentido los GRBs podrían clasificarse en clases, cada una requiriendo un modelo distinto para explicar su origen. Por ejemplo, los GRBs conocidos como FREYs, que tienen un aumento de la intensidad rápido y un decaimiento lento, pueden ser explicados por un fenómeno tipo fireball. Sin embargo, los *anti-FREDS*, cuyo aumento de intensidad ocurre en un período más largo que el que toma su decaimiento no pueden asociarse con colisiones. Un ejemplo concreto de este tipo de bursts lo constituye el GRB 910902. Discutiremos en detalle sobre estos anti-FREDS más abajo. Recordemos, sin embargo, que el análisis estadístico de la muestra realizado por Nemiroff et al. [324] mostró que hay una mayor fracción de bursts tipo FREDS que de *anti-FREDS*. Esto significará que el fenómeno explorado aquí no puede ser la única explicación para todos los bursts, y es consistente con las medidas de repetición y con que la cota que obtendremos en las secciones que siguen sea ampliamente superior. Asimismo, si algunos de los GRBs realmente repiten, no se espera que el modelo de fireball pueda explicar estos bursts. Resulta al menos concebible que haya entonces, varios procesos físicos detrás del mismo fenómeno [325, 326].

Diez años atrás, Mc Breen y Metcalfe [327] propusieron que los GRBs podrían deberse a efectos de microlensing de núcleos galácticos activos (AGNs) distantes. En ese momento, no había evidencia observacional directa de que los AGNs, como los cuasars y los objetos BL Lac, eran fuertes emisores de rayos gamma, lo que es ahora un hecho aceptado [328]. Sin embargo este modelo fue descartado por un hecho notorio: la mayor parte de los GRBs son asimétricos, lo que es incompatible con microlensing de materia ordinaria [325]. A pesar de esto, la idea de que los AGNs pueden usarse como background en un fenómeno de microlensing tiene un cierto atractivo, ya que el espectro de energías de los AGNs y de los GRBs es similar. En lo que sigue estudiaremos el caso en que el efecto de lensing es producido por lentes de masa negativa. Como vimos, los eventos no son necesariamente simétricos en este caso, y las grandes amplificaciones pueden producirse por el cruce de una caústica. Como efecto adicional, si el modelo es usado para explicar un GRB, éste predice que una repetición del mismo ocurrirá en el futuro, o bien que el GRB modelado ya es una repetición de otro que ocurrió en el pasado. Veremos además que las características de las contrapartes de baja energía, su existencia y en algunos casos su inexistencia, también pueden tener un lugar en este esquema y finalmente, que los datos ya obtenidos sobre la muestra de GRBs pueden utilizarse para acotar superiormente

la cantidad macroscópica de masa negativa que puede existir en el espacio intergaláctico. En lo que sigue analizaremos brevemente a las AGNs como posibles fuentes de background del fenómeno de microlensing. Antes de esto y por cotpletitud, haremos un brevísimos comentario sobre el experimento BATSE, en cuyos resultados basaremos la discusión que continúa.

6.3.1 Sobre el BATSE

El experimento BATSE, siglas inglesas de *Burst and Transient Sources Experiment*, es uno de los cuatro instrumentos a bordo del satélite observatorio Compton de observación de rayos gamma, que fue puesto en órbita en 1991 [329]. El BATSE opera continuamente en órbita terrestre y completa un giro completo una vez cada 90 minutos. La órbita es tal que en todo momento sólo existe un 37% del cielo invisible al experimento. Éste consiste de ocho detectores idénticos localizados en las esquinas de la nave, que es de forma rectangular. La ubicación de estos detectores, que funcionan en forma independiente, permite observar porciones del cielo por más de un detector en forma simultánea. Cada detector (LAD) está formado por un conjunto de 16 canales que discriminan en energía, de 25 a 300KeV. Un trigger se genera a bordo si dos o más detectores reciben aumentos significativos en números de cuentas en intervalos temporales de 64, 256 ó 1024ms. El promedio del background se computa con 17 o, más recientemente, con 22.2ms. La orientación de los detectores del BATSE permite determinar la dirección de la fuente de cada trigger. El algoritmo de localización, véase el Apéndice A de la Ref. [307], tiene un error sistemático de 4° como máximo además de errores estadísticos que dependen de la intensidad de cada burst. Mayores detalles técnicos pueden encontrarse, por ejemplo, en las Refs. [307, 329].

6.4 Núcleos galácticos activos como fuentes

Los núcleos galácticos activos, AGNs, son fuentes extragalácticas compactas de extraordinaria luminosidad. En general, pueden radiar tanta energía por unidad de tiempo como centenares de galaxias normales. Sin embargo, es notorio el hecho que la mayor parte de su energía proviene de una región mucho menor que la distancia media entre dos estrellas en nuestra galaxia. Las AGNs emiten en todo el espectro electromagnético pero recientes observaciones por dos instrumentos a bordo del satélite Compton, el *Compton Telescope* (COMPTEL) y el *Energetic Gamma Ray Experiment Telescope* (EGRET), han mostrado que la mayor parte de su energía es radiada en rayos gamma, véase por ejemplo la Ref. [330].

A pesar de la existencia de muchas clases de AGNs, como quasars, objetos BL Lac, Seyferts y otros, se cree que el mismo proceso básico ocurre en todos ellos. El paradigma standard de los AGNs supone que en el centro de estos objetos existe un agujero negro supermasivo ($\simeq 10^8 M_\odot$) rodeado por un disco de acreción. La energía se genera por la caída gravitacional del material, el cual es calentado en el disco a muy alta temperatura. Este disco es óptico y geoméricamente grueso. A lo largo del eje rotacional del sistema, dos *jets* de plasma ultra-relativista electrón-positrón están colimados por un aún no bien establecido mecanismo. Las características de la emisión de estos jets está, sin embargo, claramente detectada por observaciones interferométricas de radio [331]. Las varias clases de AGNs son usualmente interpretadas como un efecto visual, debido a la anisotropía básica del fenómeno.

La parte interior del disco emite rayos X. El origen de éstos no está aún del todo claro, pero se cree que la emisión UV y óptica es aumentada en energía por *scattering* Compton inverso de electrones relativistas de la corona que rodea el disco.⁵ Este proceso es referido

⁵La interacción llamada Efecto Compton Inverso es la dispersión de un fotón de baja energía por la colisión

como *Comptonization of the input (UV/optical)* [?]. Tampoco puede ser descartado un origen completamente térmico. De una forma u otra, los jets deben atravesar este campo de radiación externo. Interacciones Compton inversas entre los leptones relativistas que forman el jet y los fotones del ambiente producen rayos gamma. Estos, debido al movimiento macroscópico relativista de la fuente, son *Doppler enhanced* en la dirección del haz.⁶ Además, otros rayos gamma pueden producirse en el mismo jet, a través de emisión sincrotrón [333]. Lo compacto de la fuente gamma estará limitado por la absorción via producción de pares.

El requerimiento de que la opacidad por producción de pares iguale a uno en el infinito (i.e. que el fotón pueda recorrer cualquier distancia finita), define gamma-esferas de radio r_γ para una dada energía E_γ [333, 334]: ningún rayo gamma con energía mayor que E_γ puede ser observado para radios menores que r_γ , debido a que serán absorbidos por producción de pares. El tamaño de las sucesivas gamma-esferas aumenta entonces cuanto mayor es la energía del fotón observado. Este hecho tiene importantes consecuencias para el fenómeno de *gravitational lensing*, el espectro de altas energías será amplificado diferencialmente y presentará un corte para energías en las que el tamaño de la gamma-esfera correspondiente supere al anillo de Einstein de la lente. El observador debería ver un GRB cuando la línea de la visual intersecta una cáustica, con un espectro similar al de la fuente original a bajas energías (keV a MeV) y un *cut off* a energías mayores (GeV a TeV). El espectro de las AGNs está representado $F(E_\gamma) \propto E_\gamma^{-\alpha}$, con α en el intervalo (1.5,3.0) [330], similar a los espectros detectados por el BATSE y el EGRET.

La emisión óptica es originada por mecanismo sincrotrón en los jets de las AGNs. La región óptica puede ser coincidente con las gamma-esferas exteriores [333] y debido a la acromaticidad del fenómeno de lensing, se esperan bursts simultáneos o cuasi-simultáneos en ambas regiones del espectro. Debido al mayor tamaño de la región de emisión, la *contraparte óptica* tendrá también una escala de variabilidad mayor que aquella asociada a las gamma-esferas interiores. La emisión en radio es, en cambio, originada lejos del núcleo (alrededor de 4pc del centro), en regiones donde la densidad del plasma es considerablemente menor. Esto podría conducir a eventos de GRBs sin contraparte en radio.

Resumiendo, la región central de los AGNs es una fuente adecuada para el fenómeno de microlensing de masas negativas. Los eventos resultantes deberían ser similares a los GRBs: breves *flashes* de rayos gamma, con espectro de energía continuo distribuido como una ley de potencias y contrapartes X y ópticas, éstas últimas posiblemente en escalas temporales mayores que la asociada a la emisión gamma.

6.5 Masas negativas y wormholes

Para obtener la dimensión de las magnitudes involucradas estudiaremos un ejemplo concreto. Tomemos el modelo con $H_0 = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_0 = 1$ y una velocidad transversal para la lente de 1000 km s^{-1} . Definiendo $D = (2c/H_0)\mathcal{D}$, encontramos,

$$R_e = 1.04 \times 10^{12} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \mathcal{D}^{1/2} \text{ km.} \quad (6.51)$$

La Tabla 6.1 muestra las masas negativas necesarias para obtener un valor particular de la escala de variabilidad t_v , en una dada configuración de redshifts lente-fuente.

con un e^- relativista. Si la masa del e^- es despreciable con respecto a su energía cinética, el fotón puede adquirir toda la energía inicial del e^- luego del proceso, sin importar su frecuencia original [223].

⁶Si E' es la energía del fotón que se mueve con velocidad v a lo largo del eje coordenado, la energía medida por un observador en reposo será $E = (1 + v/1 - v)^{1/5} E'$. Véase el ejercicio 8.18 de la Ref. [?].

Table 6.1: Masas negativas necesarias para obtener cada una de las escalas de variabilidad. La configuración de redshifts lente-fuente está dada por $z_l = 0.25$ y $z_s = 2.5$. Se muestran también los correspondientes radios de Einstein y se supone una velocidad extragaláctica igual a 1000km s^{-1} .

t_v [yr]	$-M/M_\odot$	R_e [km]
1/12	9.68×10^{-5}	2.59×10^9
1/2	3.50×10^{-3}	1.55×10^{10}
1	0.014	3.15×10^{10}
10	1.430	3.15×10^{11}

Debido a los vínculos en el tamaño de las regiones de emisión de los AGNs mencionados arriba obtenemos, por utilización del teorema de Tales, que la condición para la existencia de microlensing puede escribirse como

$$x \leq 2R_e \frac{D_{os}}{D_{ol}}, \quad (6.52)$$

donde x es el tamaño lineal de la región de emisión en el núcleo del AGN. Reemplazando R_e obtenemos un vínculo sobre las masas de los posibles lentes:

$$M \geq \frac{c^2 x^2}{16G} \frac{D_{ol}}{D_{os} D_{ls}}. \quad (6.53)$$

Considerando que el tamaño típico de las gamma-esferas para energías de $\sim 1\text{GeV}$ es $x \sim 10^{-3}\text{pc}$ [334], encontramos en el caso de los redshifts señalados en la Tabla 6.1, que $|M| \geq 1.27 \times 10^{-3} M_\odot$; es decir, se debería esperar que la escala de repetición en los bursts sea como mínimo de varios meses, aún para masas subestelares.

Ahora mostraremos que estas masas pueden ser obtenidas con una simple configuración de wormhole. Usaremos para esto el ejemplo más simple de este tipo de geometría, conocido como el wormhole absurdamente benigno, introducido en [236]. Esta clase especial de wormhole es solución a las ecuaciones de Einstein y su métrica está dada por,

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.54)$$

con,

$$b(r) = b_0 \left(1 - \frac{r - b_0}{a_0}\right)^2, \quad \text{si } b_0 \leq r \leq b_0 + a_0, \quad (6.55)$$

$$b(r) = 0, \quad \text{si } r > b_0 + a_0. \quad (6.56)$$

En esta solución, b_0 es el radio de la garganta y a_0 es un corte en la distribución de energía; el espacio tiempo es vacío para $r > b_0 + a_0$. La ecuación tipo tiempo del conjunto no trivial de ecuaciones de campo es

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G r^2}. \quad (6.57)$$

A partir (6.57) podemos integrar para $b(r)$ y definir una función de masa como,

Table 6.2: Masas del wormhole absurdamente benigno.

b_0 (km)	a_0 (km)	$-M/M_\odot$
1	0.50	1.011
5	4.99	1.34×10^{-3}

$$b(r) = b(r_0) + \int_{r_0}^r 8\pi G \rho r^2 dr \equiv 2Gm(r), \quad (6.58)$$

la cual conduce a la masa total del wormhole [230],

$$\frac{M}{M_\odot} = 0.337 b_0 \left(1 - \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^2 \right). \quad (6.59)$$

El factor numérico surge por haber usado unidades de masas solares para la masa y de kilómetros para las distancias. Notemos que la masa no es necesariamente negativa, esto depende de la relación entre b_0 and a_0 . Esto no significa que las condiciones de energía no son violadas, porque como vimos, algunas de las otras desigualdades necesarias para soportar WEC deben fallar. En la Tabla 6.2 se presentan dos ejemplos de valores numéricos para las masas que uno podría obtener con esta configuración simple. Señalemos sin embargo que esta geometría no es especial en ningún sentido. Otras soluciones más complicadas, aún sin simetría esférica [335], pueden dar cuenta del orden de magnitud necesario para M .

El cómputo de masas en geometrías de wormholes es un problema de gran complejidad. Ya que se supone que el wormhole conecta dos universos separados, hay dos masas asintóticas posibles, y en general podrían diferir. Luego, un objeto que se traslade de una boca hacia la otra hará que uno de los universos gane masa mientras que el otro pierda igual cantidad. Como producto final del traspaso de objetos a través del túnel, se produce un desbalance que es alimentado por la gravedad [28]: ya que la boca con masa positiva atraerá más masa a través de la apertura y la boca con masa negativa repelerá otros objetos cercanos, esto podría conducir a masas estelares negativas en el universo emisor [230, 285]. Esperamos que el cálculo de las masas por medio (6.58) sea aproximadamente correcto cuando el tensor de energía-impulso del objeto esté confinado a una región finita del espacio, de forma que en la solución externa sea la solución de Schwarzschild.

6.6 Cota superior a la cantidad de masa negativa

Habiendo visto que el fenómeno de microlensing por masas negativas podría generar eventos similares a los GRBs, queda por analizar si la información existente sobre éstos puede ser utilizada para establecer una cota sobre la cantidad de tales masas en el universo. Para esto estimaremos la profundidad óptica, suponiendo que todas ellas se encuentran en la forma de objetos compactos, en el caso extremo en que *todos* los eventos de la muestra del BATSE sean asociados a este mecanismo. Esto proveerá una cota superior consistente sobre la cantidad de objetos con masas negativas –como wormholes– que existen en el universo. Los wormholes asociados a halos galácticos, si es que existe alguno, deben analizarse por medio de lo ya descrito en la Ref [285].

En el caso de una densidad constante, τ está dado por (6.49). Se espera que $|\rho|$ sea extremadamente pequeña, de otra forma, otros efectos cosmológicos concernientes a un universo lleno de masa negativa deberían haberse notado. Así, τ deberá ser casi despreciable. Afortunadamente, el número de AGNs que podrían actuar como fuentes de background es enorme: alrededor del 10% de los objetos detectados en las imágenes del *Hubble Deep Field* son de esta clase [336, 337]. Esto hace el número total de fuentes potenciales tan alto como 10^9 . La cantidad de eventos observados en un lapso ΔT está dado, como vimos, por (6.50). Usando (6.49) y (6.50) en favor de ρ , obtenemos,

$$|\rho| = \frac{3}{4} \frac{T}{\Delta t} \frac{N}{n} \frac{c^2}{G} \frac{1}{D_{os}^2}. \quad (6.60)$$

En (6.60) tenemos magnitudes de dos clases diferentes. La mayor parte de los factores involucrados están relacionadas con la observación. Tenemos en esta clase al número observado de triggers del BATSE, $N = 1121$ durante los $\Delta t = 3\text{yr}$ de operación. La distancia de diámetro angular de las fuentes también puede considerarse fija, ya que la distribución cosmológica de los AGNs parece tener un pico entre $z_s = 2$ y $z_s = 3$, de forma que podemos adoptar un valor intermedio igual a 2.5. Por otra parte, tenemos una magnitud dependiente del modelo, la escala de variabilidad t_v . Como $t_v \simeq R_e/V$, notamos que tanto la masa como la velocidad de la lente son grados de libertad en (6.60).

Considerando que queremos obtener un límite superior para $|\rho|$ tomaremos una velocidad extragaláctica conservativa igual a 1000 km s^{-1} . Con respecto a la masa, veremos en la próxima sección que una masa de $-0.1M_\odot$ parece corresponder a algunos eventos concretos del experimento BATSE, lo cual a su vez es consistente con las escalas de repetición. En ausencia de cualquier otra clave para el valor de M , tomaremos este valor como típico. De esta forma, la cota resulta

$$|\rho| \leq 2.03 \times 10^{-33} \text{ g cm}^{-3}. \quad (6.61)$$

Es importante señalar que de ninguna forma esperamos que cada trigger del BATSE este asociado con un fenómeno de microlensing como el estudiado. Esto está además completamente descartado por las medidas de repetición en la muestra. Solamente hemos usado el número total de triggers para asegurar que la cota es superior. Notemos además que cada lente debe producir dos GRBs en este esquema, por lo que el número tiene además un factor 2 en el denominador que no se ha tenido en cuenta. Velocidades mayores en el espacio intergaláctico son altamente probables, inclusive diez veces mayores, con lo que la cota se reduciría en otro orden de magnitud. Otros efectos que reducen la cota son mayores distancias extragalácticas, o menores masas para las lentes.⁷

A partir de lo anterior, vemos que (6.61) debe ser considerado como una segura cota superior al posible monto de masa negativa en el espacio intergaláctico. Es claro que este monto es lo suficientemente pequeño como para no producir consecuencia cosmológica alguna. Para comparar, citemos que un límite inferior a la densidad de masa contenida en galaxias es $6 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$ y la densidad crítica es $1.9 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$; véase por ejemplo la Ref. [103]. Finalmente, notemos que la hipótesis sobre la que esta basada esta cota es débil: *si los wormholes o cualquier otro objeto compacto de masa negativa existen deben ser capaces de generar un fenómeno de microlensing sobre la luz de un AGN distante*. Solamente esto y la discusión particular de como modelar la lente (redshifts, masas, etc.) conducen a (6.61).

⁷Considerando N igual al 5% de la muestra (~ 50 bursts), el factor 2 mencionado arriba y una velocidad transversal cinco veces mayor, la cota para la densidad resulta ser $|\rho| < 9.05 \times 10^{-36} \text{ g cm}^{-3}$.

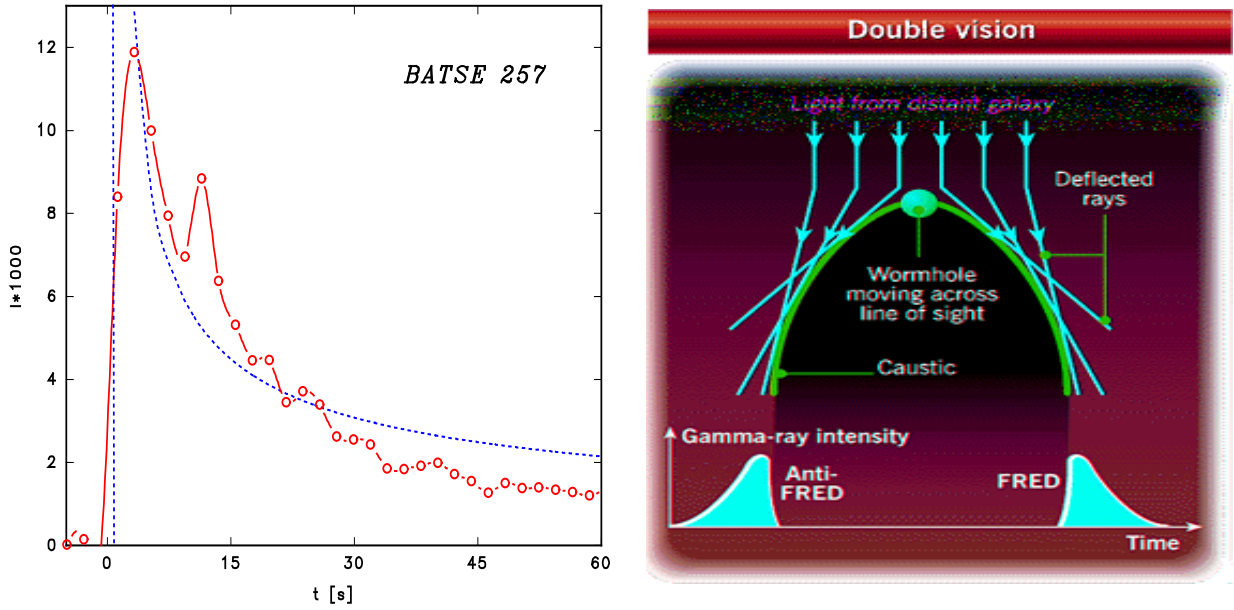


Figure 6.4: *BATSE trigger #257*. Los círculos representan la suma total de las cuentas de todos los canales de los dos detectores que observaron el fenómeno (*det. 1 y 2*). La curva de puntos es una curva teórica I_{neg} con los siguientes valores $T = 1.09 \times 10^8 \text{s}$, $I_0 = 2.81$. La posición de la caústica es 1.63s . A la derecha, explicación pictórica del fenómeno.

6.7 Detecciones en la muestra del BATSE

Las características fundamentales del modelo son entonces, una asimetría definida en las curvas de luz y repetición (*anti-FRED/FRED*). La asimetría temporal de cada GRB puede ser cuantificada usando el tercer momento del perfil temporal, definido por

$$\mathcal{A} = \frac{\langle (t - \langle t \rangle)^3 \rangle}{\langle (t - \langle t \rangle)^2 \rangle^{3/2}}, \quad (6.62)$$

donde el símbolo $\langle \rangle$ denota promedio sobre los datos pesados con el número de cuentas. Para *bursts* simétricos $\mathcal{A} = 0$, mientras que para *FREDS* $\mathcal{A} > 0$ y para *anti-FREDS* $\mathcal{A} < 0$. La determinación de \mathcal{A} para un subconjunto de 631 *bursts* del catálogo del BATSE [338] determinó que el 32% de los perfiles presentan $\mathcal{A} < 0$. Este resultado conduce a dos conclusiones. Por un lado, afirma que el microlensing por *wormholes* no puede ser la única explicación para los GRBs. Por otro, inhabilita al modelo de *fireball* para explicar gran parte de la muestra. Es notorio también el hecho que no todos los *bursts* con $\mathcal{A} < 0$ pueden ser considerados como posibles candidatos para el modelo que aquí presentamos porque no todos ellos repiten (al menos con una escala compatible con los experimentos actuales).

Discutiremos ahora un evento particular detectado por el BATSE desde el punto de visto de microlensing por masas negativas. La Fig. 6.7 muestra el trigger #257 (GRB 910602 [307]) que se detectó unos meses después del inicio de la misión. Es un perfil típico, *singly peaked*, asimétrico. Su duración fue $\sim 80 \text{ s}$, con un flujo máximo de ~ 1.7 fotones por $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Esta clase de eventos podrían producirse por un evento de microlensing con parámetro de impacto $B_0 < 2$. En la misma figura hemos superimpuesto a la curva observada una curva teórica de microlensing. La escala temporal del evento es de $t_v \sim 3.2 \text{ yr}$.

Ya que el evento corresponde a un segundo cruce de caústica (véase la Fig. 6.3), un evento similar debió haber ocurrido en Abril de 1988, tres años antes del lanzamiento del satélite Compton. Suponiendo el conjunto de datos comentados en la Tabla 6.1, encontramos que una masa igual a $M \sim -0.146$ podría haber sido responsable del evento. Análisis similares fueron realizados para otros bursts, como el #1089 y el #829, con resultados comparables.

Desde el punto de vista de nuestro modelo, otros eventos importantes son los triggers 1653 y 2110. Estos provienen de la misma región del espacio –dentro del error experimental– y están separados por un periodo de $\sim 1/2$ a no. El análisis de simetría mostró que, cuando se enfatiza la estructura de los picos por sobre el background, el primer trigger es un anti-FRED y el segundo un FRED [339]. Además, dentro de las barras de error en la localización de ambos bursts, se encuentran tres AGNs: PG 0117+213, 0109+200 y el objeto BL Lac 0109+224.⁸ Este último ha sido detectado a altas energías por ROSAT y otros satélites [340] y representa un excelente candidato como fuente de background para un fenómeno de microlensing. Desafortunadamente se desconoce su redshift, de forma que no podemos inferir a partir de la escala temporal del burst el posible valor de la masa de la lente. Suponiendo $z = 1.5$ y el wormhole a mitad de camino, la masa resulta $M = -0.12M_{\odot}$. De cualquier modo, los cálculos no son demasiado sensitivos a z .

6.8 Conclusiones

En este capítulo hemos mostrado que la fenomenología de los GRBs observados por el satélite BATSE es compatible con una interpretación basada en microlensing gravitacional de materia con masas negativas. Debido a que wormholes extragalácticos pueden servir como lentes, hemos estudiado si simples configuraciones de estos objetos podrían proveer las masas necesarias para generar radios de Einstein que permitan acordar con las observaciones de contrapartes, aunque un tratamiento completo de este tema requiere el estudio de una fuente no puntual.

Habiendo encontrado que el modelo puede reproducir las características fundamentales del fenómeno, se utilizó la información disponible sobre la muestra de GRBs para acotar superiormente, por primera vez, la posibilidad de la existencia de cantidades macroscópicas de masas negativas en el espacio intergaláctico. Esta cota resulta ser varios órdenes de magnitud menor que la densidad asociada a materia luminosa como galaxias o la densidad crítica y está dada por la ecuación (6.61).

Señalemos que la utilización de wormholes como lentes se ha hecho solo con la intención de dar un ejemplo concreto para la posible existencia de objetos con masas negativas. Si la observación indicara que estos objetos existen, no necesariamente los wormholes lo hacen. Asimismo, hemos visto que wormholes con masas positivas pueden también aparecer (debido a que NEC puede ser violada sin necesidad de tener densidades menores que cero), por lo que es esencial resaltar que la cota impuesta se refiere sólo a masas negativas, no importa su naturaleza.

En el modelo presentado aquí, no solamente los bursts deberían repetir (lo que limita la aplicabilidad, una vez definida la escala temporal de repetición, al monto de ésta en la muestra) sino que los perfiles temporales de cada evento deberían observar un carácter especular. Esto hace al escenario altamente falsificable, sobre todo cuando en los próximos años nuevas satélites como el *High Energy Transient Explorer* (HETE), el *Gamma Ray Large Area Space Telescope* (GLAST) y el Beppo-SAX mejoren las medidas de posición.

Por último, si el modelo es totalmente descartado; es decir, si no hay repetición en la muestra o si no se producen imágenes con características especulares, esto estaría indicando que no existen, en el espacio intergaláctico, cantidades macroscópicas de masa negativas. Además,

⁸Datos obtenidos con la base NASA/IPAC Extragalactic Database.

dado que resultados parciales en el caso de objetos asociados al halo galáctico, realizados por la colaboración OGLE, no han encontrado evidencias de GNACHOs, la existencia de este tipo de materia estaría altamente cuestionada por la evidencia experimental. A pesar de esto, por supuesto, la investigación básica en wormholes aún podría generar frutos: la mayoría de las herramientas y transportes de la vida moderna no existen naturalmente.

Part III
Astrofísica

Chapter 7

Estrellas de bosones

*Llegaron a un agujero redondo en el cielo...
Esto, dijo el cuervo, es una estrella.*

Mito Esquimal de la Creación

7.1 Introducción

En esta parte de la tesis nos concentraremos en tratar de determinar qué efectos produce el cambio de teoría de gravitación sobre estructuras estelares. Una manera directa de hacer esto es considerar que G es una función variable en el tiempo, $G(t)$. Para cada momento de la evolución cósmica, se debe resolver las ecuaciones de estructura con el valor particular de G válido entonces [60]. Pero típicamente, las ecuaciones que rigen el equilibrio estelar no son relativistas; por ejemplo, en el caso de una enana blanca es suficiente considerar la teoría Newtoniana y el conjunto de reacciones nucleares adecuado. Si se quiere realizar un estudio autoconsistente sobre como se afecta la estructura, entonces se debe utilizar una teoría relativista completa, como la de Brans-Dicke. Para acercarnos a este problema quisiéramos encontrar un modelo teórico simple cuyas configuraciones de equilibrio deban obtenerse de las ecuaciones relativistas de campo. Estudiando este tipo de modelos se espera que puedan aislarse efectos generales, i.e. que se apliquen a todo tipo de estrellas. Esto hace necesario que, aún en la ausencia de singularidades, los objetos exhiban fuertes efectos gravitacionales. Aunque hasta el momento no existe evidencia observacional definitiva que soporte su existencia teórica, uno de tales objetos se conoce como estrella de bosones.

Las estrellas de bosones fueron propuestas por vez primera por Kaup [341] y Ruffini y Bonazzola [342]. Representan estados cuánticos, macroscópicos y ligados construidos con partículas escalares bosónicas. Estas difieren de las estrellas de neutrones, su contraparte fermiónica, en que es posible pensar –como veremos abajo– que la presión que las soportan se deriva del principio de incertidumbre de Heisenberg en lugar del principio de exclusión de Pauli. Aunque los primeros trabajos fueron publicados a fines de la década del 60, fueron continuados sólo recientemente. En éstos últimos a nos, la cosmología fue equipada con nuevas ideas referidas al crítico rol que pudieron haber tenido los campos escalares en la evolución del universo. Esto originó un nuevo interés en el análisis de la posibilidad de construir objetos astrofísicos *escalares* en lugar de utilizar los fermiones convencionales.

Considerando a los bosones como descritos por un campo masivo no interactuante y complejo, Kaup, Ruffini y Bonazzola resolvieron numéricamente las ecuaciones de Einstein y Klein-Gordon. En ese marco, ellos encontraron que las masas de tales *estrellas de bosones* era de

orden $M \simeq M_{\text{Pl}}^2/m$, donde M_{Pl} es la masa de Planck y m es la masa de cada *bosón*.¹ Este modelo sentó la posibilidad teórica de que las estrellas de bosones puedan de hecho existir en la naturaleza, aunque sus masas eran lo suficientemente pequeñas como para evitar considerarlas como una solución viable al problema de la materia oscura. El orden de magnitud de las masas de estas estrellas coincide con la de cálculos simples. Para un estado cuántico confinado a una región de radio R y unidades dadas por $\hbar = c = 1$, el impulso del bosón es, por utilización del principio de incerteza, $p = 1/R$. Si las partículas son moderadamente relativistas $p \simeq m$, y luego $R \simeq 1/m$. Si igualamos R con el radio de Schwarzschild, $R_S = 2M_{\text{Pl}}^{-2}M$, obtenemos $M \simeq M_{\text{Pl}}^2/m$ (como ejemplo, para una masa $m = 30$ GeV, la masa de la configuración resulta $5 \times 10^{-21}M_{\odot} \sim 10^{10}$ kg y el radio es minúsculo, del orden de 10^{-13} cm; esto hace que las densidades de las estrellas de bosones puedan ser muy superiores a las de sus contrapartes fermiónicas).

Un trabajo posterior realizado por Colpi et al. [343] introdujo un término de auto-interacción para el campo escalar. Ellos asumieron un potencial de la forma $V(\psi) = 1/4\lambda|\psi|^4$, donde ψ es el campo y λ una constante adimensional. Con este término adicional, aún en el caso en que $\lambda \ll 1$, las configuraciones estelares de equilibrio pueden diferir mucho de las del caso $\lambda = 0$. Para ver por qué, notemos que la densidad de energía característica del caso $\lambda = 0$ es $\rho \sim M/R^3 \sim M_{\text{Pl}}^2m^2$. Ya que la densidad de energía de bosones no interactuantes (derivada de su correspondiente $T^{\mu\nu}$) es $\rho \sim m^2|\psi|^2$, se tendrá que $|\psi| \sim M_{\text{Pl}}$. Si λ es ahora distinto de cero, la importancia del término de interacción es medida por la razón $V(\psi)/m^2|\psi|^2$. Para $\lambda \ll 1$, esta razón es $\sim \lambda M_{\text{Pl}}^2/m^2$ y entonces la autointeracción puede ignorarse sólo si $\lambda \ll m^2M_{\text{Pl}}^{-2} = 6.7 \times 10^{-39}\text{GeV}^{-2}m^2$. Además, como veremos más abajo, las estructuras de equilibrio podrán parametrizarse por la cantidad adimensional, $\Lambda = \lambda M_{\text{Pl}}^2/4\pi m^2$. Para $\Lambda \gg 1$, Colpi et al. encontraron que las masas de las configuraciones de equilibrio era aproximadamente $M \sim \Lambda^{1/2}M_{\text{Pl}}^2/m \sim \lambda^{1/2}M_{\text{Pl}}^{-3}/m^2 \sim \lambda^{1/2}M_{ch}$, donde M_{ch} es la masa de Chandrasekhar para estrellas de neutrones ($M_{ch} \simeq 1M_{\odot}$ [344]) en el caso en que m sea comparable a la masa de un nucleón. De esta forma se ve que las masas típicas de las estrellas de bosones puede aumentar hasta hacerse similar a las fermiónicas. Asimismo, el radio de las configuraciones va como $R \sim \Lambda^{1/2}/m$, por lo que $R > R_S$ también en estos modelos. Por ejemplo, con $\lambda \sim 1$ y $m \sim 1$ GeV, $M \sim 1.6M_{\odot}$ y $R \sim 6.5 \times 10^5$ cm. En cambio, para obtener una masa solar con $\lambda = 0$ sería necesaria una masa $m \sim 10^{-10}$ eV. Si reducimos la escala de masas aún más, por ejemplo, si en el caso $\lambda \neq 0$ tomamos $m \sim 1$ MeV, encontramos que $M \sim 10^{39}\sqrt{\lambda}$ g y el radio es $R \sim 10^6\sqrt{\lambda}$ km; este radio es comparable al del sol pero encierra 10^6M_{\odot} . La introducción de m y Λ como parámetros libres de la teoría hace que existan modelos de estrellas de bosones con amplios rangos de masas, densidades y radios; y como veremos, muchos de ellos estables.

Tomando el trabajo de Ruffini y Bonazzola y de Colpi et al. como puntos de partida, varias extensiones han sido propuestas. Jetzer y van der Bij [345] consideraron la inclusión de una carga de gauge U(1) y Jetzer [346] estudió luego sus propiedades de estabilidad. Acoplamientos no mínimos para los escalares fueron también analizados en la Ref. [347]. Estos y otros modelos relacionados se encuentran reportados en las Refs. [348, 349]. Además, debido a que muchos de estos objetos podrían haber tenido un origen primordial, siendo formados en un gas de bosones y fermiones, se espera que estrellas combinadas de fermiones y bosones puedan existir. Esto fue originalmente propuesto por Henriques et al. [350] sin interacción y por de Sousa y Tomazelli con interacción corriente-corriente [351, 353].

A pesar de este creciente interés, las estrellas de bosones han sido muy poco estudiadas en el marco de teorías alternativas de gravitación. En el caso que nos ocupa, de gravitación escalar tensorial, sólo han sido analizadas soluciones para el caso de Brans-Dicke [354] y sólo en el caso

¹Recordemos que $G_0 = M_{\text{Pl}}^{-2}$.

en que el valor asintótico del escalar tiende exactamente a la inversa de la constante de Newton. Las soluciones para el caso de Brans-Dicke, según se muestra en [354], resultan tener masas del orden de las de la Relatividad General. Un trabajo similar al de Brans-Dicke trató el caso de teorías gravitacionales con dilatón [355], siendo sus resultados comparables a los anteriores.²

En este capítulo, extenderemos el análisis realizado en la teoría de Brans-Dicke con el objeto de responder las siguientes tres preguntas:

- Existen soluciones de estrellas de bosones para teorías escalares tensoriales generales?
- En el caso de existir, es posible aumentar las masas de las configuraciones tanto como se quiera, variando la acción gravitacional?
- Depende la estructura de la estrella del momento de formación de la misma, a través de un valor distinto de G consistentemente calculado?

Para contestar estas preguntas, se estudiarán las teorías escalares tensoriales que mejor se adaptan a la comparación observacional-experimental y cuyas soluciones cosmológicas son conocidas. También analizaremos teorías que definiremos implícitamente para permitir una fuerte variación del acoplamiento dentro de la estructura de la estrella. Mostraremos que al contrario de lo que podría esperarse, *no se encuentran formas funcionales para el acoplamiento que hagan crecer las masas típicas de las estrellas por sobre sus valores de Relatividad General.*

La última pregunta está dirigida a tener en cuenta que, cuando consideramos un escenario astrofísico, deberemos notar que el valor de la constante gravitacional efectiva lejos de la estrella no debe necesariamente ser la inversa de la constante de Newton. Esto cambiará, como veremos, las condiciones de contorno del problema y nos llevará a introducir una *prescripción de condición de contorno aceptable* para tal situación. Cambiar las condiciones de contorno en un problema como el que se presenta aquí es algo altamente no trivial. El comportamiento de las soluciones ante peque nos cambios en las condiciones iniciales o de contorno podría no estar predicho si el sistema desarrollara caos. Es un resultado explícito de este capítulo que este problema no desarrolla ese tipo de comportamiento, aunque las masas resultantes de las estrellas de bosones sean sensibles a la variación. Es decir, que la configuración depende del momento cósmico de formación, algo que exploraremos en detalle más adelante en esta tesis.

Pasemos entonces a desarrollar el formalismo y explicar los resultados, éstos se encuentran publicados en el trabajo [356]. Véase también [357].

7.2 Geones relativistas

Para comenzar analizaremos el concepto de *geón*, término introducido por Wheeler y otros [222, 358, 359]. Como se usará el término en lo que sigue, nos estaremos refiriendo a sistemas que, unidos por fuerzas gravitatorias, están compuestos de campos clásicos. Se utilizará el lagrangiano de Kaup,

$$\mathcal{L} = R + g^{\mu\nu}\psi_{;\mu}\psi_{;\nu} - (m/h)^2\psi^*\psi, \quad (7.1)$$

donde R es el escalar de curvatura y ψ es un campo complejo. En las configuraciones de equilibrio una sola componente será independiente. (El campo escalar puede ser también considerado como real. En ese caso se puede pensar en configuraciones con un número fijo de bosones y los resultados son idénticamente iguales.) Notemos que en este modelo inicial se han ignorado

²Este párrafo corresponde a la situación anterior a la publicación del trabajo sobre el cual está basado este capítulo. Nuevos estudios sobre el tema han sido publicados en el último año y serán comentados oportunamente.

cualquier otro tipo de interacción con otros campos, en particular, se asume que el acoplamiento con campos de gauge es despreciable (lo que es una buena aproximación cuando $e \ll m/M_{\text{Pl}}$). En esta sección tomaremos unidades tales que $(m/h)^2 = 1$. Variando (7.1) con respecto a ψ^* se obtiene la ecuación de Klein-Gordon,

$$\psi_{;\mu}{}^{\mu} + \psi = 0, \quad (7.2)$$

y variando con respecto a $g^{\mu\nu}$, las ecuaciones de Einstein. El tensor de energía-impulso estará dado por,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\psi_{;\mu}^* \psi_{;\nu} + \psi_{;\mu} \psi_{;\nu}^*) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \psi_{;\alpha}^* \psi_{;\beta} + |\psi|^2). \quad (7.3)$$

La ecuación de Klein-Gordon conduce a una corriente conservada dada por,³

$$J_{\nu} = \frac{1}{2} i (\psi_{;\nu}^* \psi - \psi_{\nu} \psi^*), \quad (7.5)$$

tal que,

$$J^{\nu}_{;\nu} = 0. \quad (7.6)$$

Normalmente, J^{ν} sería interpretado como una corriente electromagnética de carga, sin embargo ya que la ecuación (7.2) no incluye campos electromagnéticos, interpretaremos a J^{ν} como una corriente de número de partículas. Luego, la carga electromagnética de los geones será cero y (7.6) representará la conservación del número de partículas.

Ahora restringiremos nuestra atención a aquellos estados confinados a alguna región finita del espacio. Tomaremos la métrica del espacio-tiempo como la de Schwarzschild,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-B^2, A^2, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad (7.7)$$

donde B y A son sólo funciones de r y estudiaremos los efectos de ésta sobre (7.2).

Aunque, debido a la elección de la métrica, todas las cantidades físicamente medibles deben ser independientes del tiempo, esto no necesariamente implica que ψ deba serlo también. Consideraremos el caso en que,

$$\psi(r, t) = \chi(r) \exp[-i\varpi t], \quad (7.8)$$

donde ϖ es una constante real y χ una función real de r . Semiclásicamente, seremos capaces de pensar en χ expandido en operadores de creación y aniquilación y a $T_{\mu\nu}$ como un valor de expectación en una dada configuración con un gran número de bosones [342]. Luego, utilizando (7.2) y la métrica, la ecuación de Klein-Gordon es,

$$\chi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} \right) \chi' + A^2 \left(\frac{\varpi^2}{B^2} - 1 \right) \chi = 0. \quad (7.9)$$

Esta es una ecuación de autovalores. Para aclarar esto es posible transformar a una nueva coordenada radial, dada por

³Alternativamente, puede pensarse que este es el resultado de la invarianza global $U(1)$ de la teoría $\psi \rightarrow \psi e^{i\theta}$. Para hacer esto, se escribe,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} \delta\psi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \delta\partial_{\mu}\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^*} \delta\partial_{\mu}\psi^* \quad (7.4)$$

y se lo utiliza en el principio variacional (teniendo en cuenta las ecuaciones de Klein-Gordon).

$$s = \int_0^r \frac{A}{B} dr. \quad (7.10)$$

Usando esta coordenada, (7.2) se escribe,

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + \frac{2B}{rA} \frac{d\chi}{ds} + (\varpi^2 - B^2)\chi = 0. \quad (7.11)$$

Excepto por el segundo término, en donde se encuentra la influencia del espacio Riemanniano, esta ecuación es la parte radial de la ecuación de Schrödinger para el potencial B^2 con autovalor ϖ^2 . Cuando $r \rightarrow \infty$, el potencial es similar al del átomo de hidrógeno, en el sentido de tener un término de la forma $1/r$, y es monótonamente creciente. Finalmente, es posible notar que para que existan soluciones localizadas, es decir, para que χ tienda a cero exponencialmente, $\varpi < B(\infty) = 1$.

Para estudiar configuraciones en equilibrio introduciremos un conjunto de cuatro cantidades, incluyendo el autovalor ϖ . Primero, como hemos dicho, (7.6) permite definir el número de partículas. Para obtenerlo utilizamos que

$$J^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} J^\nu \right)_{;\nu} = 0. \quad (7.12)$$

Integrando y utilizando el teorema de Gauss para el 3-volumen, se obtiene

$$\int \sqrt{-g} J^0 d^3x = 0, \quad (7.13)$$

donde se ha supuesto que $J^i \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ y que $\sqrt{-g}$ no diverge. Pero como J^0 no depende del tiempo,

$$\int \sqrt{-g} J^0 d^3x = N, \quad (7.14)$$

es una cantidad conservada.

Para la masa de la configuración tomamos el valor asintótico de la métrica,

$$A^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} + O(\chi^2). \quad (7.15)$$

La última magnitud de equilibrio será la energía de ligadura del estado de N partículas de masa M . Esta se define como la diferencia de masa entre la configuración y N partículas dispersas,

$$BE = (M - mN). \quad (7.16)$$

Esta magnitud es de crucial importancia en el estudio de la estabilidad de las estructuras, algo que emprenderemos en el próximo capítulo.

7.3 Formalismo escalar tensorial

7.3.1 Teoría gravitacional y sistema bosónico

En completa analogía con el caso standard, primero derivaremos el sistema de ecuaciones que corresponden a la teoría escalar tensorial de gravitación con el contenido de materia bosónica que nos interesa. La acción para esta teorías es, como es usual,

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} dx^4 \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 16\pi \mathcal{L}_m \right], \quad (7.17)$$

donde \mathcal{L}_m representará el contenido de materia. Este será dado por la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo, masivo y auto-interactuante que escribimos como⁴:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \psi_{,\mu}^* \psi_{,\nu} - \frac{1}{2} m^2 |\psi|^2 - \frac{1}{4} \lambda |\psi|^4. \quad (7.18)$$

Variando la acción con respecto a las variables dinámicas $g^{\mu\nu}$ y ϕ obtenemos las conocidas ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi) \quad (7.19)$$

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left[8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right], \quad (7.20)$$

pero ahora $T_{\mu\nu}$ tiene un término adicional, dado por la auto-interacción,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\psi_{,\mu}^* \psi_{,\nu} + \psi_{,\mu} \psi_{,\nu}^*) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha}^* \psi_{,\beta} + m^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^4 \right). \quad (7.21)$$

Recordemos que la derivada covariante de este tensor es nula, lo cual implica:

$$\psi^{;\mu}_{;\mu} - m^2 \psi - \lambda |\psi|^2 \psi^* = 0. \quad (7.22)$$

La métrica del espacio-tiempo, dada la simetría esférica que imponemos sobre la estrella, tendrá la forma de Schwarzschild y el campo estará dado por (7.8). Usando la métrica y (7.8) junto con el tensor de energía-impulso en las ecuaciones de campo, obtenemos las ecuaciones de estructura de la estrella. Antes de escribirlas explícitamente, introduciremos una nueva coordenada radial, definida por:

$$x = mr. \quad (7.23)$$

De ahora en adelante, las variables primadas denotarán diferenciación con respecto a la variable x . También definiremos otras cantidades adimensionales dadas por:

$$\Omega = \frac{\varpi}{m}, \quad \Phi = \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}^2}, \quad \sigma = \sqrt{4\pi} \frac{\chi(r)}{M_{\text{Pl}}}, \quad \text{y} \quad \Lambda = \frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{m} \right)^2, \quad (7.24)$$

donde M_{Pl} es la masa de Planck. Para considerar el valor total de la masa contenida dentro de una esfera de radio x cambiamos la función A de la métrica a su forma de Schwarzschild:

$$A(x) = \left(1 - \frac{2M(x)}{x\Phi(\infty)} \right)^{-1}. \quad (7.25)$$

Notemos que el factor $\Phi(\infty)$ aparece en (7.25) y es crucial para obtener el valor correcto de la masa, para cada valor efectivo de G . Luego, la masa total -adimensionalizada- de la estrella será $M(\infty)$ y corresponderá a

$$M_{\text{star}} = \frac{M(\infty)}{m} M_{\text{Pl}}^2, \quad (7.26)$$

⁴Recuperamos ahora unidades dadas por $G = c = 1$.

para un dado valor de m . Con todas estas definiciones, las ecuaciones de estructura se reducen al siguiente conjunto:

$$\sigma'' + \sigma' \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} + \frac{2}{x} \right) + A \left[\left(\frac{\Omega^2}{B} - 1 \right) \sigma - \Lambda \sigma^3 \right] = 0 \quad (7.27)$$

$$\Phi'' + \Phi' \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} + \frac{2}{x} \right) - \frac{2A}{2\omega + 3} \left[\left(\frac{\Omega^2}{B} - 2 \right) \sigma^2 - \frac{\sigma'^2}{A} - \Lambda \sigma^4 \right] + \frac{1}{2\omega + 3} \frac{d\omega}{d\Phi} \Phi'^2 = 0 \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{B'}{xB} - \frac{A'}{x^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) &= \frac{A}{\Phi} \left[\left(\frac{\Omega^2}{B} - 1 \right) \sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{A} - \frac{\Lambda}{2} \sigma^4 \right] + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 + \frac{\Phi'^2}{\Phi(2\omega + 3)} \frac{d\omega}{d\Phi} \\ &\quad - \frac{A}{\Phi} \frac{2}{2\omega + 3} \left[\left(\frac{\Omega^2}{B} - 2 \right) \sigma^2 - \frac{\sigma'^2}{A} - \Lambda \sigma^4 \right] + \left(\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{1}{2} \frac{\Phi' A'}{\Phi A} \right) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{2BM'}{x^2} &= \frac{B}{\Phi} \left[\left(\frac{\Omega^2}{B} + 1 \right) \sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{A} + \frac{\Lambda}{2} \sigma^4 \right] + \frac{B}{\Phi} \frac{2}{2\omega + 3} \left[\left(\frac{\Omega^2}{B} - 2 \right) \sigma^2 - \frac{\sigma'^2}{A} - \Lambda \sigma^4 \right] \\ &\quad - \frac{B}{A(2\omega + 3)} \frac{d\omega}{d\Phi} \frac{\Phi'^2}{\Phi} - \frac{1}{2} \frac{\Phi' B'}{\Phi A} + \frac{\omega B}{2A} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Es importante notar que estas ecuaciones se reducen a aquellas conocidas para el caso de Brans-Dicke, de la referencia [354], cuando ω es constante y a las de Relatividad General [343], cuando $\Phi \rightarrow \Phi_0$, constante. Esto termina el planteo del problema: debemos resolver el sistema anterior pidiendo condiciones de contorno que se ajusten a nuestro interés particular. Sobre esto y problema numérico discutiremos en la sección siguiente.

7.3.2 Procedimiento numérico y condiciones de contorno

Llevaremos a cabo una integración numérica desde el centro de la estrella hasta el infinito radial. Las condiciones de contorno para el sistema son las siguientes. Con respecto a σ , requeriremos una masa finita, lo cual implica $\sigma(\infty) = 0$ y que no sea singular en el origen, i.e. $\sigma(0)$ es una constante finita y $\sigma'(0) = 0$. Buscaremos soluciones con número de nodos igual a cero, porque según se explica en [343], es razonable esperar que esto represente los estados ligados de mínima energía. Esto es, buscaremos soluciones en las que σ caiga a cero desde su valor central. Pediremos que asintóticamente el espacio-tiempo sea plano, lo que significa $B(\infty) = 1$ y $A(\infty) = 1$, esta última condición está asegurada por las ecuaciones mismas. No singularidad en el origen también requiere que $M(0) = 0$. Finalmente, $\Phi(\infty)$ debe tomar el valor de Φ en un modelo cosmológico apropiado en el tiempo de formación estelar. Si no se especifica de otra manera, será considerado como 1, lo que de acuerdo a las unidades elegidas representa la actual constante de Newton. Notemos que esta condición de contorno difiere de las otras en ser menos restrictiva, de hecho, preliminarmente, impone solo una *prescripción de condición de contorno aceptable*. Manejaremos esta condición de forma que la integración termine en la región asintótica, donde $\Phi = \Phi(\infty)$ y la derivada $\Phi'(\infty)$ tiende a cero. Todas estas condiciones de contorno generan un problema de autovalores para Ω . Es decir, debemos encontrar el valor adecuado del parámetro Ω de forma que la solución del sistema que tenga en cuenta ese valor cumpla con las condiciones de contorno explicitadas. Para poder obtener resultados precisos, este autovalor debe ser especificado con al menos seis dígitos significativos

en un caso típico; esto está dentro de las capacidades de un método numérico de doble precisión. Notemos además, que debido a la forma de las ecuaciones, lineales en B , podemos integrar el sistema sin imponer la condición de contorno sobre B desde el principio. En su lugar, podemos escalar al final del cálculo tanto B como Ω para lograr así cumplir con los requerimientos asintóticos.

El método numérico que usaremos será Runge-Kutta de cuarto orden y está basado en los programas de la referencia [360]. Algunas de las subrutinas fueron modificadas para lograr testear la posibilidad de satisfacer las condiciones de contorno en cada paso de la integración numérica, por lo que se transforma en un método de *shooting step by step* –véase el apéndice de la Ref. [342] para detalles sobre esto–. El programa fue testeado en los casos límites de las ecuaciones (7.27-7.30), i.e. Relatividad General y teoría de Brans-Dicke, y sus resultados fueron encontrados en acuerdo con la literatura.

7.4 Definiciones de masa en teorías escalares tensoriales

La definición de masa estelar en teorías escalares tensoriales es un problema delicado que ha sido recientemente analizado por Whinnett [361]. Whinnett estudió tres posibles definiciones para el caso $\omega = -1$, donde encontró grandes diferencias. Pero en el caso en que $\omega \rightarrow \infty$ las tres definiciones se aproximan entre sí. Cada una de estas *masas* deben compararse con la *masa en reposo* de la estrella, dado por el número de partículas multiplicado por la masa individual de cada bosón.

Las tres definiciones son,

- La masa de Schwarzschild,

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr , \quad (7.31)$$

donde ρ se define como el lado derecho de la ecuación de campo tipo tiempo. Esta corresponde a la masa ADM en el *Jordan frame* y coincide con la introducida anteriormente para $r \rightarrow \infty$.

- La masa Kepleriana,

$$m_K(r) = r^2 \frac{B'}{2} . \quad (7.32)$$

- La masa tensorial,

$$m_T(r) = r^3 \frac{B'\phi + \phi'B}{2\phi r + r^2\phi'} . \quad (7.33)$$

Las últimas dos definiciones son masas orbitales. Una partícula de prueba en movimiento geodésico circular en la geometría de la ecuación (7.7) se mueve con una velocidad angular igual a,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{B'}{2r}} , \quad (7.34)$$

cuando es medida por un observador en el infinito [213]. Luego, aplicando la tercera ley de Kepler, la masa del sistema puede obtenerse haciendo

$$M(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r^3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] . \quad (7.35)$$

De forma que la masa Kepleriana es la *masa de la tercera ley de Kepler en el Jordan frame*, mientras que la masa tensorial es la *masa de la tercera ley de Kepler en el Einstein frame*. En el *Einstein frame* todas las definiciones de masa coinciden, tal que la masa tensorial es también la masa ADM en el *Einstein frame*.

Estas definiciones difieren en gran medida para el caso $\omega = -1$, y en general para valores pequeños de ω [361]. Luego, es de especial importancia tener una descripción correcta de la masa estelar, debido a que ésta decidirá propiedades de estabilidad y el comportamiento de la energía de ligadura. Para el caso $\omega = -1$, la masa Kepleriana conduce a energías de ligaduras positivas para todos los valores de la densidad central, sugiriendo que todas las soluciones son genéricamente inestables. La masa de Schwarzschild conduce en cambio a energías de ligadura negativas también para toda densidad central, sugiriendo que todas las soluciones son potencialmente estables, aún para grandes valores de $\sigma(0)$.⁵ Estas dos situaciones conduce a pensar que ninguna de las dos masas tratadas puede ser la descripción correcta para utilizar en el cálculo de la energía de ligadura. Además, es la masa tensorial la que tiene su máximo en la misma densidad central que el número de partículas, una propiedad importante en Relatividad General, y utilizada por la teoría de catástrofes [359]. Sin embargo, aún no existe una prueba matemática de tal propiedad y la afirmación está basada sólo en análisis numérico. Parece haber entonces algunas razones de peso para adoptar la masa tensorial como la *verdadera masa de la estrella*, especialmente para los casos de pequeños valores de ω .

Para las simulaciones analizadas en este y en el próximo capítulo, hemos calculado la masa de Schwarzschild y la masa tensorial. Para los grandes valores de ω , en los cuales estamos interesados, la diferencia es despreciable. Pero aún más importante es que la forma de todos los gráficos es invariante ante el reemplazo de una masa por otra. Luego, por razones de simplicidad numérica, adoptamos la masa de Schwarzschild, ya que puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de campo con mayor precisión.

7.5 Elecciones para el acoplamiento $\omega(\Phi)$

Ya que no hay una prescripción *a priori* acerca de la forma o del valor de $\omega(\phi)$, estamos interesados en estudiar el comportamiento general que muestran un amplio rango de teorías escalares tensoriales.

Dividiremos entonces a las posibles elecciones del acoplamiento en varios grupos. El primer Grupo tiene la propiedad de que ω tiende a infinito cuando $\Phi \rightarrow 1$, el valor actual de la constante de Newton. Tomaremos las formas funcionales que Barrow y Parsons analizaron recientemente [362]. Ellas son:

- Teoría 1. $2\omega + 3 = 2B_1|1 - \Phi|^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$ y $B_1 > 0$ constantes.
- Teoría 2. $2\omega + 3 = 2B_2|\ln(\Phi)|^{-2\delta}$, con $\delta > 0$ y $B_2 > 0$ constantes.
- Teoría 3. $2\omega + 3 = 2B_3|1 - \Phi^\beta|^{-1}$, con $\beta > 0$ y $B_3 > 0$ constantes.

El comportamiento de estas teorías en una métrica tipo Friedmann-Robertson-Walker fue analíticamente estudiado en la Ref. [362] y cotas provenientes del límite débil fueron allí provistas. Notemos que al usar estos acoplamientos en nuestras ecuaciones, la dependencia de las funciones cambia de tiempo cósmico a coordenada radial. La forma de estos acoplamientos en función de Φ puede verse en las Figs. 7.1, 7.2 y 7.3. Las soluciones cosmológicas para este

⁵De hecho, para pequeños valores de la densidad central, la masa de Schwarzschild se hace negativa en los casos de pequeño ω . Esto podría indicar que un wormhole clásico, del estilo de los analizados en capítulos

$$\text{Teoría 1: } 2\omega(\phi) + 3 = 2B_1|1 - \Phi|^{-\alpha}$$

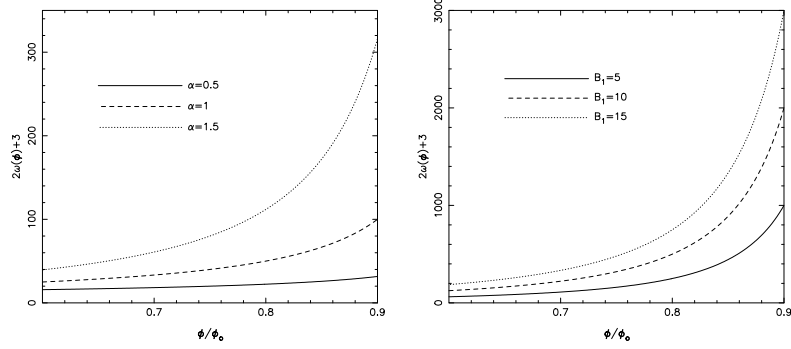


Figure 7.1: *Teoría 1*, a la izquierda: $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5, 1, 1.5$; y a la derecha: $\alpha = 2$ y $B_1 = 5, 10, 15$.

$$\text{Teoría 2: } 2\omega(\phi) + 3 = B_2 |\ln(\Phi)|^{-2\delta}$$

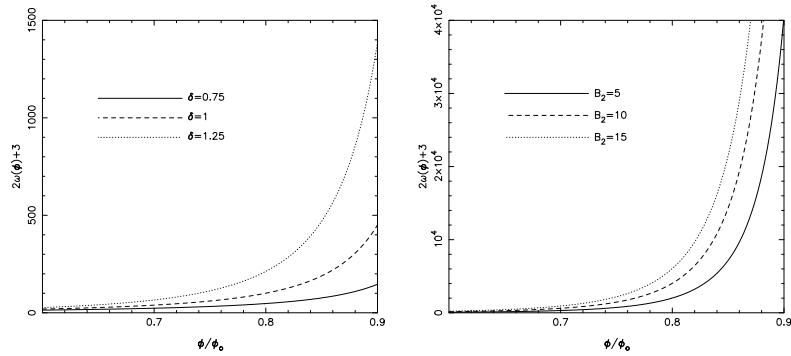


Figure 7.2: *Teoría 2*, a la izquierda: $B_2 = 5$ y $\delta = 0.75, 1, 1.25$; y a la derecha: $\delta = 2$ y $B_2 = 5, 10, 15$.

$$\text{Teoría 3: } 2\omega(\phi) + 3 = B_3 |1 - \Phi^\beta|^{-1}$$

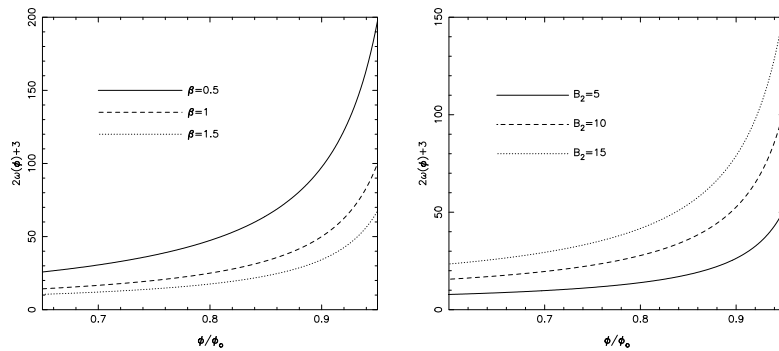


Figure 7.3: *Teoría 3*, a la izquierda: $B_3 = 5$ y $\beta = 0.5, 1, 1.5$; y a la derecha: $\beta = 2$ y $B_3 = 5, 10, 15$.

grupo permiten que Φ se aproxime a 1 *desde abajo*, i.e. $\Phi \in (0, \infty)$ o *desde arriba*, $\Phi \in (\infty, 0)$. Esto implica que la condición de contorno en Φ puede ser igual a, menor o mayor que 1. Las Teorías 1, 2 y 3 se aproximan a la teoría de Brans-Dicke cuando $\Phi \rightarrow 0$ y a la teoría siguiente (Teoría 4) cuando $\Phi \rightarrow \infty$. Notemos también que los vínculos de campo débil son, de hecho, independientes de la forma de las soluciones cosmológicas siempre y cuando se cumpla que $\Phi \rightarrow \Phi_0$ cuando t sea suficientemente grande. Es este último requerimiento el que introduce restricciones adicionales sobre el espacio de parámetros, especialmente en los exponentes, que varían de una era cosmológica a la siguiente, para detalles sobre esto véase la Ref. [362].

El segundo Grupo de funciones de acoplamiento estará representado por:

- Teoría 4. $2\omega + 3 = \omega_0 \phi^n$, con $n > 0$ y ω_0 constantes.

Este grupo también tiene soluciones cosmológicas analíticas [72] y límites de nucleosíntesis fueron calculados en capítulos previos de esta tesis. Este tipo de teorías difiere del anterior en que, aunque crecientes con el tiempo, $\Phi \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Finalmente, el tercer Grupo que analizaremos consistirá en *funciones implícitas localmente definidas* de la forma:

- Teoría 5. $\omega = \omega(x) = \omega(x(\Phi))$.

El objetivo en hacer esto es ver como puede ser posible determinar el comportamiento de $\omega(\Phi)$ dentro de la estructura de la estrella, admitiendo que en ese rango de la coordenada radial, el acoplamiento varíe sustantivamente. Notemos que éstas son definiciones implícitas, y que es necesario invertir $\Phi(x)$ para obtener la dependencia correcta del acoplamiento. Si $\Phi(x)$ es una función monótona, la existencia de esta función inversa está asegurada analíticamente. Es interesante recordar que el límite $x \rightarrow \infty$ es de crucial importancia. Lejos de la estrella quisiéramos recobrar una teoría escalar tensorial de gravitación con un comportamiento cosmológico aceptable.

Considerando además a la teoría de Brans-Dicke, con $\omega(\Phi) = \text{constante}$, es posible pensar que *cualquier* teoría escalar tensorial puede ser expandida en serie de Laurent o de Taylor utilizando las formas funcionales de los grupos aquí analizados. Desde este punto de vista los resultados que presentaremos en la próxima sección serán válidos *para toda* teoría escalar tensorial.

7.6 Resultados

7.6.1 Acoplamientos de los Grupos I y II

Aunque cuando se considera un escenario cosmológico, las teorías descritas por los Grupos I y II son formal y conceptualmente diferentes, resultan ser muy similares en cuanto a las soluciones de estrellas de bosones. Además, la mayoría de las similitudes aparecen dentro del Grupo I, donde las simulaciones muestran que todas las teorías pueden mapearse entre sí para elecciones convenientes de los parámetros libres que ellas poseen. Con respecto a la Teoría 4 algunas diferencias deben ser notadas, y así lo hacemos abajo, pero el comportamiento no difiere demasiado de los acoplamientos del Grupo I. Tomando esto en cuenta, presentaremos en detalle sólo el caso de la Teoría 1 y haremos algunos comentarios sobre otras situaciones especiales.

precedentes de esta tesis podría formarse. Análisis sobre esto fueron realizados pero la dificultad, aún por superarse, es la correcta puesta en práctica de las condiciones de contorno a nivel numérico.

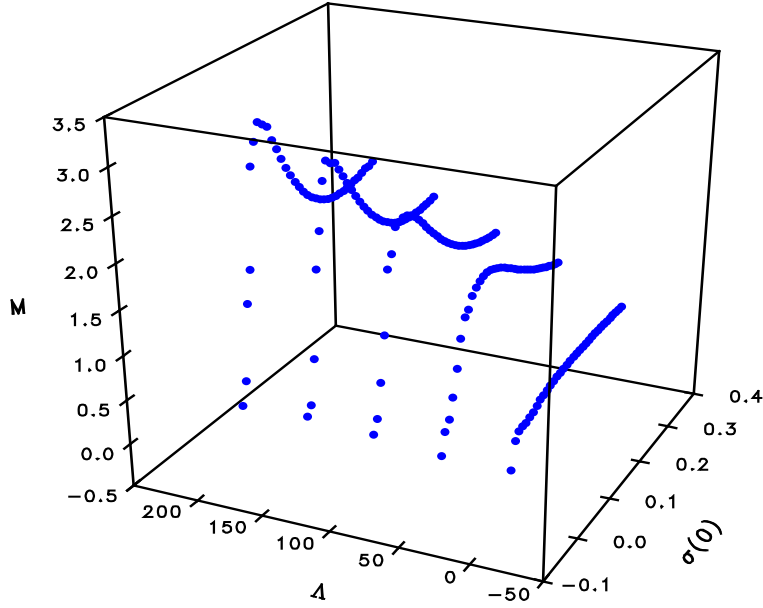


Figure 7.4: *Masa de las estrellas de bosones para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 2$ y diferentes valores de Λ y $\sigma(0)$. Se representan 34 modelos para cada valor de Λ . Los resultados numéricos de este gráfico resultan ser muy similares a aquellos que se derivan para Relatividad General.*

Consideremos entonces estrellas de bosones en el marco de la Teoría 1 de gravitación. Tomaremos como ejemplo, $B_1 = 5$ y $\alpha = 2$ y distintos modelos en equilibrio para diferentes valores de la densidad central y magnitudes de la autointeracción. Lo que encontramos está representado en la Fig. 7.4. El valor $\alpha = 2$ es un extremo del intervalo que admite el criterio de convergencia a Relatividad General en un escenario cosmológico con un fluido perfecto como fuente de la curvatura ($p = (\gamma - 1)\rho$; $\gamma \in (0, 4/3)$) [362]. Podemos notar rápidamente que la forma del gráfico es preservada cuando se lo compara con los que se generan tanto en Relatividad General como en Brans-Dicke. Las masas de las estrellas de bosones aumentan cuando se las compara con el caso de Brans-Dicke con $\omega = 6$ presentado por Gunderson y Jensen. De hecho, los resultados para los valores de α mayores que 1 son extremadamente similares a los de Relatividad General y el escalar de Brans-Dicke es prácticamente constante a lo largo de la estructura de la estrella. Esto es algo que podría esperarse en el caso que las soluciones existieran, debido a la rápida forma en que la Teoría 1 se aproxima a la Relatividad General cuando α es suficientemente grande. Sin embargo, el escenario cambia cuando se consideran valores de α menores que 1. La Tabla 7.1 presenta los cálculos para los modelos con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. Recordemos ahora que este valor de α es el menor que preserva el límite débil en una evolución cosmológica y es uno de los extremos del intervalo que garantiza la convergencia hacia Relatividad General en la era de radiación [362].

Notemos que las configuraciones de equilibrio se dan, en cada caso, para valores de Φ en el centro de la estrella mayores que el valor asintótico, lo cual implica objetos menos ligados gravitacionalmente que aquellos de Relatividad General. Este también fue el caso en la teoría de Brans-Dicke. Los valores de las masas son menores que los de Relatividad General pero aún mayores que aquellos que están basados en un teoría escalar tensorial que no se comporta adecuadamente en un escenario cosmológico, por ejemplo, la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 6$. De forma que la Teoría 1 tiene soluciones viables para estructuras de estrellas de bosones, con masas que son compatibles con los casos más simples. Con respecto al comportamiento de

Table 7.1: Masas de las estrellas de bosones para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$.

Λ	$\sigma(0)$	$B(0)$	$\Phi(0)$	$M(\infty)$
0	0.325	0.4231	1.0007	0.627
10	0.225	0.4163	1.0010	0.919
100	0.100	0.3853	1.0011	2.248
200	0.070	0.4256	1.0009	3.128

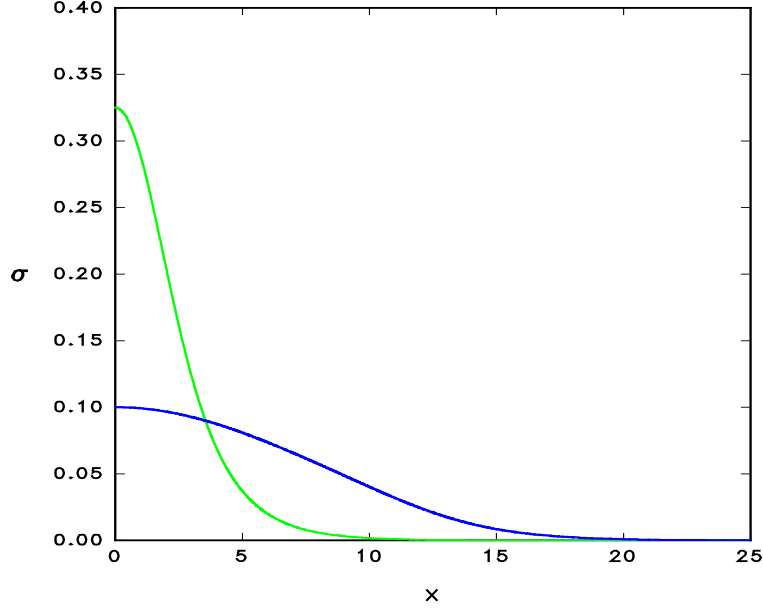


Figure 7.5: Comportamiento de σ como una función de la coordenada radial para dos modelos típicos de estrellas de bosones escalares tensoriales, Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. La curva superior corresponde a $\Lambda = 0$ y la inferior a $\Lambda = 100$.

σ como una función de x , la Fig. 7.5 muestra su comportamiento para valores típicos en el espacio de parámetros. Lo mismo hace la Fig. 7.6 para el comportamiento del escalar Φ . Las propiedades de convexidad de σ como una función de $\sigma(0)$ son similares a las de Relatividad General.

La dependencia de las masas de las estructuras en equilibrio sobre los parámetros de la teoría fue testeado en mayor detalle. Se encontró que para valores de α mayores que 1, cambios en B_1 no producen cambios notables en las masas. Lo opuesto sucede para valores menores de α . La Tabla 7.2 representa estas tendencias en una forma más cuantitativa para $\Lambda = 100$ y $\sigma(0) = 0.100$.

Finalmente, tendremos en cuenta la posible variación de $M(\infty)$ con una desviación en la condición de contorno para Φ , i.e. de la constante gravitacional efectiva en la región asintótica. Esto está orientado en obtener un primer esquema de posible formación de estrellas de bosones a lo largo de diferentes eras de evolución cosmológica, y de como sus características de equilibrio podrían variar. Como la Teoría 1 admite soluciones cosmológicas con valores de Φ mayores o menores que 1 consideraremos ambos casos como posibles valores para condiciones de contorno. La Tabla 7.3 muestra $M(\infty)$ junto con el correspondiente valor de $\Phi(0)$ para cada elección de la condición de contorno en tres modelos particulares. La característica más notoria es

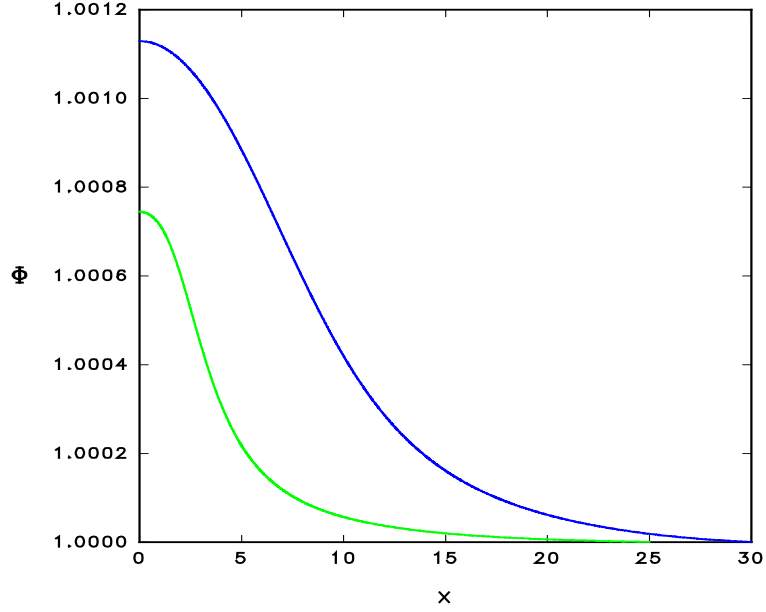


Figure 7.6: Comportamiento del escalar Φ como una función de la coordenada radial para dos modelos típicos de estrellas de bosones escalares tensoriales, Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. La curva superior corresponde a $\Lambda = 100$ y la inferior a $\Lambda = 0$.

Table 7.2: Dependencia de las masas de las estrellas de bosones sobre el espacio de parámetros de la Teoría 1 con $\Lambda = 100$, $\sigma(0) = 0.100$.

B_1	α	$\Phi(0)$	$M(\infty)$
2	0.5	1.0053	2.245
5	0.5	1.0010	2.248
8	0.5	1.0004	2.249
2	1.0	1.0000	2.250
8	1.5	1.0000	2.250
8	2.0	1.0000	2.250

que las masas son sensitivas a la variación de la condición de contorno en el escalar de la teoría gravitacional. El orden de esta variación es, típicamente, de unos pocos por cientos. Discutiremos esto con más detalle en el capítulo siguiente.

Con respecto a la Teoría 4 recordemos que el espacio de parámetros no está principalmente acotado por los test débiles de gravitación [72], que no limitan los valores de n –siempre que $n > 0$ –, sino que lo está por procesos de nucleosíntesis. Estos límites resultan en potencias mínimas para n y quedan fijos una vez que los parámetros cosmológicos Ω_0 y la constante de Hubble H_0 son conocidos. Una característica común de este Grupo es que las masas de las configuraciones en equilibrio son menores que los casos previamente estudiados y mucho menores cuando se las compara con Relatividad General. Un ejemplo típico es el modelo con $\Lambda = 100$ y $\sigma(0) = 0.100$. Para $\omega_0 = 2$ y $n = 3$, $M(\infty) = 1.870$. Otra característica de la Teoría 4 es que ésta resulta en aquella que mayor dependencia muestra en el espacio de parámetros, para pequeños valores de n y ω_0 . Aquí, las variaciones alcanzan un típico 10 % en masa.

Table 7.3: Masas de las estrellas de bosones como función de la condición de contorno para Φ . El primer conjunto muestra el modelo con $\Lambda = 100$ y $\sigma(0) = 0.100$, el segundo: $\Lambda = 10$ y $\sigma(0) = 0.225$, mientras que el tercero lo hace para, $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.325$. Estos modelos son para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$.

$\Phi(\infty)$	$\Phi(0)$	$M(\infty)/\Phi(\infty)$	$\Phi(0)$	$M(\infty)/\Phi(\infty)$	$\Phi(0)$	$M(\infty)/\Phi(\infty)$
0.90	0.9127	2.096	0.9128	0.875	0.9111	0.610
0.95	0.9593	2.164	0.9593	0.893	0.9581	0.616
1.00	1.0009	2.253	1.0010	0.920	1.0007	0.627
1.05	1.0615	2.263	1.0617	0.916	1.0600	0.618
1.10	1.1167	2.295	1.1170	0.921	1.1145	0.614

Table 7.4: Masas de las estrellas de bosones para funciones acoplamiento implícitamente definidas. Se muestran los resultados para el modelos con $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.325$. Una pequeña estrella señala que la función Φ es no-monótona, típicamente en la región más interior. La condición de contorno sobre el escalar de Brans-Dicke es igual a 1 aunque se aceptaron desviaciones de orden 10^{-4} .

$\omega = \omega(x)$	$M(\infty)$	$\Phi(0)$
0.1 x	0.538	1.1011
10 x	0.624	1.0075
$\log(x)^*$	0.577	1.0754
$\exp(0.01x)$	0.539	1.0760

7.6.2 Acoplamiento del Grupo III

El tercer y último grupo de acoplamiento que analizaremos consiste en funciones implícitamente definidas de la forma de la Teoría 5. Como ejemplo elegiremos varias formas para el acoplamiento, para los cuales se resumen los resultados en la Tabla 7.4, en el caso del modelo dado por $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.325$. Estas funciones son suficientemente generales como para dar una idea del objetivo de este estudio. Localmente, no hay prescripción sobre ω , mientras que lejos de la estrella quisiéramos recobrar una teoría escalar tensorial que sea capaz de superar todos los test conocidos a nivel cosmológico. Las teorías escalares tensoriales que se apartan más de la Relatividad General son aquellas que pueden compararse con una teoría de Brans-Dicke de pequeño ω . La elección de las funciones de la Tabla 7.4 está centrada entonces en permitir a la teoría escalar tensorial tender a la Relatividad General en la región asintótica mientras que pueda admitir serias discrepancias con ella en el interior de la estructura. Para todos los casos, cuando $x \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$, haciendo estas teorías cosmológicamente aceptables.

Si no se especifica de otra forma, todos los casos presentan funciones Φ monótonas. La dependencia correcta del acoplamiento $\omega(\Phi)$, puede ser finalmente obtenida a partir de la inversa de la función $x(\Phi)$. Es importante notar que la dependencia de ω con Φ cambia cuando el modelo lo hace. Por ejemplo, al pasar a través de diferentes valores de Λ , la forma funcional de $\Phi(x)$ se ve modificada, y lo mismo le sucede a su inversa. Esto implica que aún sin cambiar $\omega = \omega(x)$, toda vez que cambiamos algún valor del par $(\Lambda, \sigma(0))$, estamos cambiando $\omega = \omega(\Phi)$.

Para los casos estudiados en la Tabla 7.4 encontramos que el orden de magnitud de las estrellas de bosones permanece inalterado, aunque en algunos casos masas muy pequeñas

pueden surgir, inclusive en los casos con $\Lambda \neq 0$. Estas variaciones leves en la masa final de las estrellas de bosones debe ser explicada en términos de la compleja estructura del sistema diferencial de ecuaciones. Los términos proporcionales a las derivadas de los acoplamientos son también proporcionales a las derivadas del campo Φ , el que a su vez debe ser obtenido de la solución del sistema.

7.7 Conclusiones

En los últimos años, la posibilidad de construir cosmologías de teorías escalares tensoriales junto con el hecho de la profunda relación con teorías de inflación que este tipo de gravitación muestra, ha generado un enorme interés. Esto permite una fructífera comparación con los resultados predichos por la teoría standard y un marco en que puedan falsarse teorías e ideas. Una vez que el escenario cosmológico está fijo, debemos analizar la posibilidad de construir los objetos astrofísicos observados o teóricamente posibles que conforman nuestra visión del mundo. Una tasa distinta de expansión del universo o un valor distinto de la constante gravitacional efectiva cambian de hecho las características que estos objetos tienen.

En este capítulo hemos analizado la posible existencia de estrellas de bosones en el marco de teorías escalares tensoriales generales. Esto extiende un trabajo previo que existía en el área [354], cuyo interés central estaba focalizado en teorías de Brans-Dicke ($\omega = 6$). Hemos mostrado aquí la posibilidad teórica de construir tales objetos en amplias clases de gravitación alternativa, todos ellos contrastados con los test observacionales conocidos. Hemos hallado que el orden de magnitud de las masas de estos objetos es el mismo que el que ocurre en Relatividad General cuando teorías realistas de gravitación son tenidas en cuenta. En general, y dado que cualquier función puede ser expandida en una serie de la forma de los acoplamientos de estos Grupos, podemos concluir que soluciones tipo estrellas de bosones pueden existir para cualquier teoría escalar tensorial. También se ha explorado qué cambios se producen cuando se consideran las características de las configuraciones de equilibrio de estos objetos a lo largo de diferentes eras de evolución cósmica. Se ha encontrado que éstas varían apreciablemente en intervalos de tiempo de orden cosmológico. Esto, como veremos tiene profundas implicancias. Cuando se estudia objetos en equilibrio en Relatividad General, tenemos la ventaja de que las condiciones de contorno en el infinito no varían a lo largo de la posible evolución del objeto en el tiempo. En teorías escalares tensoriales, éste no es el caso. La constante efectiva de gravitación lejos del objeto debe tender, en cada momento de tiempo cósmico, al valor que tome la inversa del campo escalar que sea solución de las ecuaciones cosmológicas de la teoría en ese momento. Es decir, ya que hay una evolución cosmológica que hace que $\Phi(r = \infty) = \Phi(r = \infty, t)$, una de las condiciones de contorno del sistema variará. Cuando la estrella se forma a un dado tiempo $t = t_1$ la masa que presentará la solución de las ecuaciones de campo será distinta a aquella que presentará en todo tiempo de formación distinto a t_1 . Esto está explícitamente demostrado en la Tabla 7.3. En el siguiente capítulo analizaremos, junto con la estabilidad de las estructuras, las ricas consecuencias de estos resultados.

Chapter 8

Memoria y evolución estelar

*Dos o tres veces había reconstruido un día entero;
no había dudado nunca, pero cada reconstrucción
había durado un día entero.*

Jorge Luis Borges
Funes el memorioso

8.1 Introducción

Unos pocos años atrás, Barrow introdujo el concepto de memoria gravitacional [363, 364] instalando el siguiente problema: qué le sucede a los agujeros negros si el acoplamiento gravitacional G evoluciona con el tiempo? Dos escenarios fueron propuestos. En el primero, el agujero negro evoluciona cuasi-estáticamente y ajusta su tamaño debido a la variación de G . En la posibilidad alternativa, el valor local de G es preservado dentro del agujero negro mientras que el valor asintótico evoluciona cosmológicamente. Esto significa que el objeto *se acuerda* del acoplamiento gravitacional válido en el momento de formación. Análisis adicionales de los fenómenos que surgen en ambos escenarios fueron presentados en la Ref. [365]. Los agujeros negros son de particular interés en este contexto porque pudieron haberse formado en las etapas iniciales del universo. En aquellos tiempos tempranos, no hay evidencia directa del valor de G ; siendo la etapa de nucleosíntesis la época más lejana en que pueden obtenerse vínculos significativos. El fenómeno de memoria gravitacional puede proveer, entonces, una manera única de testear la teoría de gravitación

En este capítulo consideraremos el fenómeno de memoria gravitacional en un marco estelar. La motivación puede dividirse en dos partes. Por un lado, ya que no existen en este caso singularidades ni horizontes de eventos, hay muchas ventajas operativas y de cómputo que pueden proveer una ruta más directa hacia la determinación de cuál de los escenarios –convenientemente adaptados a la situación estelar– podría suceder en realidad. Por otra parte, un estudio de los efectos gravitacionales de teorías escalares tensoriales sobre estructuras estelares está lejos de completarse. A partir del análisis presentado en el capítulo anterior, la elección del sistema de estudio resulta obvia para estos fines. Las estrellas de bosones evidencian una dependencia explícita con el valor asintótico de G y son lo suficientemente simples como para permitir aislar estos fenómenos.

Quizás sea prudente, a esta altura de la discusión, hacer un breve comentario sobre la posibilidad de detectar observacionalmente este tipo de objetos. Hasta el momento se han estudiado básicamente tres fenómenos. El primero es aquel de microlensing gravitacional. Las estrellas de bosones, al ser *transparentes*, podrían mostrar tres imágenes en lugar de dos, una

correspondiendo a los rayos que la atraviesan directamente por el centro. Además de esto se ha probado que los ángulos de deflexión son mucho mayores que en el caso standard (por ejemplo, una estrella de neutrones) [366]. El segundo fenómeno es el relacionado con la posibilidad de detección directa, a través del estudio de materia bariónica que se mueve en el interior de la estrella [367]. Bajo la suposición que las partículas escalares no interactúan con la materia común de otra forma que no sea gravitacionalmente, esta materia puede penetrar la estrella de bosones. Si emite o absorbe radiación dentro del potencial gravitacional, el espectro se correrá al rojo. Finalmente, el tercer fenómeno relacionado es la posibilidad de que las estrellas de bosones (con m muy pequeñas o cero) puedan utilizarse para modelar el halo galáctico y reproducir las curvas de rotación [368, 369]. A pesar de estos esfuerzos, la evidencia de su existencia o inexistencia no es, hasta el momento, concluyente. Sin embargo, a los fines de nuestro estudio, las estrellas de bosones serán tomadas como ejemplo para estudiar fenómenos que podrían afectar a todo tipo de objetos de larga vida, como estrellas fermiónicas comunes o cuerdas cósmicas.

Recientemente, han sido presentados dos nuevos trabajos concenientes a estrellas de bosones en teorías escalares tensoriales. En el primero de ellos, Comer y Shinkai [370] estudiaron configuraciones de cero y mayor número de nodos para la teoría de Brans-Dicke y de Damour-Nordtvedt [371, 372]. Allí confirmaron lo sugerido por los resultados del capítulo anterior, i.e. que las masas de las configuraciones decrece hacia el pasado. También estudiaron propiedades de estabilidad, tanto en el presente como en el pasado, y concluyeron que ninguna estrella estable puede existir antes de un cierto tiempo cósmico (que resulta sospechosamente cercano al actual).¹ Los resultados que presentaremos en este capítulo indican que, por el contrario, las estrellas de bosones pueden ser estables –dependiendo de su densidad central– para todo tiempo de la evolución cósmica. Finalmente, la formación dinámica de las estructuras fue analizada, para el valor actual de G , en la Ref. [373]. Allí se probó que similares mecanismos de formación que los de Relatividad General son posibles. Añadiremos aquí un pequeño párrafo sobre este tema.

La idea básica de la formación de estrellas de bosones es como sigue. En alguna etapa posterior a la inflación los bosones estarían en equilibrio térmico con las otras especies presentes. Durante esta etapa las perturbaciones de densidad no pueden crecer. Luego que la temperatura caiga por debajo de la masa del bosón, las perturbaciones de masa son capaces de crecer, ya que la longitud de Jeans es menor que el tamaño del horizonte, y es posible esperar que todos los bosones presentes sean convertidos en estrellas de bosones. Para estudiar esto en más detalle hay que analizar la inestabilidad gravitacional de un campo escalar en un universo en expansión, algo que fue realizado en las Refs. [374, 375, 376]. El estudio del colapso gravitacional no soluciona todos los problemas: hay que encontrar la forma de evitar que se forme un agujero negro. Sin embargo, Madsen y Liddle encontraron que existen modelos de estrellas de bosones más probables que agujeros negros [377]. Recientemente, Seidel y Suen [378, 379] han mostrado numéricamente que existe un proceso llamado *enfriamiento* por el cual sistemas sin colisión pueden generar un núcleo denso expulsando parte del material hacia el exterior mediante radiación.

En este capítulo intentaremos realizar un estudio sobre las configuraciones de equilibrio de las estrellas de bosones a lo largo de todas las épocas del universo. Estaremos pensando en las estrellas de bosones como el modelo más simple de estrella y nos concentraremos en determinar que cambios produce una teoría de gravitación alternativa. Consideraremos que la estrella está ya formada, por lo que no analizaremos en ningún momento procesos de formación. Dado

¹Varias discusiones con los autores de este trabajo nos aclararon que sus conclusiones con respecto a la estabilidad de las estrellas en el pasado solo se aplican al caso de la teoría de Damour-Nordtvedt. Esto no está explícitamente aclarado en su trabajo original.

que vimos en el capítulo anterior que las características de equilibrio entre estructuras de la gravitación de Brans-Dicke y teorías más generales son muy similares, en general estudiaremos sólo el caso de ω constante. Sin embargo, examinaremos la dependencia con el valor explícito de ω . Finalmente, también analizaremos si el escalar gravitacional puede inducir algún cambio en las propiedades de estabilidad, aún para valores asintóticos extremos de G . Para este tipo de análisis introduciremos la teoría de catástrofes. Los resultados contenidos en este capítulo se encuentran publicados en [380] y [381].

8.2 Masa, número de partículas y constante gravitacional

Ante todo evaluaremos la posible variación cosmológica del campo escalar gravitacional ϕ . Nos concentraremos en la teoría de Brans-Dicke. Durante la era de radiación, el comportamiento dominante es aquel de Relatividad General.² Esto es, un ϕ constante y un factor de escala dado por $a \propto t^{1/2}$. En la era de materia, recordemos, la solución está dado por [87, 89]

$$a(t) \propto t^{(2-n)/3}, \quad G(t) \propto t^{-n}, \quad (8.1)$$

donde $n = 2/(4 + 3\omega)$, de forma que G es una función decreciente con t . Asumiendo que la transición radiación-materia ocurre cerca de los valores de la Relatividad General, $z_{\text{eq}} \sim 24000 \Omega_0 h^2$, luego, para una densidad igual a la crítica y $h = 0.5$, el cambio fraccional en G desde la época de igualdad es

$$\frac{G(t_0)}{G(t_{\text{eq}})} = 6000^{-1/(1+\omega)}. \quad (8.2)$$

Para $\omega = 400$, éste es igual a 0.98, implicando que G habrá cambiado alrededor del dos por ciento desde $t = t_{\text{eq}}$. Por supuesto esto cambia para otras teorías y para otras soluciones en donde G también varía durante la era de radiación.

Informados por el rango probable de variación, calculamos configuraciones con diferentes valores de la constante gravitacional asintótica, admitiendo hasta un 10% de desviación del valor actual. En la Fig. 8.1, vemos que si Λ y la densidad central $\sigma(0)$ se mantienen fijas, la masa varía como función de $\Phi(\infty)$, de acuerdo a lo comentado en el capítulo anterior. En el caso de Brans-Dicke, la masa es una función creciente de $\Phi(\infty)$, mientras que en el modelo más complicado (basado en la Teoría 1 analizada anteriormente) existe un pico en el valor actual de G . Este se produce debido a la forma del acoplamiento, que selecciona de manera particular ese valor específico de $\Phi(\infty)$.

Supongamos ahora que la evolución hace que el sistema recorra una serie de estados de cuasi-equilibrio como los mostrados en la Fig. 8.1 y computemos en forma *naïve* la cantidad de energía involucrada en el proceso. La Fig. 8.1 muestra que la variación de $\Phi(\infty)$ en unos pocos por cientos puede afectar las masas de las configuraciones en unos pocos por cientos. Luego, la energía involucrada es similar a, o aún mayor que, la energía liberada por reacciones nucleares en una estrella como el sol a lo largo de su vida en la secuencia principal. Para ver esto es posible pensar en una ecuación natural que represente la luminosidad emitida o la energía absorbida por la estrella. Esta es simplemente,

$$L = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\Phi(\infty)} \frac{d\Phi(\infty)}{dt}. \quad (8.3)$$

²De hecho, esto ya fue utilizado en el capítulo de nucleosíntesis y sólo lo repetimos aquí por completitud.

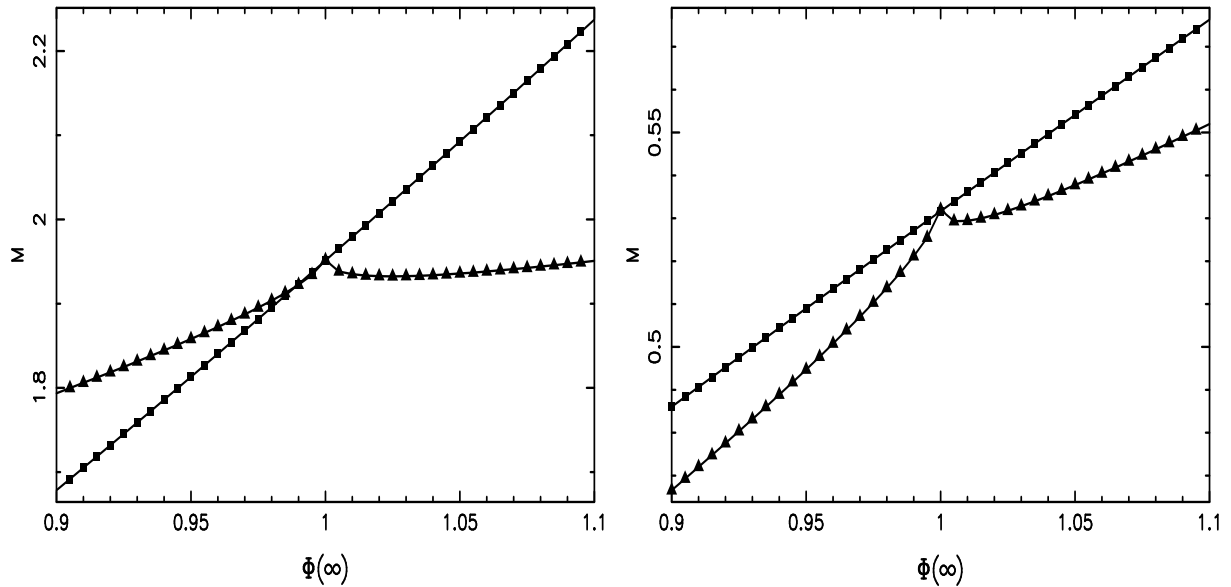


Figure 8.1: Masas de las estrellas de bosones como función de $\Phi(\infty)$; cuadrados son para modelos en la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$ y triángulos para la Teoría 1 con $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$. El panel izquierdo muestra modelos con $\Lambda = 100$ y $\sigma(0) = 0.06$. El derecho lo hace con modelos dados por $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.1$.

El último factor en la ecuación anterior debe obtenerse a partir de una evolución cosmológica en el marco de la misma teoría en que se construyó la estrella. Si suponemos que el objeto ha sufrido una variación de masa del 5% durante toda la era de materia ($\sim 10^{16}$ s) y que $M(\infty) = 1M_\odot$, $L \sim 10^{35}$ erg s^{-1} , que resulta dos órdenes de magnitud mayor que la luminosidad del sol. Aclaremos por qué este resultado debe considerarse como *naïve*. Para esto, notemos que estamos comparando configuraciones en equilibrio a distintos tiempos, i.e. no es la misma estrella! Sin embargo, es evidente que para intervalos de tiempo cortos comparados con la evolución cosmológica de G , las configuraciones en equilibrio deben ser resultados aproximadamente correctos. Debe haber algún tipo de evolución.

Antes de analizar esto en más detalle, mostraremos los resultados del cálculo del número de partículas del sistema. Encontramos que para ambos modelos estudiados, el número de bosones es una función creciente de $\Phi(\infty)$. La Fig. 8.2 muestra el *diagrama de bifurcación*, número de partículas versus masa, y se ve que no aparece allí ningún *cusp*, en el sentido de la teoría de catástrofes.³ Esto implica que no existe un cambio en la estabilidad de la estrella para valores de G cercanos al actual.

8.3 Escenarios de evolución

Ahora discutiremos posibles interpretaciones de los resultados computacionales mostrados. En el mismo sentido que aquel que llevara a Barrow a proponer el concepto de memoria gravitacional, describiremos las posibles historias de una estrella de bosones que se formó a un tiempo

³Introduciremos en detalle esta teoría un poco más adelante en este capítulo y antes de usarla nuevamente en las últimas secciones.

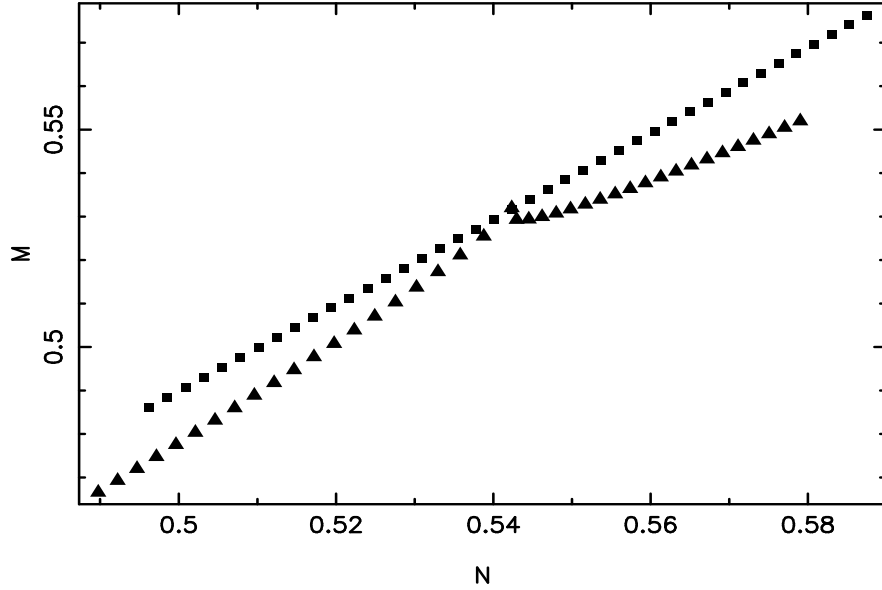


Figure 8.2: Masas de las estrellas de bosones como función del número de partículas para la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$ (cuadrados) y la Teoría 1 con parámetros $B_1 = 5$ y $\alpha = 0.5$ (triángulos). Ambos casos tienen $\Lambda = 0$ y $\sigma(0) = 0.1$. El punto más a la izquierda corresponde a $\Phi(\infty) = 0.9$ y el más a la derecha a $\Phi(\infty) = 1.1$. Como $M(N)$ es simplemente valuada, no puede haber cambio en la estabilidad.

t_f con una masa $M(t_f)$.

8.3.1 Memoria estelar gravitacional

Aquí, la estrella permanece completamente estática, sin cambios en el valor de su masa y su densidad central. Tal situación es reminiscente de una galaxia virializada luego del colapso gravitacional, que está desacoplada del resto del universo y no participa en ninguna expansión adicional. En tal escenario, la masa $M(t_f)$ es una función del tiempo de formación, y entonces, de $\Phi(\infty, t_f)$, así como de la densidad central. Luego, la estrella se *acuerda* del valor de G en el momento de formación.

Esta situación no puede ser totalmente correcta, ya que la constante gravitacional –que funciona como condición de contorno del sistema– evoluciona. *No puede haber entonces ningún objeto completamente estático en teorías escalares tensoriales de gravitación.* Pero podría ser que el efecto de esta evolución sobre la estrella sea tan lento que en la práctica puede pensarse como estático.

En este escenario existe la característica especial que estrellas de la misma masa pueden diferir en otras propiedades físicas, como su radio, si es que se han formado en tiempo distintos.

8.3.2 Evolución estelar gravitacional

El regimen opuesto sucede cuando el tiempo de ajuste de la estrella es menor que el de la evolución cosmológica de G . Si esto es cierto, la estrella debería evolucionar cuasi-estáticamente, o bien cambiando su masa o su densidad central o ambas. En este esquema, cuando los intervalos de tiempo son suficientemente cortos comparados con la tasa de evolución cosmológica, la estrella puede tomarse como estática y las soluciones calculadas valen en este límite.

Un interesante subcaso es la *evolución gravitacional pura*. Esta asume que la masa de las estrellas es preservada durante la evolución cuasi-estática, a través de un cambio acorde de la densidad central. Esto conduce a la inesperada conclusión de que las estrellas son capaces de evolucionar sin emisión o absorción de energía de ningún tipo. Tal evolución es totalmente gravitacional en naturaleza. A pesar de esto, dentro de la hipótesis evolutiva, es bastante conservativa, ya que la otra posibilidad es que parte de la masa sea perdida por la estrella. Si procesos disipativos se requieren para la evolución, hemos visto que la variación de G puede fácilmente conducir a cambios en la masa de unos pocos por cientos, que pueden ser del mismo orden que la energía liberada por estrellas comunes en procesos nucleares.

La reducción en densidad central parece un proceso razonable si recordamos el equilibrio de fuerzas en estrellas politrópicas. Ya que la gravitación está reduciendo su acoplamiento a medida que pasa el tiempo, las configuraciones de equilibrio se harían más difusas y caerían en densidad central. En una situación extrema, uno podría preguntarse si la continuación de este proceso puede de hecho conducir a la destrucción total de la estrella.

La hipótesis de evolución cuasi-estática tiene una importante diferencia con la hipótesis anterior, de memoria gravitacional. Aquí, estrellas de la misma masa son idénticas en todas sus otras propiedades también.

8.3.3 Cambio del valor asintótico de G ?

Finalmente, es posible preguntarse si la formación de estrellas de bosones puede influenciar de manera significativa el valor de G asintótico. A partir de los resultados del capítulo anterior, hemos visto que cuando la estrella se forma, la gravitación se hace más débil en su interior, ya que el valor de $\Phi(0)$ aumenta. Este cambio es del orden del 1%. En una configuración estática, el radio al cual el valor de Φ finalmente se aproxima a su valor asintótico es mayor que aquel en el que el campo bosónico ψ está localizado. Luego, si una alta densidad de estrellas de bosones se formara, podrían ser capaces de reducir la atracción gravitacional en una región a su alrededor. Esta es una posibilidad interesante, aunque improbable, ya que el material disponible para *hacer* estrellas es tan difuso que se podría esperar que las estrellas de bosones estén al menos tan separadas como sus contrapartes fermiónicas (que además contribuirían al efecto).

8.4 Teoría de catástrofes y estabilidad

La teoría de catástrofes provee de una ruta directa hacia el estudio de las propiedades de estabilidad de estrellas de bosones y otros objetos [382, 383]. Esta teoría fue introducida en astrofísica en una revisión de la estabilidad de solitones en la Ref. [384], en la cual se muestra que la identificación de cantidades conservadas de un sistema físico es suficiente para la determinación de comportamientos estables y inestables. En el caso de estrellas de bosones, estamos trabajando con objetos caracterizados por la masa y el número de partículas, las únicas cantidades conservadas del modelo. Para cada valor de la densidad central (o en el caso escalar tensorial, de la densidad central y el valor asintótico de G), hay un único valor de M y N . Haciendo un gráfico de una cantidad versus la otra, se obtiene lo que se denomina un *diagrama de bifurcación*. Si aparecen *cusps* en este diagrama, es posible leer en forma inmediata cuáles estados son estables y cuáles inestables. Partiendo de densidades centrales pequeñas, donde la masa y el número de partículas son también pequeños, se asume que estas estrellas son estables (contra perturbaciones radiales). Si, a medida que la densidad central aumenta uno encuentra un *cusp*, la estabilidad de la estrella cambia si los estados siguientes –la rama como un todo–

tienen masa mayor. Este método se aplica nuevamente en cada cusp. Podría ser que en algún cusp, las masas que continúan sean menores, en ese caso el comportamiento cambia de inestable a estable.

La base de este método es que el cusp es la proyección de un *saddle point* de una superficie de Whitney [382]. La curva que conduce al cusp consiste de *fold points*; fold points y cups son singularidades de la superficie de Whitney, los puntos visibles en un diagrama de bifurcación. Los *fold points* son las proyecciones de los máximos y mínimos de la superficie de Whitney; los máximos determinan las soluciones inestables mientras que los mínimos gobiernan la estabilidad.

El método de la teoría de catástrofes ha sido aplicado en el contexto de estrellas de neutrones [385], agujeros negros [386], y la teoría de inflación [387]. Más recientemente, también fue utilizada en estrellas de neutrones en teorías escalares tensoriales y de Brans-Dicke [388]. Aun evitando entrar en los detalles de la teoría, introduciremos un poco más las herramientas de las que hace uso, por mayores especificaciones véase las Refs. [384, 389].

8.4.1 Lenguaje y definiciones

Consideremos primero una función de una variable $y = f(x)$, por ejemplo $(x - x_c)^3$. El punto x_c será un punto crítico si $f'(x_c) = 0$. Si $f''(x_c) \neq 0$ el punto será no degenerado y se designará por A_1 (véase Refs. [384, 389]). Puede probarse como lema que en el entorno de x_c , $f(x) \sim (x - x_c)^2 + f(x_c)$. Si la derivada segunda en x_c es cero, el punto se llama degenerado y si $f'''(x_c) \neq 0$ la expansión será $f(x) \sim (x - x_c)^3 + f(x_c)$. En este caso el punto se denomina A_2 .

Un punto degenerado puede decaer en varios puntos no degenerados por medio de una deformación $\delta f = l(x - x_c)$ a la función $f(x)$ tal que $f(x) \rightarrow f(x) + \delta f$. Para $l > 0$ no habrá ningún punto crítico pero para $l < 0$, $x = x_c + (-l/3)^{1/2}$ corresponderá a un mínimo y $x = x_c - (-l/3)^{1/2}$ a un máximo de la nueva f . Además, es posible pensar en otro parámetro l_2 que gobierne la posición de la función. Como resultado, la familia total de funciones $f(x)$ en el entorno de x_c tiene la forma, $f_{l,l_2} = l_2 + l(x - x_c) + (x - x_c)^3$. Los parámetros l, l_2 son llamados variables de control y la función expandida se denomina *unfolding*.

La deformación de la función $f(x)$ con los valores $[l_i]$ se llama deformación universal. La proyección del valor crítico de la función sobre el plano (f, l_i) es el diagrama de bifurcación de la función. Por ejemplo, el diagrama de la función con punto crítico A_2 ($f(x) = (x - x_c)^3$) tiene la forma $l = -3(x - x_c)^2$, $f(x) = \pm 4(-l/3)^{3/2}$. Si se graficara f vs l se verían dos ramas. La rama superior corresponde al máximo de la función f y la inferior al mínimo. En el punto $l = 0$ hay una bifurcación en el comportamiento de la función: el mínimo se transforma en el máximo.

Para funciones de muchas variables, los puntos críticos son aquellos en que las derivadas parciales se anulan. Un punto crítico será en este caso no degenerado si la forma cuadrática de las derivadas segundas de la función (Hessiano) es no degenerada (su determinante es distinto de cero). En otras palabras se considera el valor del determinante de la matriz

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (8.4)$$

evaluado en $x = x_c$. Si el rango de esta matriz es igual a la dimensión del espacio n , el punto crítico es no degenerado. Si el rango es $m < n$, $n - m$ se llama corango.

8.4.2 Aplicación a estrellas

Para estudiar la estabilidad de los objetos frente a pequeñas perturbaciones radiales (deformaciones) se introduce el concepto de mapeo dimensional,

$$F : (k, \Omega) \rightarrow (M, N) \quad (8.5)$$

donde k es un parámetro variacional que dilata el radio R de la estrella y Ω es la frecuencia (autovalor) de la solución. El valor de k induce un escaleo de la métrica, la frecuencia y el campo escalar de acuerdo con sus dimensiones físicas,

$$ds^2 \rightarrow k^2 ds^2, \quad \Omega \rightarrow \Omega/k, \quad \sigma(r) \rightarrow k\sigma(kr), \quad (8.6)$$

tal que el número de partículas es mantenido constante. Para clasificar las singularidades del mapeo se considera la matriz de Jacobi,

$$J = \begin{pmatrix} \partial M/\partial k & \partial M/\partial \Omega \\ \partial N/\partial k & \partial N/\partial \Omega \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

De acuerdo al teorema de Whitney [384, 389], las singularidades del mapeo pueden clasificarse según uno de los siguientes tres tipos, dependiendo del rango de J , $R_J = 0, 1, 2$. Ya que se requiere que la solución sea un punto extremo de la variedad (físicamente, que la perturbación no aumente el número de partículas ni la masa), se tiene

$$\partial M/\partial k = 0, \quad \partial N/\partial k = 0. \quad (8.8)$$

Por lo que $R_J < 2$. En los ejemplos numéricos, la dependencia de M y N con Ω es implícita (ya que $\Omega = \Omega(\sigma(0))$). Si el rango de J es cero, los puntos críticos son degenerados, los máximos y mínimos de M, N como funciones de $\sigma(0)$ corresponden al punto crítico A_2 . Los otros puntos de la figura M, N vs. $\sigma(0)$ corresponden al punto crítico A_1 . Para clasificar los puntos no degenerados A_1 necesitamos considerar el diagrama de bifurcación $M = M(N)$ o alternativamente, $M - mN$ vs. N . De acuerdo con el teorema de Whitney, los cusps en este diagrama corresponden a los puntos críticos A_2 mientras que los otros a A_1 . Cada cusp representa una superficie de Whitney. Como se muestra en la Ref. [384], los mínimos en esta superficie corresponden a las soluciones estables. En el cusp, el mínimo coincide con el máximo y la solución pierde estabilidad, en la rama superior las soluciones son inestables.

8.5 Resultados numéricos

Para empezar a discutir los resultados numéricos, graficamos los diagramas de configuraciones de equilibrio para distintos valores de densidades centrales y constante gravitacional asintótica G . En la Fig. 8.3 tenemos 50 modelos por curva con $\Lambda = 0, 100$ y densidad central en el intervalo $(0, 0.75)$. Si ahora graficamos la masa versus el valor central del escalar de Brans-Dicke, encontramos un loop. Véase la Fig. 8.4. La curva empieza en la solución plana (Φ constante y masa cero), alcanza su máximo valor al mismo valor de $\sigma(0)$ en el que se llega al máximo de la Fig. 8.3 y realiza un loop, eventualmente llegando a valores menores de $\Phi(0)$. Las estrellas estables están caracterizadas por $\Phi(0) > \Phi(\infty)$, i.e. $G(0) < G(\infty)$, donde G es función de r . Estrellas inestables pueden tener $G(0)$ mayor o menor que $G(\infty)$. Hay dos soluciones para $\Phi(0) = \Phi(\infty)$: la primera es el espacio-tiempo plano y la segunda un estrella de bosones inestable. La misma curva característica se encuentra para distintos valores asintóticos de G . Las Figs. 8.3 y 8.4 otorgan, como función del par $(\sigma(0), \Phi(0))$, la información completa acerca

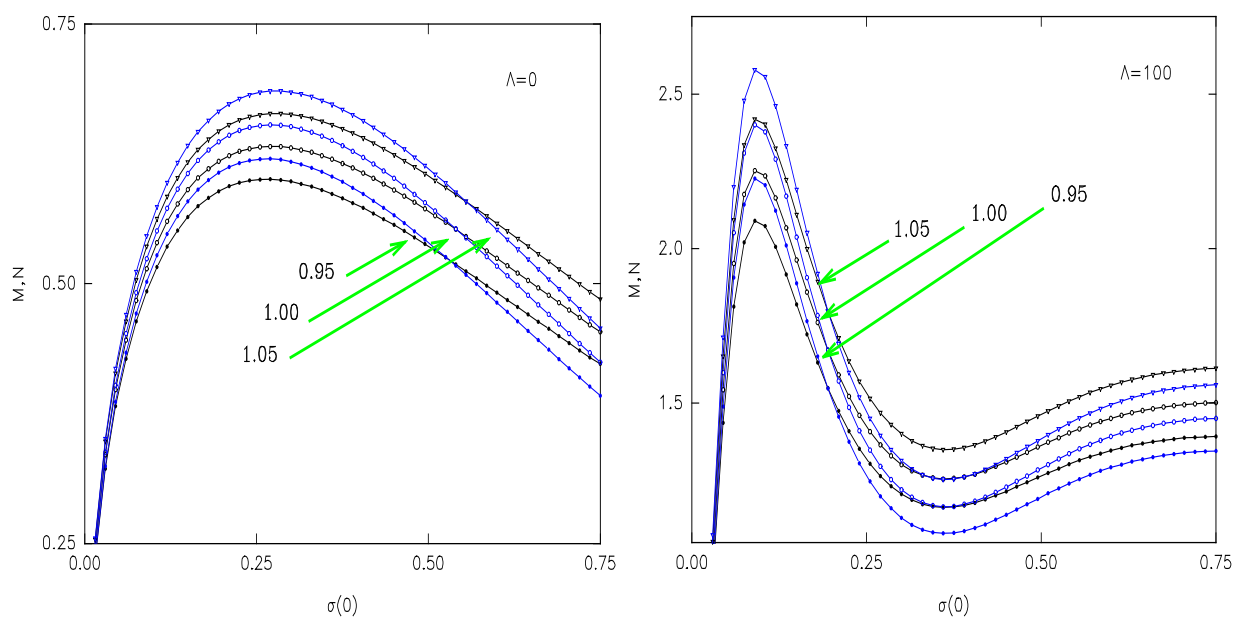


Figure 8.3: Configuraciones de equilibrio de estrellas de bosones. Se muestran configuraciones con distintos valores de $\Phi(\infty)$ y auto-interacción. De las dos líneas para cada caso, la superior es la asociada al número de partículas. $\sigma(0)$ está en el intervalo $(0, 0.75)$ y hay 50 modelos por curva.

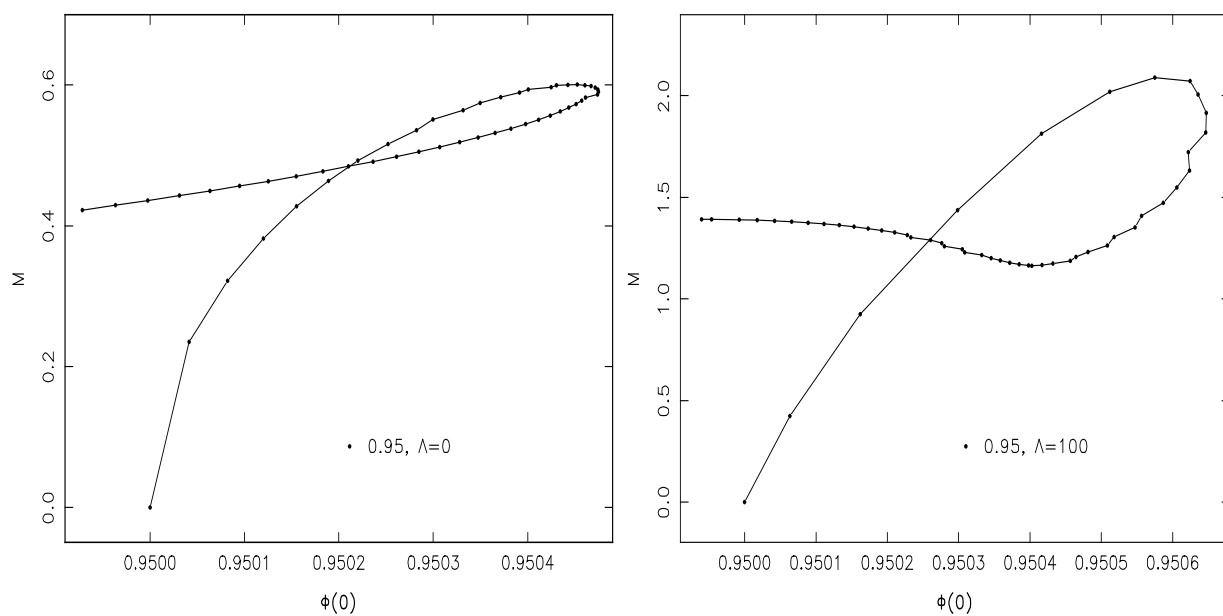


Figure 8.4: Curvas típicas para la masa como función de $\Phi(0)$, con $\Phi(\infty) = 0.95$. Nótese el pequeño rango del eje x.

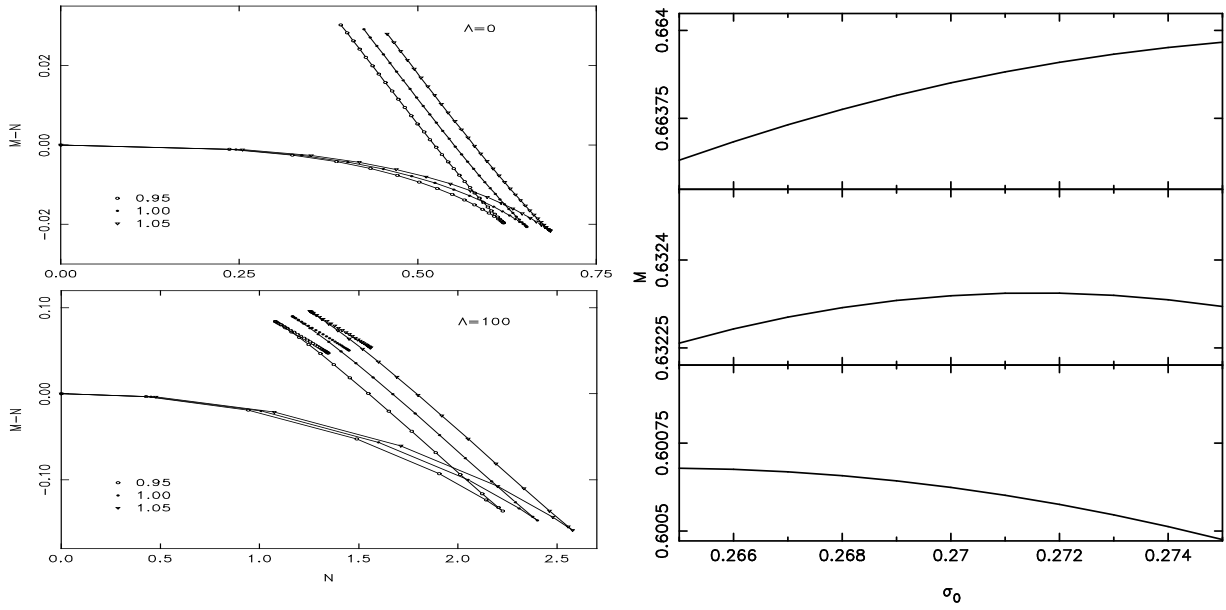


Figure 8.5: El panel izquierdo muestra la energía de ligadura como función del número de partículas para distintos valores de $\Phi(\infty)$ y Λ . El panel derecho muestra las masas de las estrellas de bosones alrededor del intervalo de $\sigma(0) \in [0.265, 0.275]$ para $\Phi(\infty) = 1.05$ (arriba), $\Phi(\infty) = 1.0$ (medio) y $\Phi(\infty) = 0.95$ (abajo). Los modelos corresponden a la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$.

de las características iniciales de las estrellas de bosones a un cierto tiempo cósmico, dado por $\Phi(\infty)$.

Para investigar la estabilidad, en lugar del diagrama (M, N) utilizaremos la figura análoga dada por la energía de ligadura versus el número de partículas. La Fig. 8.5 muestra que las estrellas con densidades centrales pequeñas tienen energías de ligadura negativas. En el caso de $\Lambda = 100$ vemos dos cusps: el primero corresponde al máximo de la Fig. 8.4 y el segundo al mínimo. Para $\Lambda = 0$ el intervalo de densidades centrales analizadas no es suficientemente amplio como para permitir ver el segundo de los cusps. Las estrellas con densidades centrales desde 0 hasta el primer cusp corresponden a la proyección del mínimo en una superficie de Whitney, i.e. son estables. Más allá del cusp, un modo perturbativo se hace inestable. Para estudiar la influencia de la variación de G en la posición exacta del cusp, realizamos un estudio detallado alrededor de la posición del mismo para el modelo con $\Phi(\infty) = 1$, $\sigma(0) \simeq 0.27$. Se estudiaron 11 modelos en el intervalo $\sigma(0) \in [0.265, 0.275]$. Como puede verse en el panel derecho de la Fig. 8.5, para $\Phi(\infty) = 1.05$ la masa y el número de partículas como funciones de $\sigma(0)$ son crecientes. Esto significa que los modelos están localizados en la rama estable. Para $\Phi(\infty) = 0.95$ en cambio, ambas funciones son decrecientes, localizando todos los modelos en la rama inestable. En el caso del actual valor de G , el cusp aparece en el intervalo. Entonces, moviéndose desde el futuro hacia el pasado ($\Phi(\infty) = 1.05$ a $\Phi(\infty) = 0.95$) los modelos se mueven de la rama estable a la inestable. Esto concuerda con lo que Comer y Shinkai reportaron en [370], excepto por un punto importante: ellos no encontraron ningún cusp para todo tiempo anterior al actual. Esto significa que no encontraron ninguna estrella estable en el pasado. Por el contrario, hemos visto que el cusp se mueve hacia atrás en $\sigma(0)$, pero está aún allí. Creemos que los resultados de Comer y Shinkai podrían ser producto de una utilización equivocada de la

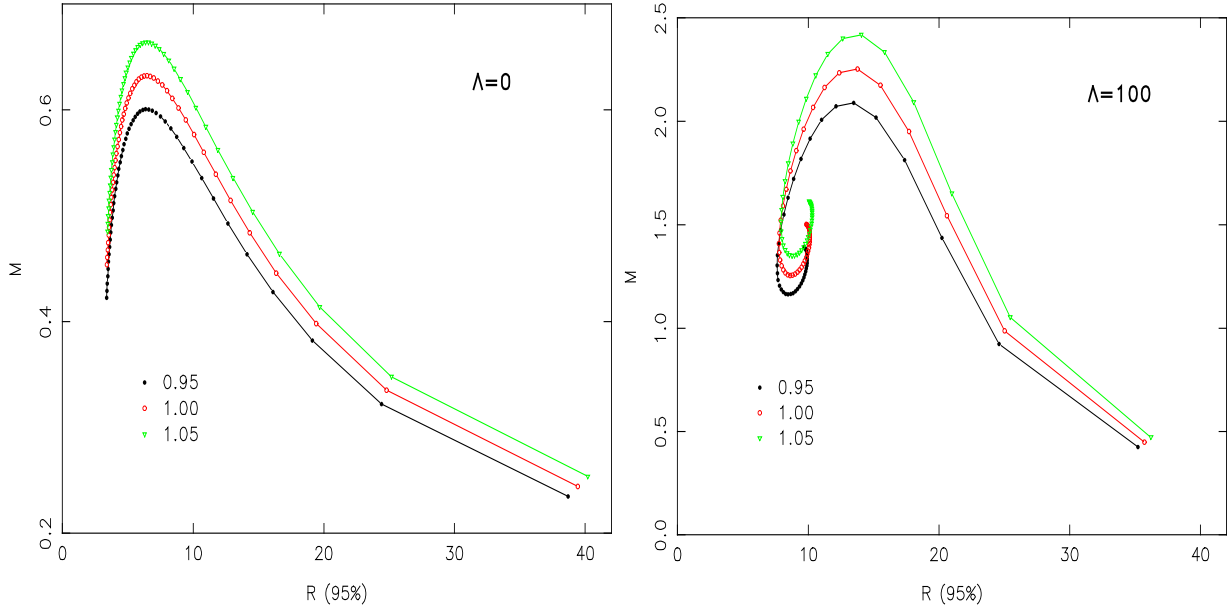


Figure 8.6: *Radio de configuraciones de equilibrio en la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 400$. El rango de $\sigma(0)$ es $(0,0.75)$.*

definición de masa o bien de la de la transformación conforme, algo que también fue señalado por Whinnett en [361].

Además, hemos calculado soluciones con densidad central constante para diferentes valores de $\Phi(\infty)$, teniendo en cuenta también valores extremos y no físicos. El diagrama de bifurcación con respecto a $\Phi(\infty)$ muestra que no existe cambio alguno de la estabilidad estelar provocado por valores de $\Phi(\infty)$.

Debido a que la estrella de bosones no tiene un radio definido, sino más bien una atmósfera exponencialmente decreciente, varias definiciones de radio estelar están en uso. Aquí hemos adoptado el radio que encierra el 95% de la masa total. La Fig. 8.6 representa la relación masa-radio. El diagrama muestra que soluciones con pequeña masa tienen grandes radios. Luego, a medida que la densidad central crece, la masa aumenta mientras que el radio disminuye. El máximo en este diagrama es la estrella más densa, aún estable, que puede encontrarse. Es notorio que el radio se mantiene aproximadamente igual mientras que la masa crece fuertemente con el tiempo, produciéndose una estrella más densa. El aumento de la auto-interacción Λ produce radios mayores, de acuerdo a lo que uno esperaría de una fuerza repulsiva. Es posible comparar este diagrama con resultados similares para estrellas de neutrones (Fig. 7 de la Ref. [359]) y estrellas de bosones en Relatividad General (Fig. 3 de la Ref. [385]).

Hasta ahora hemos reconocido que las estrellas de bosones son más densas hacia el pasado, para valores mayores de $\Phi(\infty)$. La razón para esto puede verse en la Fig. 8.7: se produce un potencial gravitacional más profundo, dado por un aumento en la diferencia entre $\Phi(0)$ y $\Phi(\infty)$.

Para un dado valor de $\sigma(0)$, el comportamiento de las diferentes variables se encuentra graficado en la Fig. 8.8. Finalmente, en la Fig. 8.9 mostramos la dependencia de las configuraciones de equilibrio con el valor de ω . Se muestra la energía de ligadura en el intervalo $\sigma(0) \in (0, 0.3)$ para dos valores de la constante gravitacional efectiva. El valor de ω está en el rango $(50, 50000)$. Las curvas superiores en ambos diagramas corresponden a $\omega = 10000$ y 50000 y se

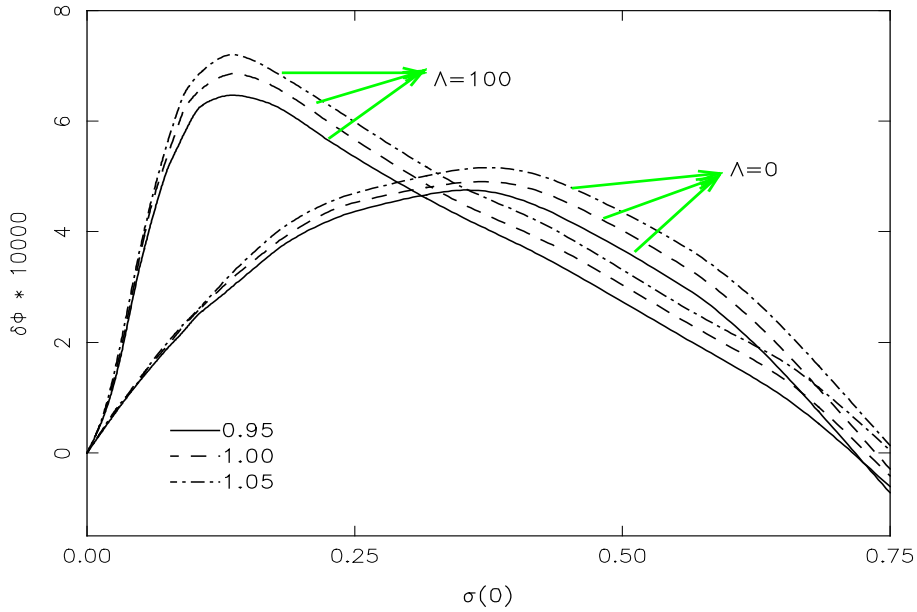


Figure 8.7: Comportamiento de la diferencia entre el valor central y asintótico del escalar de Brans-Dicke para $\omega = 400$ como función de $\sigma(0)$ y diferentes valores de $\Phi(\infty)$. Nótese el eje y ampliamente expandido.

superponen exactamente. Cuando ω tiende a infinito, se obtiene una solución relativista –con un valor diferente de G –. Recordemos que a pesar de los fuertes límites sobre ω válidos para la época actual, podríamos tener una función $\omega(\phi)$ que sea mucho menor en el pasado, por lo que todos los valores del acoplamiento pueden considerarse significativos.

8.6 Conclusiones

En este capítulo, hemos analizado las posibles configuraciones estáticas de estrellas de bosones a lo largo de la evolución del universo. Hemos visto que a diferencia de la Relatividad General, las variables dinámicas del objeto (radio, masa, número de partículas, etc.) cambian con el paso del tiempo, aún sin existir procesos de emisión o absorción de energía asociados con reacciones nucleares. Hemos propuesto también algunos posibles escenarios de evolución, como los conceptos de evolución estelar pura y memoria estelar. Descubrimos que las estrellas de bosones pueden ser estables en cualquier época, de acuerdo a una elección conveniente de su densidad central. Un número de características físicas concernientes a la relación masa-radio, el comportamiento de la diferencia entre el valor central y el asintótico de G y la dependencia de la estructura con el valor de ω también fueron comentadas. Estas configuraciones pueden en principio utilizarse para comparar con los resultados de un código numérico evolutivo o como condiciones iniciales del mismo. Tal vez, sólo el desarrollo de tal código pueda resolver en la práctica cual de los escenarios de evolución sucede en la práctica. Muy probablemente, esperamos, esto dependerá del valor de la densidad central, a través de la comparación con el tiempo de *free fall*.

En este capítulo no hemos intentado responder cual de los escenarios comentados sucede en realidad. En cambio, hemos introducido y estudiado un nuevo objeto en el cual puedan analizarse. Además de su posible relevancia física, las estrellas de bosones tienen ventajas computacionales notables comparadas con los agujeros negros. De cualquier forma, cualquiera de los escenarios es probable que ocurra en todos los objetos de larga vida, como agujeros

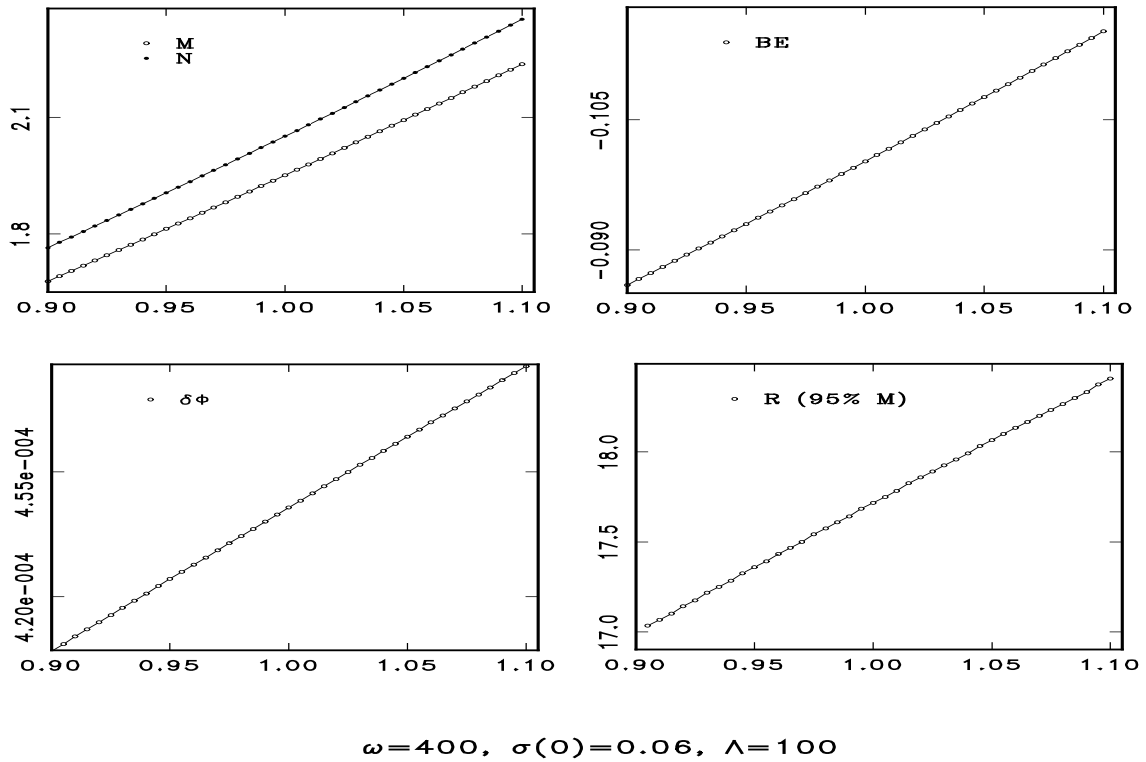


Figure 8.8: *Características de las estrellas de bosones para una dada densidad central como función de $\Phi(\infty)$.*

negros, cuerdas cósmicas y estrellas fermiónicas comunes como enanas blancas. Un estudio de estos últimos objetos en teorías alternativas de gravitación como las que analizamos en esta tesis fue recientemente realizado en la Ref. [390]. Allí, hemos encontrado que pequeñas variaciones temporales en G modifican sustancialmente la estructura estelar. La astrofísica debería ser sensitiva a la teoría de gravitación que la subyace, y quizás este sea el escenario donde tests definitivos puedan aparecer.

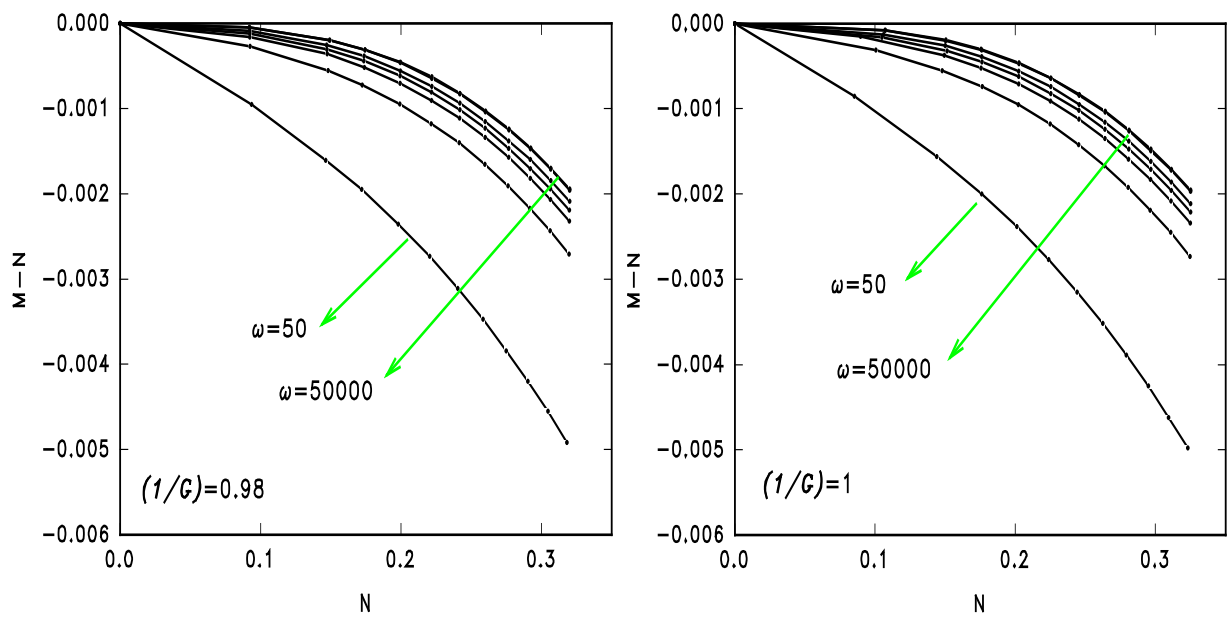


Figure 8.9: Energías de ligadura de las estrellas de bosones como función del parámetro w , en el rango 50 a 50000. El panel superior muestra modelos con $\Phi(\infty) = 0.98$, y el inferior con $\Phi(\infty) = 1$. Los valores de $\sigma(0)$ están en el rango $(0, 0.3)$.

Chapter 9

Epílogo

*El mundo era tan reciente que muchas cosas carecían de nombre,
y para mencionarlas había que se nalarlas con el dedo.*

Gabriel García Márquez
Cien a nos de soledad

No quisiéramos aquí ser repetitivos ni en cuanto a los objetivos –que pueden leerse en la Introducción– ni en cuanto a las conclusiones –que pueden leerse en cada capítulo–. Sería vano enumerar nuevamente los resultados concernientes a los modelos cosmológicos, de wormholes y gamma ray bursts, y a los modelos estelares teóricos analizados en la última parte. Más bien quisiéramos dar una visión somera y breve del status actual del tema estudiado en esta tesis. La impresión general puede resumirse así. A mediados de 1998, no existe ningún test definitivo que permita asegurar que solamente una teoría de gravitación es la que se adapta a todas las observaciones. Las teorías escalares tensoriales son la generalización más simple de la gravitación standard, de Einstein, y como tales, el candidato más fuerte como teoría de gravitación alternativa. Sus límites de campo débil han sido estudiados y encontrados de acuerdo –al menos para algunas de ellas– con los resultados actuales de los experimentos en el sistema solar. Los test de campo fuerte han también impuesto cotas sobre la forma de la acción gravitacional y se espera que los nuevos satélites de detección de la radiación de fondo cósmica junto con los experimentos de detección de ondas gravitacionales permitan continuar este proceso. Por otra parte, todas las teorías de gran unificación y multidimensionales parecen necesitar la presencia de campos escalares, generalmente acoplados a la curvatura. Esto hace que la teoría de Einstein no sea la mejor candidata para representar los fenomenos gravitatorios al menos en el universo primitivo –ya que el campo escalar es constante en todo el espacio-tiempo y ésto es solo una solución particular. Sin embargo, la mayoría de las teorías escalares tensoriales que sí se adaptan a las observaciones realizadas en nuestra época cósmica son, por ahora, casi indistinguibles de la Relatividad General en cualquier otro momento y presentan típicamente desviaciones del orden del 1%. Aún así, estas diferencias serán detectable en un futuro próximo. Asimismo, hemos se nalado algunas teorías que presentan un comportamiento extremo; aún concordando con las observaciones describen universos radicalmente distintos del escenario standard. El conocimiento del comportamiento de los modelos cosmológicos y de los procesos de evolución estelar (que son fuertemente afectados por una pequeña variación en G , véase [390]) servirá entonces para buscar este tipo de tests y para unificar nuestra visión teórica de los fenómenos gravitatorios. Como su tema fundamental, esperamos que esta tesis haya dado un pequeño paso en esa dirección. Debido a que nos hemos planteado recorrer un espectro de temas, todos ellos relacionados con el formalismo escalar tensorial y con fenómenos astrofísicos, es obvio se nalar que es mucho más lo que no se habrá encontrado en esta tesis que lo que

ella analiza. En particular, el proceso de producción y detección de ondas gravitacionales, el análisis del espectro de perturbaciones para modelos de inflación específicos y la formación de estructura son grandes temas ausentes en estas páginas. Esperemos, en todo caso, que ellas sean el prólogo de nuevas investigaciones. Quizás, sólo la ciencia sea capaz de darnos una lección de humildad tan acabada: para mi, el mundo sigue siendo tan reciente como entonces.

Apéndice

Recordamos aquí los factores de conversión, y los valores de algunas de las constantes fundamentales.

Factores de conversión

$$\begin{aligned}1 \text{ eV} &= 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \\1 \text{ GeV} &= 1.16 \times 10^{13} \text{ K} \\1 \text{ GeV}^{-1} &= 1.97 \times 10^{-14} \text{ cm} = 6.58 \times 10^{-25} \text{ s} \\1 \text{ J} &= 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \\1 \text{ erg} &= 10^{-5} \text{ J} \\1 \text{ Mpc} &= 3.1 \times 10^{24} \text{ cm}\end{aligned}$$

Constantes Fundamentales y masas de partículas fundamentales

$$\begin{aligned}G &= 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-3} \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} \\M_{\text{Pl}} &= 2.179 \times 10^{-8} \text{ kg} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \\c &= 2.998 \times 10^{10} \text{ cms}^{-1} \\\hbar &= 1.05 \times 10^{-32} \text{ Js} \\m_e &= 0.51 \text{ MeV} \\m_p &= 938.3 \text{ MeV} \\m_n &= 939.6 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Magnitudes astrofísicas y cosmológicas

$$\begin{aligned}M_{\odot} &= 2 \times 10^{33} \text{ g} \\R_{\odot} &= 6.96 \times 10^{10} \text{ cm} \\L_{\odot} &= 3.9 \times 10^{33} \text{ erg} \\H_0^{-1} &= 3000 h^{-1} \text{ Mpc} = 9.78 h^{-1} \times 10^9 \text{ yr} \\\rho_c &= 1.88 h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} = 1.05 h^2 \times 10^4 \text{ eV cm}^{-3}\end{aligned}$$

Bibliography

- [1] L. D. Landau & E. M. Lifchitz, *The classical theory of fields*, 4th edition (Pergamon, Oxford, UK, 1975).
- [2] C. Brans, *gr-qc 9705069*.
- [3] G. Berkeley, *Los principios del conocimiento humano* (1710; Orbis, Madrid, 1982).
- [4] E. Mach, *Desarrollo hist'orico cr'itico de la mec'anica* (1883; Espasa, Buenos Aires, 1950).
- [5] A. Einstein, *El significado de la relatividad* (1922; Agostini, Barcelona, 1985).
- [6] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A165**, 199 (1938).
- [7] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity* (CUP, London, 1923).
- [8] J. D. Barrow & F. J. Tipler, *The anthropic cosmological principle* (OUP, Oxford, 1986).
- [9] V. Canuto, P. J. Adams, S. H. Hsieh & E. Tiang, Phys. Rev. **D16**, 1643 (1979).
- [10] S. Weimberg, *Gravitation and cosmology* (J. Wiley & Sons, New York, 1972).
- [11] D. W. Sciama, Mon. Not. R. Astron. Soc. **113**, 34 (1953).
- [12] G. J. Whitrow & D. G. Randall, Mon. Not. R. Astron. Soc. **111** 495 (1951).
- [13] R. H. Dicke, Science **129**, 621 (1959).
- [14] A. Helmi & D. F. Torres, Rev. Mex. Astron. Astrophys. **33**, 123 (1997).
- [15] T. Kaluza, Sitz. Preus. Akad. Wiss. **33**, 966 (1921); citado en [202].
- [16] O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926); citado en [202].
- [17] Y. Thiry, Comptes Rendus (Par'is) **226**, 216 (1948); citado en [166].
- [18] P. Jordan, Ann. der Phys. **1**, 219 (1947).
- [19] C. Brans & R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- [20] P. G. Bergmann, Int. J. Theor. Phys. **1**, 25 (1968).
- [21] K. Nordvedt, Astrophys. J. **161**, 1059 (1970).
- [22] R. V. Wagoner, Phys. Rev. **D1**, 3209 (1970).
- [23] C. Romero & A. Barros, Phys. Lett. **A173**, 243 (1993).

- [24] J. O'Hanloon & B. O. J. Tupper, *Nuovo Cimento* **7**, 305 (1972).
- [25] N. Banerjee & S. Sen, *Phys. Rev.* **D56**, 1334 (1997).
- [26] C. Romero & A. Barros, *Gen. Rel. Grav.* **25**, 491 (1993).
- [27] V. Faraoni, *gr-qc 9805057*.
- [28] H. Bondi, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 423 (1957).
- [29] H. Vucetich, *Acad. Nac. Ciencias C'ordoba*, **61**, Noviembre (1996).
- [30] C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1981).
- [31] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **125**, 2163 (1962).
- [32] J. D. Barrow & K. Maeda, *Nucl. Phys.* **B341**, 294 (1992).
- [33] E. W. Kolb, D. S. Salopek & M. S. Turner, *Phys. Rev.* **D42**, 3925 (1990).
- [34] J. Lidsey, *Class. Quant. Grav.* **9**, 149 (1992).
- [35] D. Wands, *Class. Quant. Grav.* **11**, 269 (1994).
- [36] R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [37] C. Brans, *Class. Quant. Grav.* **5**, L197 (1988).
- [38] G. Magnano & L. Sokolowski, *Phys. Rev.* **D50**, 5039 (1994).
- [39] D. Wands, *Comology of Scalar-Tensor Gravity* (Ph.D. Thesis, University of Sussex, England, 1993).
- [40] M. B. Green, J. H. Schwarz & E. Witten, *Introduction to superstrings, Vol. 1* (Springer Verlag, New York, 1988).
- [41] C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec & M. J. Perry, *Nucl. Phys.* **B262**, 593 (1985).
- [42] E. J. Copeland, A. Lahiri & D. Wands, *Phys. Rev.* **D50**, 4868 (1994).
- [43] E. S. Fradkin & A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B261**, 1 (1985).
- [44] J. D. Barrow & K. E. Kunze, *gr-qc 9807040*.
- [45] K. Maeda, *Class. Quant. Grav.* **3**, 323 (1986).
- [46] M. Rainer & A. Zhuk, *phys. Rev.* **D54**, 6186 (1996).
- [47] E. Cremmer & B. Julia, *Phys. Lett.* **B80**, 48 (1978).
- [48] E. Cremmer & B. Julia, *Nucl. Phys.* **B156**, 141 (1979).
- [49] A. L. Berkin & R. W. Hellings, *Phys. Rev.* **D49**, 6442 (1994).
- [50] T. Damour & G. Esposito Farese, *Class. Quant. Grav.* **9**, 2093 (1992).
- [51] P. Sisterna & H. Vucetich, *Phys. Rev.* **D44**, 3096 (1991).

- [52] I. I. Shapiro et al., Phys. Rev Lett. **26**, 1132 (1971).
- [53] J. D. Anderson et al., Acta Astronautica **5**, 43 (1978).
- [54] J. D. Anderson et al., Proc. Astr. Soc. Aus. **9**, 324 (1991).
- [55] R. W. Hellings et al., Int. J. Theor. Phys. **28**; 1035 (1989).
- [56] R. W. Hellings et al., Phys. Rev. Lett. **51**, 1609 (1983).
- [57] J. O. Dickey, X. X. Newhall & J. G. Williams, Adv. Sp. Res. **9**, 75 (1989).
- [58] T. Damour, G. W. Gibbons & J. H. Taylor, Phys. Rev. Lett. **61**, 1151 (1988).
- [59] V. M. Kaspi, J. H. Taylor & M. Ryba, Astrophys. J. **428**, 713 (1994).
- [60] E. García-Berro, M. Hernanz, J. Isern & R. Mochkovitch, Mon. Not. R. Astron. Soc. **277**, 801 (1995).
- [61] L. V. Morrison, Nature **241**, 519 (1973).
- [62] J. G. Williams, W. S. Sinclair & C. F. Yoder, Geophys. Res. Lett. **5**, 943 (1978).
- [63] C. W. Chin & R. Stothers, Phys. Rev Lett. **36**, 833 (1976).
- [64] S. E. Thorsett, Phys. Rev. Lett. **77**, 1432 (1996).
- [65] P. Sisterna & H. Vucetich, Phys. Rev. Lett. **72**, 454 (1992).
- [66] D. S. Deaborn & D. N. Schramm, Nature **247**, 441 (1974).
- [67] R. D. Reasenberget al., Astrophys. J. **234**, L219 (1979).
- [68] J. H. Taylor, Rev. Mod. Phys. **66**, 711 (1994).
- [69] K. S. Thorne, *gr-qc 9706079*.
- [70] T. Chiba, T. Harada & K. Nakao, Prog. Theor. Phys. (Suppl.) **128**, 335 (1997).
- [71] J. D. Barrow, Phys. Rev. **D47**, 5329 (1993).
- [72] J. D. Barrow & J. P. Mimoso, Phys. Rev. **D50**, 3746 (1994).
- [73] J. P. Mimoso & D. Wands, Phys. Rev. **D51**, 477 (1995).
- [74] N. Van den Bergh, Gen. Rel. Grav. **15**, 441 (1983).
- [75] D. Lorentz-Petzold, Astrophys. Space Sci. **98**, 101 (1984).
- [76] D. Lorentz-Petzold, Astrophys. Space Sci. **98**, 249 (1984).
- [77] D. Lorentz-Petzold, Astrophys. Space Sci. **106**, 409 (1984).
- [78] D. Lorentz-Petzold, Astrophys. Space Sci. **106**, 419 (1984).
- [79] D. F. Torres & H. Vucetich, Phys. Rev. **D54**, 7373 (1996).
- [80] D. F. Torres, Rev. Mex. Astron. Astrophys. **34**, 61 (1998).

- [81] D. F. Torres, Phys. Lett. **A225**, 13 (1997).
- [82] R. Fakir & W. G. Unruh, Phys. Rev. **D41**, 1792 (1990).
- [83] P. J. Steinhardt & F. S. Ascheta, Phys. Rev. Lett. **64**, 2470 (1990).
- [84] A. R. Liddle & D. Wands, Phys. Rev. **D45**, 2665 (1992).
- [85] D. F. Torres, *Principio de Mach, teor'ia de la gravitaci'on y termodin'amica* (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de La Plata, 1995).
- [86] N. Sakai & K. Maeda, Prog. of Theor. Phys. **90**, 1001 (1993).
- [87] H. Nariai, Prog. Theor. Phys. **40**, 49 (1968).
- [88] H. Nariai, Prog. Theor. Phys. **42**, 544 (1968).
- [89] L. E. Gurevich, A. M. Finkelstein & V. A. Ruban, Astrophys. Space Sci. **22**, 231 (1973).
- [90] J. D. Barrow, Nature **272**, 211 (1978).
- [91] M. A. H. MacCallum, en *General relativity: An Einstein centenary survey*, S. Hawking & W. Israel, eds. (Cambridge University Press, Cambridge 1979).
- [92] V. A. Ruban & A. M. Finkelstein, Lett. Nuovo Cimento **5**, 289 (1972).
- [93] L. O. Pimentel, Phys. Lett. **B246**, 27 (1989).
- [94] P. Chauvet & J. L. Cervantes-Cota, Phys. Rev. **D52**, 3416 (1995).
- [95] A. K. Raychaudhuri, *Theoretical cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1979).
- [96] A. K. Raychaudhuri, S. Banerjee & A. Banerji, *General Relativity, astrophysics and cosmology* (Springer Verlag, New York, 1992).
- [97] G. F. R. Ellis, *Relativity and cosmology* (Academic Press, London, 1971).
- [98] J. L. Synge, *Relativity, the general theory* (Nord Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960), p.318.
- [99] L. O. Pimentel, Nuovo Cimento **B109**, 274 (1994).
- [100] J. P. Mimoso & D. Wands, Phys. Rev. **D52**, 5612 (1995).
- [101] A. R. Liddle, *astro-ph 9612093*.
- [102] A. D. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology* (Harwood Academic, Chur, Switzerland, 1990).
- [103] P. Coles & F. Lucchin, *Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure* (J. Wiley & Sons, New York, 1995).
- [104] V. A. Ruban, J.E.T.P. **45**, 629 (1978).
- [105] D. La & P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **62**, 376 (1989).
- [106] J. D. Barrow, Phys. Lett. **B235**, 40 (1990).

- [107] J. D. Barrow & P. Saich, Phys. Lett. **B249**, 406 (1990).
- [108] J. García Bellido & M. Quirós, Phys. Lett. **B243**, 45 (1990).
- [109] J. García-Bellido, A. Linde & D. Linde, Phys. Rev. **D50**, 730 (1994).
- [110] J. D. Barrow, Phys. Rev. **D51**, 2729 (1994).
- [111] S. Capozziello, R. de Ritis & P. Scudellaro, Phys. Lett. **A188**, 130 (1994).
- [112] S. Capozziello, R. de Ritis, C. Rubano & P. Scudellaro, Rivista del Nuovo Cimento **19**, n°4 (1996).
- [113] P. Painlevé, Bull. Soc. Math. **28**, 201 (1900); citado en [126].
- [114] P. Painlevé, Acta Math. **25**, 1 (1902); citado en [126].
- [115] G. Contopoulos, B. Grammaticos & A. Ramani, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 5795 (1993).
- [116] G. Contopoulos, B. Grammaticos & A. Ramani, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 5357 (1994).
- [117] G. Contopoulos, B. Grammaticos & A. Ramani, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 5313 (1995).
- [118] A. Latifi, M. Musette & R. Conte, Phys. Lett. **A194**, 83 (1994).
- [119] J. Demaret & C. Scheen, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 59 (1996).
- [120] C. Scheen & J. Demaret, Class. Quant. Grav. **13**, 1909 (1996).
- [121] A. Helmi & H. Vucetich, Phys. Lett. **A209**, 150 (1995).
- [122] A. Helmi & H. Vucetich, en *Chaos in gravitational N-body systems* S. Ferraz Mello et al. Eds. (Kluwer Publ., Dordrecht, 1996).
- [123] D. F. Torres & A. Helmi, Phys. Rev. **D54**, 6181 (1996).
- [124] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe* (CUP, Cambridge, England, 1993).
- [125] E. Kolb & M. Turner *The early universe* (Addison-Wesley, New York, 1990).
- [126] M. Lakshmanan & R. Sahadevan, Phys. Rep. **224**, 1 (1993).
- [127] L. Fuchs, Sitz. Akad. Wiss. (Berlín) **32**, 699 (1884); citado en [126].
- [128] S. Kovalevskaya, Acta Math. **12**, 177 (1889); citado en [126].
- [129] S. Kovalevskaya, Acta Math. **14**, 81 (1889); citado en [126].
- [130] A. Goriely, *Integrability and non-integrability of dynamical systems: A singularity analysis approach* (Ph.D. Thesis, Université Libre de Bruxelles, 1994).
- [131] C. Scheen, en *5th Rhine Workshop in Computer Algebra* (Saint-Louis, 1996).
- [132] M. J. Ablowitz, A. Ramani & H. Segur, Lett. Nuovo Cimento **23**, 333 (1978).
- [133] M. J. Ablowitz, A. Ramani & H. Segur, J. Math. Phys. **21**, 715 (1980).
- [134] F. J. Bureau, Ann. Math., **44**, 229 (1964).

- [135] F. J. Bureau, *Ann. Math.*, **46**, 1 (1964).
- [136] F. J. Bureau, *Ann. Math.*, **94**, 344 (1972).
- [137] R. Conte, A. Fordy & A. Pickering, *Physica* **D69**, 33 (1993).
- [138] L. E. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover, New York, 1956).
- [139] S. Capozziello & R. de Ritis, *Phys. Lett.* **A195**, 48 (1994).
- [140] S. Capozziello & R. de Ritis, *Phys. Lett.* **A177**, 1 (1993).
- [141] R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro & C. Stornaiolo, *Phys. Rev.* **D42**, 1091 (1990).
- [142] A. Helmi, *Integrabilidad y caos en teorías de Kaluza-Klein* (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de La Plata, 1994).
- [143] A. Ramani, B. Grammaticos & T. Bountis, *Phys. Rep.* **180**, 159 (1989).
- [144] A. Fordy & A. Pickering, *Phys. Lett.* **A160**, 347 (1991).
- [145] J. D. Barrow, Comunicación privada (1997).
- [146] J. D. Barrow, *Phys. Rep.* **85**, 1 (1982).
- [147] A. R. Liddle, A. Mazumdar & J. D. Barrow, *Phys. Rev.* **D58**, 027302 (1998).
- [148] R. H. Dicke, *Astrophys. J.* **152**, 1 (1968).
- [149] G. S. Greenstein, *Astrophys. Lett.* **1**, 139 (1968).
- [150] A. Serna, R. Domínguez-Tenreiro & G. Yepes, *Astrophys. J.* **391**, 433 (1992).
- [151] J. A. Casas, J. García-Bellido & M. Quirós, *Mod. Phys. Lett.* **A7**, 447 (1992).
- [152] J. A. Casas, J. García-Bellido & M. Quirós, *Phys. Lett.* **B278**, 94 (1992).
- [153] D. Kalligas, K. Nortvedt & R. V. Wagoner, *Phys. Rev.* **D56**, 7627 (1997).
- [154] A. Serna & J. M. Alimi, *Phys. Rev.* **D53**, 3074 (1996).
- [155] A. Serna & J. M. Alimi, *Phys. Rev.* **D53**, 3087 (1996).
- [156] J. M. Alimi & A. Serna, *astro-ph 9704254*.
- [157] A. Meisels, *Astrophys. J.* **252**, 403 (1982).
- [158] R. Domínguez-Tenreiro & G. Yepes, *Astrophys. J.* **177**, 5 (1987).
- [159] J. Yang, D. N. Schramm, G. Steigman & R. T. Rood, *Astrophys. J.* **227**, 697 (1979).
- [160] J. Yang, M. S. Turner, G. Steigman, D. N. Schramm & K. A. Olive, *Astrophys. J.* **281**, 493 (1984).
- [161] T. Damour, G. W. Gibbons & C. Gundlach, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 123 (1990).
- [162] R. A. Malaney & G. J. Mathews, *Phys. Rep.* **229**, 4 (1993).

- [163] L. Kawano, *Let's go: Early Universe* (Fermilab-Pub 92/04A).
- [164] J. Bernstein, L. S. Brown & G. Feimberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 25 (1989).
- [165] J. P. Mimoso en *Proceedings of the First Iberian Meeting on General Relativity and Quantum Gravity*, M. C. Besito et al. Eds. (World Scientific, Singapore, 1993).
- [166] J. P. Mimoso, *Models of the early universe* (Ph.D. Thesis, University of Sussex, England, 1993).
- [167] D. F. Torres, *Phys. Lett.* **B359**, 249 (1995).
- [168] L. A. Anchordoqui, D. F. Torres & H. Vucetich, *Phys. Lett.* **A222**, 43 (1996).
- [169] R. Dominguez-Tenreiro & M. Quirós, *An introduction to cosmology and particle physics* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [170] P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **146**, 542 (1967).
- [171] R. V. Wagoner, W. A. Fowler & F. Hoyle, *Astrophys. J.* **148**, 3 (1967).
- [172] R. V. Wagoner, *Astrophys. J. Suppl.* **18**, 247 (1969).
- [173] R. V. Wagoner, *Astrophys. J.* **179**, 343 (1973).
- [174] D. N. Schramm & R. V. Wagoner, *Ann. Rev. Nuc. Sci.* **27**, 37 (1977).
- [175] G. Steigman, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B37C**, 68 (1995).
- [176] D. N. Schramm & M. S. Turner, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 303 (1998).
- [177] T. P. Walker, G. Steigman, D. N. Schramm, K. A. Olive & H. S. Kang, *Astrophys. J.* **376**, 51 (1991).
- [178] A. M. Boesgaard & G. Steigman, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **23**, 319 (1985).
- [179] C. J. Copi, D. N. Schramm & M. S. Turner, *Astrophys. J.* **455**, L95 (1995).
- [180] C. J. Copi, D. N. Schramm & M. S. Turner, *Science* **267**, 192 (1995).
- [181] W. Freedman, en *Proceedings of the 18th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, A. Olinto et al. Eds. (World Scientific, Singapore, 1997).
- [182] D. H. Weimberg, J. Miralda-Escud'e, L. Hernquist & N. Katz, *astro-ph 9701012*.
- [183] A. E. Evrard, *astro-ph 9701148*.
- [184] C. L. Bennet, M. S. Turner & M. S. White, *Phys. Today*, November, 32 (1997).
- [185] J. A. Willick, M. A. Strauss, A. Dekel & T. Kolatt, *Astrophys. J.* **436**, 627 (1997).
- [186] G. Steigman, D. N. Schramm & J. E. Gunn, *Phys. Lett.* **B66**, 202 (1977).
- [187] K. A. Olive, D. N. Schramm, G. Steigman & T. P. Walker, *Phys. Lett.* **B236**, 454 (1990).
- [188] W. Mampe et. al., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 593 (1989).

- [189] L. Montanet et al., Phys. Rev. **D50**, 1173 (1994). Ediciones posteriores de las Tablas de Datos de Partículas se encuentran en las páginas del PDG-WWW (URL: <http://pdg.lbl.gov/>).
- [190] M. Rees, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B16**, 3 (1990).
- [191] P. Wesson, Gen. Rel. Grav. **16**, 193 (1984).
- [192] V. A. Kotelecky & S. Samuel, Phys. Lett. **B270**, 21 (1991).
- [193] B. Mashhoon, H. Liu & P. Wesson, Phys. Lett. **B331**, 305 (1994).
- [194] G. Ma, Phys. Lett. **A143**, 183 (1990).
- [195] A. Macías, G. J. Fuentes & O. Obregón, Gen. Rel. Grav. **25**, 549, (1993).
- [196] P. S. Wesson et al., Int. J. Mod. Phys. **A11**, 3247 (1996).
- [197] P. S. Wesson, Mod. Phys. Lett. **A7**, 921 (1992).
- [198] P. S. Wesson, J. Ponce de Leon, J. Math. Phys. **33**, 3883 (1992).
- [199] P. S. Wesson, Astrophys. J. **436**, 547 (1994).
- [200] Ø. Grøn & H. Soleng, Gen. Rel. Grav. **20**, 1115 (1988).
- [201] P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **22**, 707 (1990).
- [202] J. M. Overduin & P. S. Wesson, Phys. Rep. **283**, 303 (1997).
- [203] L. A. Anchordoqui, *Gravitación con masa en reposo variable* (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de La Plata, 1995).
- [204] L. A. Anchordoqui, G. S. Birman, S. E. Perez Bergliaffa & H. Vucetich, Gen. Rel. Grav. **28**, 701 (1996).
- [205] R. B. Mann & D. E. Vincent, Phys. Lett. **A107**, 75 (1985).
- [206] Ø. Grøn, Astron. Astrophys. **193**, 1 (1988).
- [207] A. A. Coley, Astron. Astrophys. **233**, 305 (1990).
- [208] D. F. Torres, H. Vucetich & A. Plastino, Phys. Rev. Lett. **79**, 1588 (1997); **E80**, 3889 (1998).
- [209] U. Tirnakli & D. F. Torres, Eur. Phys. J. **B14**, 691, 2000; D. F. Torres & Tirnakli U., Physica **A261**, 499, 1998
- [210] D. F. Torres & H. Vucetich, Physica **A259**, 397 (1998); *astro-ph 9807043*.
- [211] K. Schwarzschild, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Physik-math. Kl. **189** (1916); citado en [213].
- [212] G. D. Birkoff, *Relativity and modern physics* (Harvard University Press, Cambridge, U.S.A., 1923).

- [213] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973).
- [214] E. Kasner, Am. J. Math. **43**, 130 (1921).
- [215] G. Lemaître, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **A53**, 51 (1933); citado en [213].
- [216] A. Einstein & N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935).
- [217] J. L. Synge, Proc. Roy. Irish Acad. **A53**, 83 (1950); citado en [213].
- [218] D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
- [219] C. Fronsdal, Phys. Rev. **116**, 778 (1959).
- [220] M. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
- [221] G. Szekeres, Publ. Mat. Debrecen **7**, 285 (1960); citado en [213].
- [222] J. A. Wheeler, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).
- [223] E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime physics*, 4th edition (W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1997).
- [224] M. S. Morris, K. S. Thorne & U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [225] J. Friedman, M. Morris, I. D. Novikov, F. Echeverría, G. Klinkhammer, K. S. Thorne & U. Yurtsever, Phys. Rev. **D42**, 1915 (1990).
- [226] K. S. Thorne, en *Proceedings, XIII International Conference on General Relativity and Gravitation* (IOP Publishing, Bristol, England, 1993).
- [227] F. Echeverría, G. Klinkhammer & K. S. Thorne, Phys. Rev. **D44**, 1077 (1991).
- [228] S. W. Kim & K. S. Thorne, Phys. Rev. **D43**, 3929 (1991).
- [229] V. Frolov & I. D. Novikov, Phys. Rev. **D42**, 1057 (1990).
- [230] M. Visser, *Lorentzian wormholes* (AIP Press, New York, 1996).
- [231] M. Visser, Phys. Rev. **55**, 5212 (1997).
- [232] I. D. Novikov, JETP **68**, 439 (1989).
- [233] I. D. Novikov, Phys. Rev. **D45**, 1989 (1992).
- [234] S. W. Hawking, Phys. Rev. **D46**, 603 (1992).
- [235] M. Visser, Phys. Rev. **D47**, 554 (1993).
- [236] M. S. Morris & K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1987).
- [237] C. Sagan, *Contacto* (Simon & Schuster, New York, 1985).
- [238] K. S. Thorne, *Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy* (W. W. Norton, New York, 1994).

- [239] R. Feynmann, *El car'acter de la ley f'isica* (Ed. Orbis, Buenos Aires, 1988).
- [240] L. A. Anchordoqui, S. Perez Bergliaffa & D. F. Torres, *Phys. Rev.* **D55**, 5226 (1997).
- [241] L. A. Anchordoqui, A. G. Grunfeld & D. F. Torres, *Grav. Cosmol.* **4**, 287 (1998).
- [242] L. A. Anchordoqui, A. G. Grunfeld & D. F. Torres, en *Proceedings, XVIII Encontro Nacional de F'isica de Part'iculas y Campos* (SBF, Minas Gerais, Brazil, p. 408, 1997).
- [243] D. Hochberg & M. Visser, *Phys. Rev.* **D56**, 4745 (1997).
- [244] M. Visser & D. Hochberg, en *Proceedings, Haifa Workshop: The internal Structure of Black Holes and Spacetime Singularities*, L. M. Burko & A. Ori Eds. (IOP Publishing, Bristol, 1997).
- [245] J. L. Friedman, K. Schleich & D. M. Witt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1486 (1993).
- [246] H. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793 (1948); citado en [230].
- [247] A. Agnese & M. La Camera, *Phys. Rev.* **D51**, 2011 (1995).
- [248] C. H. Brans, *Phys. Rev.* **125**, 2194 (1962).
- [249] K. K. Nandi, A. Islam & J. Evans, *Phys. Rev.* **D55**, 2497 (1997).
- [250] N. Van den Bergh, *Gen. Rel. Grav.* **12**, 863 (1980).
- [251] W. Bruckman & E. Kazes, *Phys. Rev.* **D16**, 261 (1977).
- [252] S. Kar & D. Sahdev, *Phys. Rev.* **D52**, 2030 (1995).
- [253] *Higher transcendental functions* (Bateman Manuscript Project), editado por A. Erdélyi et al. (McGraw-Hill, N.Y., 1955), Vol. I p. 101 & Vol. III, p.267.
- [254] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick & J. M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
- [255] R. T. Rauch, *Phys. Rev.* **D26**, 931 (1982).
- [256] R. T. Rauch & H. T. Nieh, *Phys. Rev.* **D24**, 2029 (1981).
- [257] S. Kim, *Phys. Rev.* **D34**, 1011 (1986).
- [258] G. Germán, *Phys. Rev.* **D32**, 3307 (1985).
- [259] S. Hojman, M. Rosenbaum, M. P. Ryan & L. C. Sheply, *Phys. Rev.* **D17**, 3141 (1978).
- [260] A. Saa, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 205 (1997).
- [261] F. W. Hehl, Y. Neeman, J. Nitsch & P. von der Heyde, *Phys. Lett.* **B78**, 102 (1978).
- [262] P. Baeckler, *Phys. Lett.* **B99**, 322 (1981).
- [263] P. Baeckler, *Phys. Lett.* **A96**, 279 (1983).
- [264] S. Kim & B. H. Cho, *Phys. Lett.* **A124**, 243 (1987).

- [265] L. A. Anchordoqui, Mod. Phys. Lett. **A13**, 1095 (1998).
- [266] D. Hochberg, Phys. Lett. **B251**, 349 (1990).
- [267] B. Bhawal & S. Kar, Phys. Rev. **D46**, 2464 (1992).
- [268] K. A. Bronnikov, Acta Phys. Polon. **B4**, 251 (1973).
- [269] K. A. Bronnikov, Grav. Cosmol. **2**, 221 (1996).
- [270] E. Poisson & M. Visser, Phys. Rev. **D52**, 7318 (1995).
- [271] K. K. Nandi, B. Bhattacharjee, S. M. K. Alam & J. Evans, Phys. Rev. **D57**, 823 (1998).
- [272] A. Ori, Phys. Rev. Lett. **71**, 2517 (1993).
- [273] T. A. Roman, Phys. Rev. **D47**, 1370 (1993).
- [274] S. Kar, Phys. Rev. **D49**, 862 (1994).
- [275] A. Wang & P. Letelier, Prog. Theor. Phys. **94**, 137 (1995).
- [276] L. A. Anchordoqui, D. F. Torres, M. L. Trobo & S. Perez-Bergliaffa, Phys. Rev. **D57**, 829 (1998).
- [277] D. Hochberg & M. Visser, Phys. Rev. Lett. **81**, 746 (1998).
- [278] D. Hochberg & M. Visser, Phys. Rev. **D58**, 044021 (1998).
- [279] S. Coleman, Nucl. Phys. **B307**, 867 (1988).
- [280] S. Giddings & A. Stroeminger, Nucl. Phys. **B321**, 481 (1988).
- [281] S. Coleman, Nucl. Phys. **B310**, 643 (1988).
- [282] L. J. Garay & J. García-Bellido, Nucl. Phys. **B400**, 413 (1993).
- [283] R. M. Wald & U. Yurtsever, Phys. Rev. **D44**, 403 (1991).
- [284] M. Visser, Phys. Lett. **B349**, 443 (1995).
- [285] J. G. Cramer, R. L. Forward, M. S. Morris, M. Visser, G. Benford & G. A. Landis, Phys. Rev. **D51**, 3117 (1995).
- [286] P. Gonzalez-Díaz, Phys. Rev. **D56**, 6293 (1997).
- [287] M. Visser, Phys. Rev. **D56**, 7578 (1997).
- [288] M. Visser, Science **276**, 88 (1997).
- [289] R. Mann, Class. Quant. Grav. **14**, 2927 (1997).
- [290] T. Piran, Gen. Rel. Grav. **29**, 1363 (1997).
- [291] D. F. Torres, G. E. Romero & L. A. Anchordoqui, Phys. Rev. **D58**, 123001 (1998).
- [292] D. F. Torres, G. E. Romero & L. A. Anchordoqui (*Honorable Mention, Gravity Foundation Research Awards 1998*), Mod. Phys. Lett. **A13**, 1575 (1998).

- [293] P. Parsons, *New Scientist*, March 28 (1998), p14.
- [294] L. Landau & E. Lifchitz, *Mecanique* (Mir, Mosc'u, 1969).
- [295] P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco, *Gravitational lenses* (Springer-Verlag, Berlín, 1992).
- [296] J. R. Gott III & J. E. Gunn, *Astrophys. J.* **190**, L105 (1974).
- [297] B. Paczyński, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 419 (1996).
- [298] J. R. Gott III, *Astrophys. J.* **243**, 140 (1981).
- [299] M. Vietri & J. P. Ostriker, *Astrophys. J.* **267**, 488 (1983).
- [300] B. Paczyński, *Astrophys. J.* **301**, 503 (1986).
- [301] B. Paczyński, *Astrophys. J.* **304**, 1 (1986).
- [302] T. Piran, *Gen. Rel. Grav.* **28**, 1421 (1996).
- [303] R. W. Klebesadel, I. B. Strong & R. A. Olson, *Astrophys. J.* **182**, L85 (1973).
- [304] G. L. Fishman & C. A. Meegan, *Ann. Rev. Astron. Astrophys* **33**, 415 (1995).
- [305] M. R. Metzger, S.G. Djorovski, S. R. Kulkarni, C. C. Steidel, K.L. Adelberger, D. A. Frail, E. Costa & F. Frontera, *Nature* **387**, 878 (1997).
- [306] G. J. Fishman & D. H. Hartmann, *Science*, July (1997) p46.
- [307] G. Fishman et al., *Astrophys. J. Suppl.* **92**, 229 (1994).
- [308] B. Schaefer & T. Cline, *Astrophys. J.* **289**, 490 (1985).
- [309] J. M. Quashnock & D. Q. Lamb, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265**, L59 (1993).
- [310] R. Narayan & T. Piran, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265**, L65, (1993).
- [311] V. Petrosian & B. Efron, *Astrophys. J.* **441**, L37 (1995).
- [312] T. E. Strohmeyer, E. E. Feinmore & J. A. Miralles, *Astrophys. J.* **432**, 665 (1994).
- [313] J. Hakkila et. al. in *AIP Conf. Proc. No. 384: Fourth Hunstville Symposium on Gamma Ray Bursts*, (New York, AIP) (1998).
- [314] M. Tegmark et al., *Astrophys. J.* **466**, 757 (1996).
- [315] T. Piran, *Astrophys. J.* **389**, L45 (1992).
- [316] E. Cohen & T. Piran, *Astrophys. J.* **444**, L25 (1995).
- [317] D. Eichel, M. Livio, T. Piran & D. N. Schramm, *Nature* **340**, 126 (1989).
- [318] R. Narayan, B. Paczyński & T. Piran, *Astrophys. J.* **395**, L83 (1992).
- [319] R. Narayan, T. Piran & A. Shemi, *Astrophys. J.* **379**, L1 (1991).
- [320] E. S. Phinney, *Astrophys. J.* **380**, L17 (1991).

- [321] J. H. Taylor & J. M. Weisberg, *Astrophys. J.* **253**, 908 (1982).
- [322] A. Dar, *astro-ph 9709231*.
- [323] M. Ruffert & H.-T. Janka, *astro-ph 9804132*.
- [324] R. J. Nemiroff, J. P. Norris, C. Kouveliotou, G. J. Fishman, C. A. Meegan & W. S. Paciesas, *Astrophys. J.* **423**, 432 (1994).
- [325] I. Mitrofanov, *astro-ph 9707342*.
- [326] D. M. Palmer et al., *astro-ph 9802024*.
- [327] B. McBreen & L. Metcalfe, *Nature* **332**, 234 (1988).
- [328] J. R. Mattox, J. Schachter, L. Molnar, R. C. Hartman & A. R. Patnaik, *Astrophys. J.* **481**, 95 (1997).
- [329] Guest Investigator Pages, BATSE Collaboration. Véase las p'aginas de Internet en el URL <http://coss.gsfc.nasa.gov/coss>.
- [330] C. von Montigny et al., *Astrophys. J.* **440**, 525 (1995).
- [331] M. C. Begelman, R. D. Blandford & M. J. Rees, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 255 (1984).
- [332] J. A. Eliek & M. Kafatos, *Astrophys. J.* **271**, 804 (1983).
- [333] R. D. Blandford & A. Levinson, *Astrophys. J.* **441**, 79 (1995).
- [334] P. A. Becker & M. Kafatos, *Astrophys. J.* **453** 83 (1995).
- [335] M. Visser, *Phys. Rev.* **D39**, 3182 (1989).
- [336] O. Almaini & A. C. Fabian, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288**, L19 (1997).
- [337] H. C. Ferguson, R. E. Williams & L. L. Cowie, *Physics Today* **50**, 24 (1997).
- [338] B. Link & R. I. Epstein, *Astrophys. J.* **466** 764 (1996).
- [339] B. Link, Comunicación privada (1998).
- [340] L. Valtaoja, H. Karttunen, Yu. Efimov & N.M. Shakhovskoy, *Astron. Astrophys.* **278**, 371 (1993).
- [341] D. J. Kaup, *Phys. Rev.* **172**, 1331 (1968).
- [342] R. Ruffini & S. Bonazzola, *Phys. Rev.* **187**, 1767 (1969).
- [343] M. Colpi, S. L. Shapiro & I. Wasserman, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2485 (1986).
- [344] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure* (Chicago University Press, Chicago, 1939).
- [345] P. Jetzer & J. J. Van der Bij, *Phys. Lett.* **B227**, 341 (1989).
- [346] P. Jetzer, *Phys. Lett.* **B231**, 433 (1989).

- [347] J. J. Van der Bij & M. Gleiser, Phys. Lett. **B194**, 482 (1987).
- [348] P. Jetzer, Phys. Rep. **220**, 163 (1992).
- [349] A. R. Liddle & M. S. Madsen, Int. J. Mod. Phys. **D1**, 101 (1992).
- [350] A. B. Henriques, A. R. Liddle & R. G. Moorhouse, Nucl. Phys. **B337**, 737 (1990).
- [351] C. M. G. de Sousa & J. M. Tomazelli, *gr-qc 9507043*.
- [352] F. Pisano & J. M. Tomazelli, Mod. Phys. Lett. **A11**, 6
- [353] F. Pisano & J. M. Tomazelli, Mod. Phys. Lett. **A11**, 647 (1996).
- [354] M. A. Gunderson & L. G. Jensen, Phys. Rev. **D48**, 5628 (1993).
- [355] Z. Tao & X. Xue, Phys. Rev. **D45**, 1878 (1992).
- [356] D. F. Torres, Phys. Rev **D56**, 3478 (1997).
- [357] D. F. Torres, en *Proceedings of the International Seminar of Mathematical Cosmology* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [358] E. A. Power & J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29**, 480 (1957).
- [359] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano & J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse* (University of Chicago Press, Chicago, 1965).
- [360] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd edition (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992).
- [361] A. W. Whinnett, *gr-qc 9711080*.
- [362] J. D. Barrow & P. Parsons, Phys. Rev. **D55**, 3906 (1997).
- [363] J. D. Barrow, Phys. Rev. **D46**, 3227 (1992).
- [364] J. D. Barrow, Gen. Rel. Grav. **26**, 1 (1994).
- [365] J. D. Barrow & B. J. Carr, Phys. Rev. **D54**, 3920 (1996).
- [366] F. E. Schunck & M. P. Dabrowski, *astro-ph 9807039*.
- [367] F. E. Schunck & A. R. Liddle, Phys. Lett. **B404**, 25 (1997).
- [368] J. Lee & I. Koh, Phys. Rev. **D53**, 2236 (1996).
- [369] F. E. Schunck, *gr-qc 9802054*.
- [370] G. L. Comer & H. Shinkai, Class. Quantum Grav. **15**, 669 (1998).
- [371] T. Damour & K. Nordtvedt, Phys. Rev. Lett. **70**, 2217 (1993).
- [372] T. Damour & K. Nordtvedt, Phys. Rev. **D48**, 3436 (1993).
- [373] J. Balakrishna & H. Shinkai, *gr-qc 9712065*.

- [374] M. Yu. Khlopov, B. A. Malomed & Ya. B. Zeldovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **215**, 575 (1985).
- [375] D. Grasso, *Phys. Rev.* **41** 2998 (1990).
- [376] M. Bianchi, D. Grasso & R. Ruffini, *Astron. Astrophys.* **231**, 301 (1990).
- [377] M. S. Madsen & A. R. Liddle, *Phys. Lett.* **B251**, 507 (1990).
- [378] E. Seidel & W. M. Suen, *Phys. Rev.* **D 42**, 384 (1990).
- [379] E. Seidel & W. M. Suen, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2516 (1994).
- [380] D. F. Torres, A. R. Liddle & F. E. Schunck, *Phys. Rev.* **D57**, 4821 (1998).
- [381] D. F. Torres, F. E. Schunck & A. R. Liddle, *Class. Quant. Grav.* **15**, 3701 (1998) *gr-qc 9803094*.
- [382] F. V. Kusmartsev, E. W. Mielke & F. E. Schunck, *Phys. Rev.* **D43**, 3895 (1991).
- [383] F. V. Kusmartsev, E. W. Mielke & F. E. Schunck, *Phys. Lett.* **A157**, 465 (1991).
- [384] F. V. Kusmartsev, *Phys. Rep.* **183**, 1 (1989).
- [385] F. V. Kusmartsev & F. E. Schunck, *Physica* **B178**, 24 (1992).
- [386] K. Maeda, T. Tachizawa & T. Torii, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 450 (1994).
- [387] F. V. Kusmartsev, E. W. Mielke, Y. N. Obukhov & F. E. Schunck, *Phys. Rev.* **D51**, 924 (1995).
- [388] T. Harada, *Phys. Rev.* **D57**, 4802 (1998).
- [389] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade & A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps* (Birkhauser, Boston, 1985).
- [390] O. Benvenuto, L. Althaus & D. F. Torres, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **305** 905 (1999).