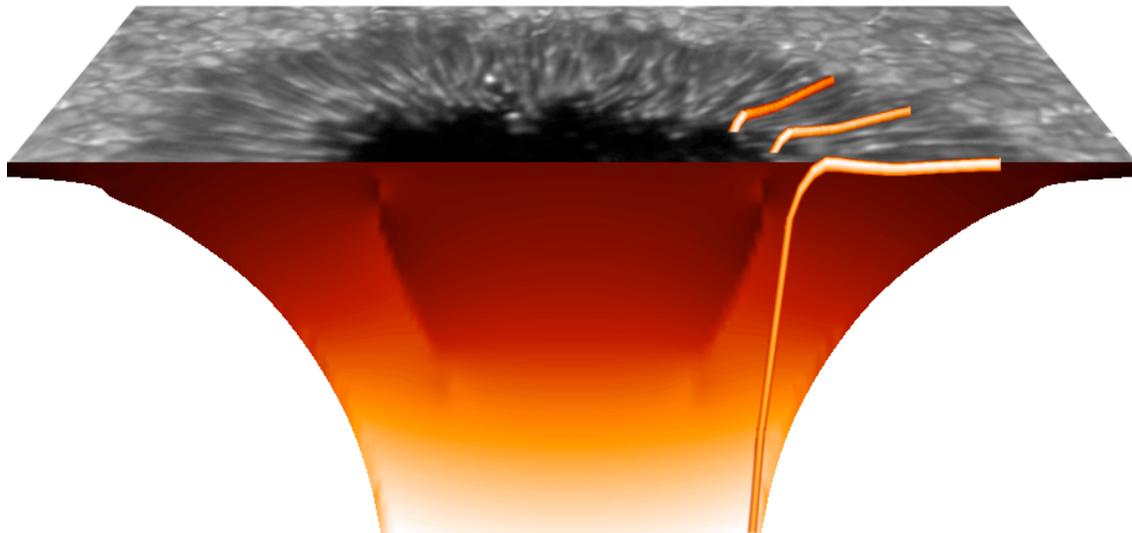


Polarisation von Linien im Spektrum einer Sonnenflecken-Penumbra



Daniel Müller

Das Titelbild zeigt die Aufnahme eines Sonnenflecks im G-Band ($\lambda = 430.5 \pm 0.5$ nm), unterlegt mit dem magnetostatischen Sonnenfleckmodell von Jahn & Schmidt (1994). Dieses Modell dient als Hintergrundfeld, in dem dünne magnetische Flussröhren aufsteigen. Die Farbschattierung des Hintergrunds repräsentiert die magnetische Feldstärke: Bei der optischen Tiefe $\tau = 1$ erreicht sie im Zentrum des Flecks $B = 270$ mT, in der mittleren Penumbra etwa $B = 170$ mT. Der Radius des Flecks beträgt 16 000 km.

Diplomarbeit

Polarisation von Linien im Spektrum einer Sonnenflecken-Penumbra

Daniel Müller

angefertigt am
Kiepenheuer-Institut für Sonnenphysik
August 2001
2. Auflage

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
1. Einleitung	3
1.1. Die Sonne	3
1.2. Sonnenflecken	3
1.2.1. Historisches	3
1.2.2. Wie entstehen Sonnenflecken?	6
1.2.3. Struktur von Sonnenflecken	6
1.3. Ein Modell für die Penumbra	7
2. Messung solarer Magnetfelder	11
2.1. Parametrisierung polarisierten Lichts durch Stokes-Parameter	11
2.2. Zeeman-Effekt	13
2.2.1. Zeeman-Effekt für atomare Energieniveaus	13
2.2.2. Normaler und anomaler Zeeman-Effekt	14
3. Strahlungstransport	17
3.1. Grundlagen	17
3.1.1. Thermodynamisches Gleichgewicht	17
3.1.2. Spektrallinien	18
3.1.3. Berechnung des Linienabsorptionskoeffizienten	19
3.2. Die Strahlungstransportgleichung im Stokes-Formalismus	21
3.2.1. Geometrische Interpretation	23
3.3. Formale Lösung der Strahlungstransportgleichung	25
3.4. Numerische Lösung der Strahlungstransportgleichung	25
3.4.1. Die DELO-Methode	25
3.4.2. Implementierung	26
3.4.3. Konvergenz	27
4. Asymmetrische Stokes-V-Profile	31
4.1. Symmetriebetrachtungen	31
4.2. Analyse von Stokes-V-Profilen	32
5. Entstehung von Spektrallinien in Gegenwart einer Magnetopause	35
5.1. Berechnung der auf die Magnetopause auftreffenden Intensität	35
5.2. Analytische Lösung oberhalb der Magnetopause	36

5.3.	Verhältnis von Linieneinsenkung und Linienstärke	37
5.4.	Vergleichende Rechnungen	38
5.4.1.	Gradienten der Milne-Eddington-Atmosphäre	38
5.4.2.	Vergleich mit der numerischen Lösung	39
6.	Modellierung von Magnetfeldern in Sonnenflecken	43
6.1.	Koordinatensysteme	43
6.1.1.	Definition der verwendeten Bezugssysteme	43
6.2.	Ein einfaches Modell für das Magnetfeld eines Sonnenflecks	46
6.3.	Modellierung magnetischer Flussröhren in der Penumbra	47
6.3.1.	Diskretisierung	47
6.3.2.	Einbettung in ein Hintergrundmodell	48
7.	Spektrale Signatur penumbraler Flussröhren	53
7.1.	Charakter und diagnostische Möglichkeiten zweier Spektrallinien	53
7.2.	Verhältnisse von Zeeman-Aufspaltung und Doppler-Verschiebung	55
7.3.	Berechnung von Stokes-V-Profilen in der Penumbra	57
7.3.1.	Bemerkung zur Divergenzfreiheit des Magnetfeldes	57
7.4.	Mitte-Rand-Variation von Stokes-V-Profilen	60
7.5.	Mitte-Rand-Variation der NCP	62
7.6.	Stokes-V-Profile für verschiedene radiale Positionen	64
7.7.	Mitte-Rand-Variation der NCP: Ein vereinfachtes Modell	66
7.7.1.	Isotherme Flussröhren in der mittleren Penumbra	66
8.	Azimutale Variation der NCP in einem Sonnenfleck	75
8.1.	Analytische Abschätzung verschiedener Beiträge zur NCP	76
8.2.	NCP-Variation für ein Penumbramodell mit Flussröhre	78
8.2.1.	Symmetriebrechung durch magneto-optische Effekte	79
8.2.2.	Abhängigkeit der NCP von der Strömungsgeschwindigkeit	82
8.3.	Synthetische NCP-Karten	82
8.4.	Beobachtungen	85
9.	Ausblick: Inversion von Stokes-Profilen mit neuronalen Netzen	87
A.	Ergänzungen	91
A.1.	Anomaler Zeeman-Effekt: Statistische Gewichte	91
A.2.	Analytische Abschätzung der NCP: Wellenlängenverschiebungen	91
A.3.	Grenzschichten magnetischer Flussröhren	93
B.	Überblick über die verwendeten Programme	95
B.1.	Struktur des Programmpakets DIAMAG	95
B.1.1.	Kurzbeschreibung der Programme	95
B.2.	Struktur des Programmpakets SPOTMACHINE	97

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die Polarisation von Spektrallinien in der Penumbra von Sonnenflecken. Dazu werden die Ergebnisse magnetohydrodynamischer Simulationen einer magnetischen Flussröhre (Schlichenmaier et al. 1998) in ein dreidimensionales axialsymmetrisches Modell eines Sonnenflecks eingebettet und für dieses Modell synthetische Linienprofile der vier Stokes-Parameter berechnet.

Die Strahlungstransportgleichung wird dabei mit der DELO-Methode gelöst, von der wir zeigen, dass sie auch für Diskontinuitäten in den atmosphärischen Parametern linear bzgl. der Diskretisierung $\Delta \log(\tau)$ in der optischen Tiefe konvergiert. Dies wird anhand eines zweikomponentigen Atmosphärenmodells mit Magnetopause untersucht, für das sich eine analytische Lösung angeben lässt (Steiner 2000).

Gradienten bzw. Diskontinuitäten in der Strömungsgeschwindigkeit des Plasmas und im Magnetfeld führen zu asymmetrischen Stokes-Profilen, wobei wir uns in dieser Arbeit auf die Analyse von Stokes-V-Profilen konzentrieren. Dabei betrachten wir zwei photosphärische Spektrallinien des neutralen Eisens, Fe I 630.25 nm und Fe I 1564.8 nm, und erläutern deren unterschiedliche Netto-Zirkularpolarisation (NCP), die durch magnetische Flussröhren verursacht wird und ein Maß für die Asymmetrie eines Linienprofils darstellt. Wir berechnen die Mitte-Rand-Variation der NCP und finden, dass deren Betrag für die Linie Fe I 630.25 nm für heliozentrische Winkel von $\theta = 23^\circ$ (Randseite) bzw. $\theta = 15^\circ$ (Zentrumsseite) sein Maximum erreicht und für größere Winkel monoton abfällt, während er für die Infrarotlinie in der zentrumsseitigen Penumbra bei etwa 57° maximal wird, auf der Randseite sogar erst nahe $\theta = 90^\circ$.

Der Grund für das unterschiedliche Verhalten der NCP beider Linien liegt im unterschiedlichen Anregungspotential der beiden Übergänge und der Tatsache, dass die Doppler-Verschiebung linear in der Wellenlänge ist, die Zeeman-Aufspaltung dagegen quadratisch. Mit Hilfe eines vereinfachten Modells führen wir eine Parameterstudie durch und beschreiben, wie die NCP von einzelnen physikalischen Größen magnetischer Flussröhren beeinflusst wird.

Mit unserem dreidimensionalen Modell können wir Linienprofile für beliebige Orte in der Penumbra und für verschiedene Positionen des Sonnenflecks auf der Sonne berechnen. Bei der Analyse von Spektren bei festem radialem Abstand vom Zentrum des Flecks finden wir, dass die Variation der NCP als Funktion des Fleckwinkels für die Infrarotlinie in hohem Maße antisymmetrisch relativ zur Verbindungslinie von Sonnenmitte und Fleckmitte ist, während sie für die Linie Fe I 630.25 nm symmetrisch variiert. Wir zeigen, dass die antisymmetrische Variation durch magneto-optische Effekte (Faraday-Pulsation) hervorgerufen wird, die durch die Nicht-Diagonalelemente der Absorptionsmatrix in der Strahlungstransportgleichung vermittelt werden. Aus einer analytischen Abschätzung ergibt sich, dass für die Infrarotlinie eine Diskontinuität im Azimutwinkel des Magnetfelds den größten Beitrag zur NCP liefert, während für die Linie Fe I 630.25 nm eine Diskontinuität im Inklinationswinkel die Entstehung der NCP dominiert.

Schließlich berechnen wir synthetische NCP-Karten, die wir mit Beobachtungsdaten des *Tenerife Infrared Polarimeters* für die Linie Fe I 1564.8 nm und des *Advanced Stokes Polarimeters* für die Linie Fe I 630.25 nm vergleichen. Es zeigt sich, dass die berechnete Variation der Netto-Zirkularpolarisation gut mit den Beobachtungen übereinstimmt.

1. Einleitung

1.1. Die Sonne

Die Sonne ist in vielerlei Hinsicht ein sehr gewöhnlicher Stern von mittlerer Größe und mittleren Alters. Was sie für uns so bedeutsam macht, ist ihre Nähe zu uns: Mit einer Entfernung zur Erde von 150 Mio. km ist sie etwa 100000 mal näher als der nächste Fixstern, α Centauri. Die Sonne ist ein Hauptreihenstern der Spektralklasse G2 mit einem Radius von $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8$ m, einer Masse von $1.99 \cdot 10^{30}$ kg und einer Leuchtkraft von $3.8 \cdot 10^{26}$ W. In ihrem Kern wird bei einer Temperatur von bis zu $15.7 \cdot 10^6$ K (Zentraltemperatur) Wasserstoff zu Helium fusioniert, wobei die Energie fast vollständig innerhalb von 25% des Radius (d. h. innerhalb von 1.5% des Volumens) erzeugt wird. Der Energietransport findet bis ca. $0.7 \cdot R_{\odot}$ durch Strahlungsaustausch statt. In der äußeren Hülle, in der die Temperatur von $2.2 \cdot 10^6$ K auf eine Effektivtemperatur von 5778 ± 3 K abfällt, wird die Energie durch Konvektion transportiert. Die Schichtung der Konvektionszone ist superadiabatisch und damit instabil. Am unteren Rand der Konvektionszone schießt die Konvektion in die stabil geschichtete innere Strahlungstransportzone hinein, weshalb diese Übergangsschicht als Overshoot-Region bezeichnet wird (*engl.* overshoot: „über das Ziel hinausschießen“). Nach den heutigen Vorstellungen finden hier die Dynamo-Prozesse statt, die das solare Magnetfeld erzeugen, das sich u.a. in Form von Sonnenflecken manifestiert. Fast das gesamte Licht der Sonne wird in einer Schicht von etwa 100 km Dicke, der *Photosphäre*, emittiert, die oberhalb der Konvektionszone liegt. Nach außen hin schließt sich die *Chromosphäre* an, die im Mittel 1000 – 2000 km dick ist und eine Temperatur von 10000 – 20000 K besitzt. Darüber liegt eine dünne *Übergangsschicht* und die *Korona*, in der die Temperaturen 10^6 K und mehr betragen (Stix 1989).

1.2. Sonnenflecken

1.2.1. Historisches

Von dunklen Flecken auf der Sonne wurde bereits in der Antike berichtet, und auch Kepler beobachtete 1607 einen Sonnenfleck, den er jedoch fälschlicherweise als Transit des Planeten Merkur identifizierte. Kurz nach der Entwicklung des Teleskops meldeten dann Fabricius (1611) und der Jesuitenpater Christoph Scheiner (1611) unabhängig die „Entdeckung“.

Fast 300 Jahre später entdeckte der amerikanische Astronom G. E. Hale (Hale 1908a,b), dass in Sonnenflecken starke Magnetfelder vorherrschen. In diesen und späteren Beobachtungen (Hale & Nicholson 1938) fand er, dass in allen beobachteten Sonnenflecken mit Hilfe des Zeeman-Effekts (siehe Abschnitt 2.2) Magnetfelder messbar waren, die im Mittelpunkt des Flecks eini-

ge Hundert mT bzw. einige Tausend Gauß¹ betragen und zum äußeren Rand auf unter Hundert mT abfielen. Hale & Nicholson (1938) fanden ferner mit Hilfe von Messungen der Polarisation von Spektrallinien, dass das Magnetfeld in der Fleckmitte senkrecht zur Sonnenoberfläche steht und am äußeren Rand der *Penumbra*, dem helleren Ring, der das dunkle Zentrum (die *Umbra*) umgibt, um weniger als 25° gegenüber der Sonnenoberfläche geneigt ist. Nach Hales Vorstellung entstanden Sonnenflecken durch „Wirbelstürme“, die durch ihre Sogwirkung genug Materie aufwirbelten, um die darunterliegende Sonnenoberfläche zu verdecken und dunkel erscheinen zu lassen. Entsprechend vermutete er spiralförmige Geschwindigkeitsfelder, die vermittels der freien Elektronen des ionisierten Plasmas Magnetfelder induzieren sollten. Der Versuch, mit Hilfe des Doppler-Effekts magnetisch nicht aufspaltender Spektrallinien solche spiralförmigen Strömungen zu messen, scheiterte jedoch. Stattdessen beobachtete Evershed (1909) in der *Penumbra* Doppler-Verschiebungen in Absorptionslinien, die sich nur als horizontale, radial auswärts gerichtete Strömungen interpretieren ließen. St. John (1913a,b) bestätigte diesen später nach Evershed benannten Effekt anhand der Linienkernverschiebung von über 500 Absorptionslinien, so dass Hales „Tornado-Hypothese“ verworfen wurde.

Abb. 1.1 zeigt eine Weißlicht-Aufnahme der Sonne vom 20. September 1999, aufgenommen am *Osservatorio Astrofisico di Catania*, und darunter die Speckle-Bildrekonstruktion eines Sonnenflecks, beobachtet am selben Tag im G-Band ($\lambda = 430.5 \pm 0.5$ nm) mit dem *Dutch Open Telescope* auf La Palma.

¹ 1 Gauß = 10⁻⁴ Tesla. In der Sonnenphysik ist es aus historischen Gründen üblich, die magnetische Feldstärke in Gauß zu messen. Wir werden in dieser Arbeit jedoch ausschließlich das SI-System verwenden.

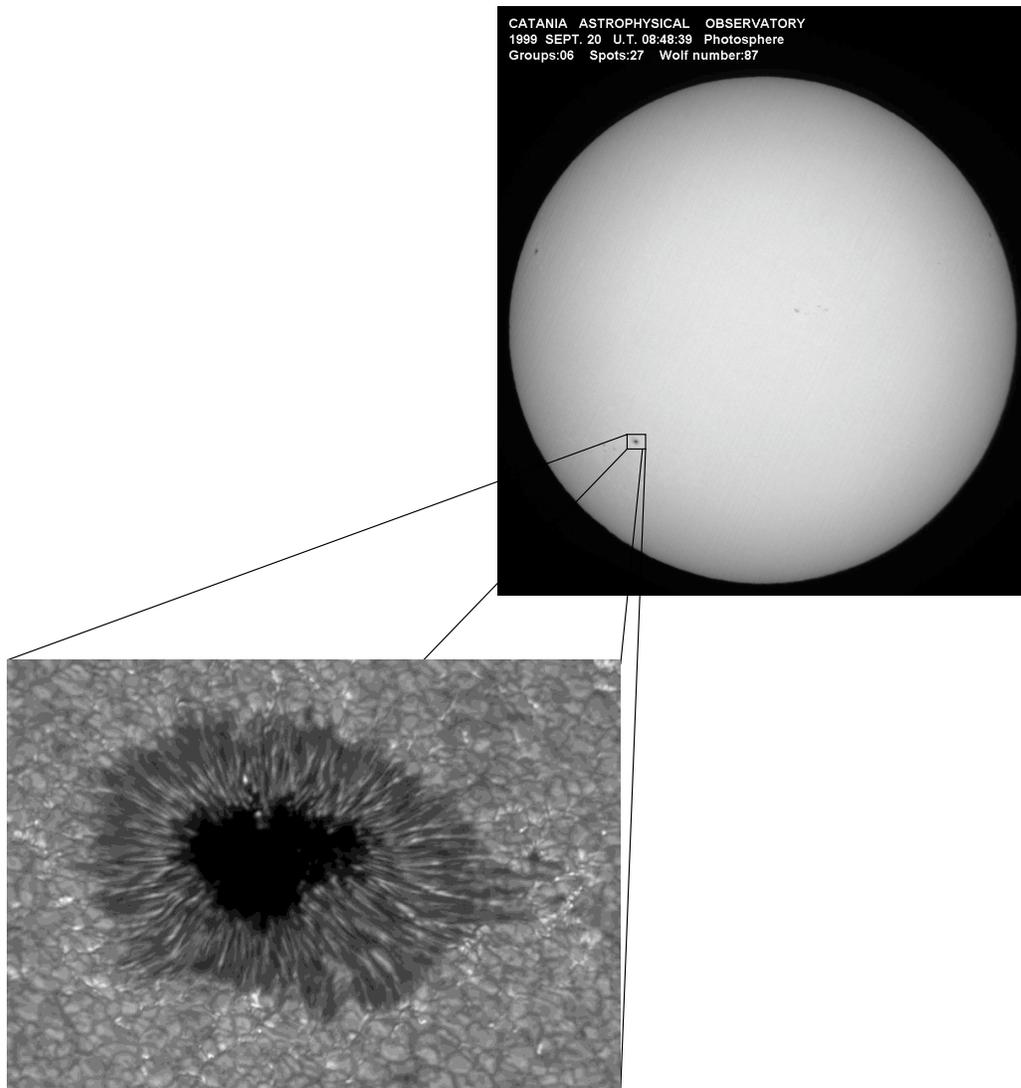


ABBILDUNG 1.1.: Die Sonne am 20. September 1999, aufgenommen am *Osservatorio Astrofisico di Catania*. Darunter ein Bild des Sonnenflecks AR 8704 im G-Band ($\lambda = 430.5 \pm 0.5$ nm), beobachtet von P. Sütterlin mit dem *Dutch Open Telescope* auf La Palma.

1.2.2. Wie entstehen Sonnenflecken?

Den heutigen Modellvorstellungen zu Folge entstehen Sonnenflecken dadurch, dass magnetische Flusskonzentrationen vom Boden der Konvektionszone aufsteigen und als Bögen durch die Oberfläche stoßen, wo daraufhin zwei Gebiete entgegengesetzter magnetischer Polarität sichtbar werden (Abb. 1.2). Oft ist der magnetische Fluss ungleichmäßig konzentriert, so dass nur ein Fleck als solcher zu erkennen ist. Die Dunkelheit von Sonnenflecken relativ zur ruhigen Sonne lässt sich dadurch verstehen, dass der konvektive Energietransport durch starke Magnetfelder behindert wird, da sich das Plasma nur entlang der magnetischen Feldlinien frei bewegen kann (Biermann 1941; Alfvén 1942).

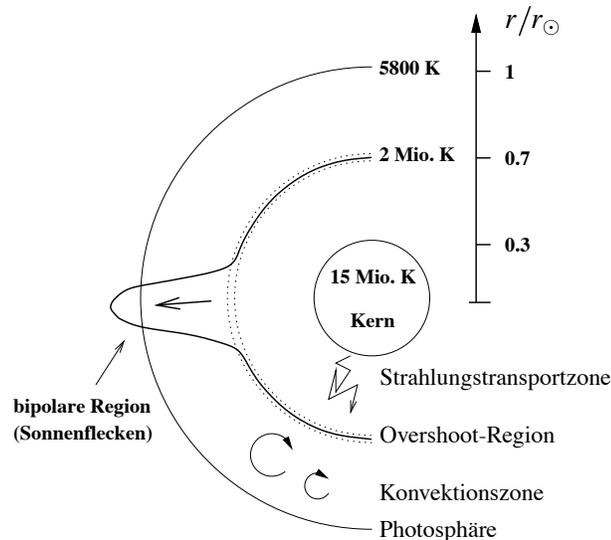


ABBILDUNG 1.2.: Entstehung von Sonnenflecken: Der solare Dynamo arbeitet in der Overshoot-Region. Durch den Ausbruch einer instabil werdenden magnetischen Flussröhre entstehen an der Sonnenoberfläche bipolare Regionen und damit Sonnenflecken. Gezeichnet ist eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse der Sonne.

1.2.3. Struktur von Sonnenflecken

Der Blick auf einen Sonnenfleck (Abb. 1.1) zeigt zwei deutlich zu unterscheidende Bereiche: die Umbra, deren Radius etwa 40% des Gesamtradius beträgt, und die außerhalb liegende Penumbra. Die Umbra ist bis auf einzelne helle umbrale Punkte sehr homogen, der Wärmefluss durch die Sonnenatmosphäre ist hier gegenüber der ruhigen Sonne um das Vierfache erniedrigt. Die Penumbra zeigt radial ausgerichtete helle und dunkle Filamente. Normiert auf die mittlere Intensität I_{QS} der ruhigen Sonne bei $\lambda = 500$ nm beträgt ihre gemittelte photometrische Intensität $0,75 \cdot I_{QS}$, mit etwa $0,9 \cdot I_{QS}$ in den hellen Filamenten und $0,6 \cdot I_{QS}$ in den dunklen (Collados et al. 1988; Müller 1973). Abb. 1.3 zeigt einen Ausschnitt aus der Penumbra mit filamentartiger Struktur, deren Elemente Durchmesser von etwa $0,35'' \approx 250$ km haben (Müller 1973; Sütterlin 2001).

Der reduzierte Wärmefluss, verursacht durch die Behinderung der Konvektion durch das Magnetfeld, führt zu einer reduzierten Effektivtemperatur von $T_{\text{eff}} = 4000$ K in der Umbra und $T_{\text{eff}} =$

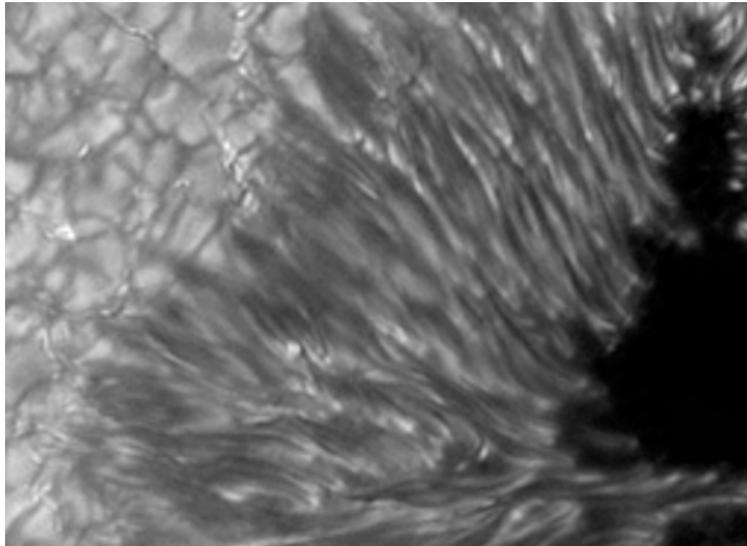


ABBILDUNG 1.3.: Die Feinstruktur der Penumbra. Der Ausschnitt zeigt ein Gebiet von 20400×14700 km. Die penumbralen Filamente sind deutlich zu erkennen. (O. von der Lühe, Vakuum-Turm-Teleskop, Teneriffa, Speckle-Bildrekonstruktion von M. Sailer und F. Kneer)

5375 K in der Penumbra im Vergleich zu $T_{\text{eff}} = 5778$ K in der ruhigen Sonne. Da die Opazität der Atmosphäre temperaturabhängig ist, liegt das Niveau, an dem die Atmosphäre undurchsichtig wird (optische Tiefe $\tau = 1$) in der Umbra und der Penumbra tiefer als in der ruhigen Sonne, man sieht demnach in tiefere Schichten der Atmosphäre. Diese Einsenkung in der optischen Tiefe wird als *Wilson-Depression* bezeichnet und beträgt in der Umbra etwa 360 km, in der Penumbra etwa 140 km.

Das photosphärische Magnetfeld eines Sonnenflecks

Beobachtungen zeigen, dass die zentrale Magnetfeldstärke eines Sonnenflecks 200 – 350 mT beträgt und dabei mit zunehmendem Durchmesser der Umbra ansteigt (Brants & Zwaan 1982; Kopp & Rabin 1992; Collados et al. 1994). An der Grenzfläche zwischen Umbra und Penumbra werden Feldstärken um 210 mT beobachtet (Lites et al. 1990), zum äußeren Rand fällt die Feldstärke auf 80 – 100 mT ab (Beckers & Schröter (1969) und andere). Im Zentrum des Flecks sind die magnetischen Feldlinien senkrecht zur Sonnenoberfläche ausgerichtet, der Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen nimmt in erster Näherung linear mit dem Radius ab. Am äußeren Rand der Penumbra beobachtet man Fluktuationen des Neigungswinkels von etwa 20° (Abb. 1.4).

1.3. Ein Modell für die Penumbra

Um die erhöhte Helligkeit der Penumbra gegenüber der Umbra zu erklären, wurde von Schmidt (1991) das Konzept der *Austauschkonvektion magnetischer Flussröhren* vorgeschlagen. Es wird angenommen, dass eine dünne magnetische Flussröhre ein konvektives Element darstellt, das sich

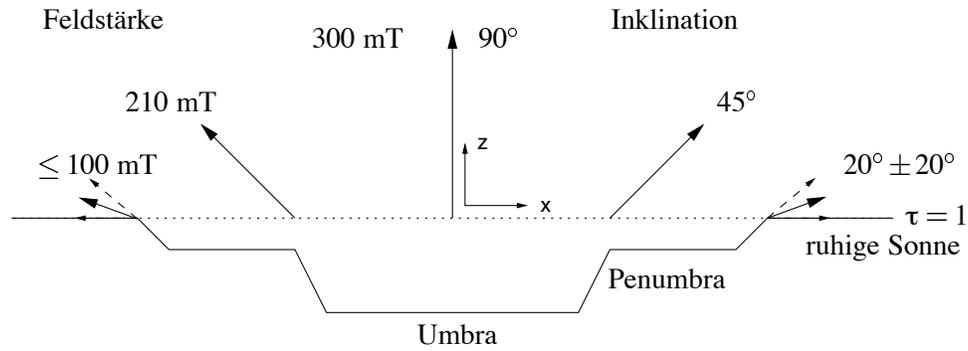


ABBILDUNG 1.4.: Skizze des photosphärischen Magnetfelds eines Sonnenflecks. Die magnetische Feldstärke und der Neigungswinkel der Magnetfeldlinien gegenüber der Horizontalen nehmen nach außen hin ab. Die $\tau = 1$ -Linie liegt in der Umbra und der Penumbra tiefer als in der ruhigen Sonne (Wilson-Depression, überhöht gezeichnet).

als physikalische Einheit bewegt. Seine Bewegung wird durch die instabile Schichtung der subphotosphärischen Penumbra getrieben: Eine Flussröhre, die anfänglich entlang der Magnetopause liegt, wird durch Strahlungsaustausch von der heißeren ruhigen Sonne aufgeheizt und dehnt sich dabei aus. Durch den entstehenden Dichteunterschied erfährt die Flussröhre eine Auftriebskraft und beginnt, in der superadiabatischen Schichtung der Penumbra in Richtung Photosphäre aufzusteigen. Beim Eintritt in die Photosphäre kühlt die aufgestiegene Flussröhre durch den plötzlich effektiven Strahlungsaustausch mit der Umgebung aus und sinkt wieder ab. Unter Anwendung dieses Konzepts der Austauschkonvektion konstruierten Jahn & Schmidt (1994) ein magnetostatisches Sonnenfleckmodell mit einer wärmedurchlässigen Magnetopause zwischen Penumbra und ruhiger Sonne (Abb. 1.5). Die Randbedingungen, wie z. B. die Radien R_U und R_P der Umbra und Penumbra und die zugehörigen Wärmeflüsse F_U und F_P , wurden aus beobachteten Werten abgeleitet. Mit einer vorgegebenen Geometrie der beiden Stromschichten zwischen Umbra – Penumbra (*Peripatopause*) und Penumbra – ruhiger Sonne (*Magnetopause*) und unter Annahme eines skalaren Potentials außerhalb der Stromschichten für das Magnetfeld konnte dann iterativ die thermische Struktur und die Magnetfeldkonfiguration des Sonnenfleckmodells berechnet werden.

Aufbauend auf dieses Modell führte Schlichenmaier (1997) magnetohydrodynamische Rechnungen zur Dynamik magnetischer Flussröhren in der Penumbra durch, die die Grundlage dieser Arbeit bilden. Abb. 1.6 zeigt ein Bild einer solchen Flussröhre, zusammen mit einem Ausschnitt aus der Penumbra eines Sonnenflecks. Die Abkühlung des aufsteigenden heißen Plasmas beim Eintritt in die Photosphäre durch Strahlungsaustausch wurde von Schlichenmaier et al. (1999) berechnet und bietet eine Erklärung für die hellen penumbralen Punkte mit dem nach außen gerichteten „Schweif“, die in Abb. 1.6 links oben zu sehen sind.

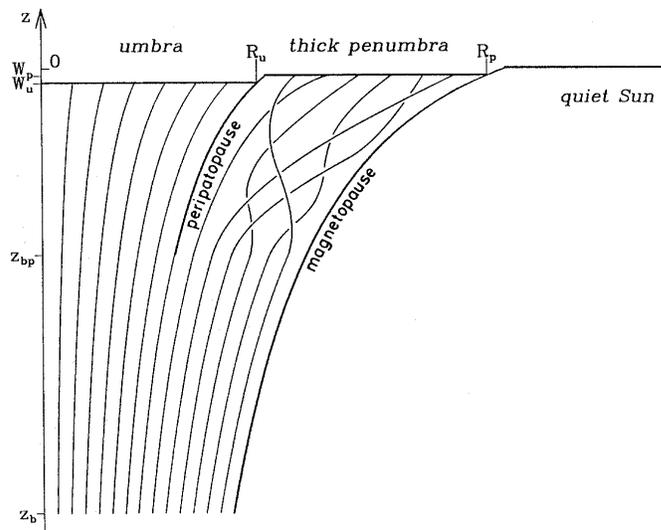


ABBILDUNG 1.5.: Die erhöhte Helligkeit der Penumbra gegenüber der Umbra kann mit dem Konzept der Austauschkonvektion erklärt werden. Dabei wird durch magnetische Flussröhren Energie in die Penumbra transportiert (Jahn 1992).

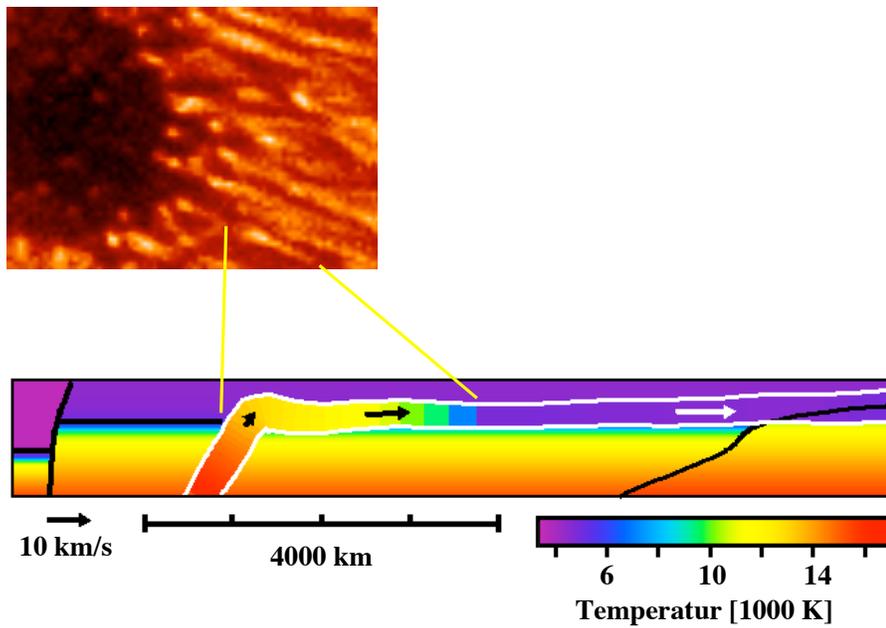


ABBILDUNG 1.6.: MHD-Simulation einer magnetischen Flussröhre in der Penumbra. Das von unten aufströmende heiße Plasma kühlt beim Eintritt in die Photosphäre aus und wird nach außen hin beschleunigt. Der Radius der Röhre ist vergrößert dargestellt (Schlichenmaier et al. 1998).

2. Messung solarer Magnetfelder

Die Erforschung solarer Magnetfelder ist eng mit der Messung und Interpretation der Spektren polarisierten Lichts verbunden. Die Gegenwart eines Magnetfeldes führt zur Aufhebung der Entartung atomarer Energieniveaus (*Zeeman-Effekt*) und zu einer Polarisation der emittierten Strahlung.

Die Untersuchung polarisierten Lichts begann schon sehr früh. Bartholinus (1670) und Huygens (1690) entdeckten die Polarisation, als sie feststellten, dass sich Licht nach Durchlaufen eines doppelbrechenden Kristalls anders als gewöhnliches Licht verhält. Huygens konnte durch Konstruktion von Kugelwellen den ordentlichen Strahl erklären, nicht jedoch den außerordentlichen. Um 1817 schlug Young vor, dass hier nicht longitudinale, sondern transversale „Vibrationen“ vorlägen, und 1824 bewies Fresnel, dass es sich ausschließlich um transversale Wellen handelt. Die daraus abgeleitete *Vektor*beschreibung ermöglichte erstmals eine Erklärung der Polarisationsphänomene. Der Begriff der Polarisation wurde 1810 von Malus eingeführt, als dieser die Herstellung polarisierten Lichts durch Reflexion erklärte, und ist vom Begriff der „Polarität“ abgeleitet, mit dem man die duale Natur magnetischer Pole beschreibt.

2.1. Parametrisierung polarisierten Lichts durch Stokes-Parameter

Zur vollständigen Beschreibung polarisierter Strahlung sind vier Parameter notwendig. Als besonders nützlich hat sich der Formalismus von G. G. Stokes (Stokes 1852) erwiesen, da die von ihm verwendeten Parameter direkt mit physikalisch messbaren Größen verknüpft sind und eine Verallgemeinerung der Beschreibung unpolarisierten Lichts darstellen, das durch seine Intensität charakterisiert wird. Die Darstellung orientiert sich im folgenden an den Ausführungen von Rees (1987).

Ausgangspunkt für die Beschreibung einer elektromagnetischen Welle ist die Darstellung des elektrischen Feldvektors \mathbf{E} in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Wir betrachten eine quasi-monochromatische Welle, definiert als die Superposition vieler statistisch unabhängiger Wellenzüge mit einer mittleren Frequenz ν und der dazugehörigen mittleren Wellenlänge λ . Die spektrale Breite der Welle sei $\Delta\nu \ll \nu$. Für eine solche Welle, die sich in positiver z -Richtung ausbreitet, seien

$$E_x = \xi_x(t) e^{i(\tilde{\phi}_x(t) - 2\pi\nu t + 2\pi z/\lambda)}, \quad E_y = \xi_y(t) e^{i(\tilde{\phi}_y(t) - 2\pi\nu t + 2\pi z/\lambda)} \quad (2.1)$$

die zueinander orthogonalen komplexen Komponenten von \mathbf{E} . Die Amplituden ξ_x , ξ_y und Phasen $\tilde{\phi}_x$, $\tilde{\phi}_y$ variieren zeitlich langsam, sind also näherungsweise konstant über ein Zeitintervall, das kurz gegenüber der Kohärenzzeit $(\Delta\nu)^{-1}$ der Welle ist. Die Amplituden und Phasen von \mathbf{E} sind keine Observablen, bestimmte Mittelwerte lassen sich aber berechnen, indem man die durch geeignete optische Elemente transmittierte Intensität misst.

Für einen festen Aufpunkt beschreibt der Vektor \mathbf{E} als Funktion der Zeit eine Raumkurve, die für vollständig polarisiertes Licht eine Ellipse darstellt. Wir definieren eine Bewegung von \mathbf{E} im Uhrzeigersinn, von einem Beobachter gesehen, in dessen Richtung sich die zugehörige elektromagnetische Welle bewegt, als *rechtshändig* zirkular polarisiert, eine Bewegung *entgegen dem Uhrzeigersinn* als *linkshändig*. Der Drehsinn wird durch die Phasendifferenz $\delta = \tilde{\phi}_x - \tilde{\phi}_y$ bestimmt, so dass $\sin \delta > 0$ für rechtshändig und $\sin \delta < 0$ für linkshändig zirkular polarisiertes Licht.

Angenommen, im Strahlengang befindet sich ein optisches Element, das die Komponente E_y um eine Phase ε relativ zu E_x verzögert, gefolgt von einem Polarisator, der linear polarisiertes Licht mit Winkel θ (gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn) relativ zur x -Achse transmittiert. Dann ist der elektrische Feldvektor des transmittierten Lichts in Richtung θ :

$$E(t; \theta, \varepsilon) = E_x \cos \theta + E_y e^{i\varepsilon} \sin \theta. \quad (2.2)$$

Die zugehörige Intensität (eine reelle Zahl) ist proportional zu

$$T_{trans}(\theta, \varepsilon) = \langle E(t; \theta, \varepsilon) E^*(t; \theta, \varepsilon) \rangle, \quad (2.3)$$

wobei $*$ für komplexe Konjugation steht und $\langle \dots \rangle$ eine zeitliche Mittelung über die Beobachtungszeit darstellt, die groß gegen die Periode ν^{-1} der Welle ist. Um die zur Beschreibung polarisierten Lichts notwendigen Parameter zu erhalten, betrachte man nun sechs Intensitätsmessungen mit den folgenden Winkeleinstellungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0, \\ \theta &= 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

so dass das System nur linear polarisiertes Licht transmittiert, und

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\pi}{2}, \\ \theta &= \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

womit rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht gemessen werden.

Bezeichnen wir die gemessenen Intensitäten $I_{trans}(\theta, \varepsilon)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} I_{\downarrow, 0} &= I_{trans}(0, 0), & I_{\downarrow, \frac{\pi}{4}} &= I_{trans}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \\ I_{\downarrow, \frac{\pi}{2}} &= I_{trans}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), & I_{\downarrow, \frac{3\pi}{4}} &= I_{trans}\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \\ I_{\circlearrowleft} &= I_{trans}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), & I_{\circlearrowright} &= I_{trans}\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Damit lassen sich nun die Stokes-Parameter als Kombination dieser Intensitätsmessungen *definieren*:

$$\begin{aligned} I &\equiv I_{\downarrow, 0} + I_{\downarrow, \frac{\pi}{2}}, \\ Q &\equiv I_{\downarrow, 0} - I_{\downarrow, \frac{\pi}{2}}, \\ U &\equiv I_{\downarrow, \frac{\pi}{4}} - I_{\downarrow, \frac{3\pi}{4}}, \\ V &\equiv I_{\circlearrowleft} - I_{\circlearrowright}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Unter Benutzung der Gleichungen (2.1) – (2.5) lässt sich diese Definition auch mit Hilfe der Amplituden und Phasen des elektrischen Feldvektors \mathbf{E} ausdrücken:

$$\begin{aligned} I &\equiv \langle \xi_x^2 \rangle + \langle \xi_y^2 \rangle, \\ Q &\equiv \langle \xi_x^2 \rangle - \langle \xi_y^2 \rangle, \\ U &\equiv 2\langle \xi_x \xi_y \cos \delta \rangle, \\ V &\equiv 2\langle \xi_x \xi_y \sin \delta \rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei $\langle \dots \rangle$ wieder eine Mittelung über die Zeit bezeichnet. Für vollständig polarisiertes Licht sind δ und ξ_x/ξ_y zeitlich konstant. In diesem Fall folgt aus obigen Gleichungen direkt, dass

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2, \quad (2.7)$$

entsprechend der Tatsache, dass zur Beschreibung vollständig polarisierten Lichts nur drei unabhängige Parameter nötig sind (alternativ z. B. zwei Amplituden und eine Phasendifferenz). Für teilweise polarisiertes Licht muss die Gleichung (2.7) ersetzt werden durch die Ungleichung

$$I^2 \geq I_p^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (2.8)$$

Der Polarisationszustand einer elektromagnetischen Welle lässt sich in kompakter Form als *Stokes-Vektor* $\mathbf{I} = (I, Q, U, V)^T$ (T : transponiert) schreiben.¹

2.2. Zeeman-Effekt

Pieter Zeeman entdeckte 1896, dass Spektrallinien in einem externen Magnetfeld eine Aufspaltung erfahren (Zeeman 1897a,b,c). In der ersten Veröffentlichung berichtete er lediglich von der *Verbreiterung* der Na I D-Linien, konnte den Effekt jedoch bereits mit der klassischen Theorie von Lorentz erklären. Die ersten Versuche einer quantenmechanischen Erklärung des normalen Zeeman-Effekts wurden 1916 von Debye und Sommerfeld unternommen und zwei Jahre später von Rubinowicz und Bohr erweitert. Im folgenden soll der Zeeman-Effekt für Spektrallinien atomarer Übergänge in Anlehnung an Herzberg (1944) und Solanki (1987) kurz erläutert werden.

2.2.1. Zeeman-Effekt für atomare Energieniveaus

Die Hamilton-Funktion eines Atoms in einem externen Magnetfeld ist in erster Ordnung gegeben durch

$$H = H_0 + H_1 = H_0 + \frac{e}{2m_e c} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\mathbf{B}. \quad (2.9)$$

Dabei ist H_0 die Hamiltonfunktion des Atoms ohne äußeres Feld, e die (positive) Ladung des Elektrons mit Masse m_e und c die Lichtgeschwindigkeit. \mathbf{L} ist der Operator des Bahndrehimpulses, dessen Quadrat die Eigenwerte $\hbar^2 L(L+1)$ (mit $L = 0, 1, 2, \dots$) besitzt, \mathbf{S} der Spinoperator, dessen Quadrat die Eigenwerte $\hbar^2 S(S+1)$ (mit $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$) hat, und \mathbf{B} ist das äußere Magnetfeld. Dabei wurde angenommen, dass Russell-Saunders-Kopplung (L-S-Kopplung) vorliegt,

¹Im mathematischen Sinne bilden die Stokes-Parameter keinen Vektorraum, nichtsdestotrotz hat sich der Begriff des „Stokes-Vektors“ für die Zusammenfassung der vier Stokes-Parameter in einer Variablen durchgesetzt.

das magnetische Moment des Kerns vernachlässigt werden kann und die Kopplung des Atoms an das äußere Feld schwach im Vergleich zur Spin-Bahn-Kopplung ist, was für die auf der Sonne beobachteten Magnetfeldstärken der Fall ist. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Störungstheorie erster Ordnung erfüllt, die das Ergebnis liefert, dass durch das äußere Feld die $(2J + 1)$ -fache Entartung der Energieniveaus aufgehoben wird. Dabei ist J die Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Wählt man die Quantisierungsachse z so, dass sie in Richtung des Magnetfeldes zeigt, ist die Energie der einzelnen Niveaus gegeben durch

$$E_{J,M} = E_J + \mu_0 g M B. \quad (2.10)$$

Hierbei ist E_J die Energie eines Niveaus ohne äußeres Feld (E_J ist Eigenwert von H_0), $\hbar M$ (mit $M = -J, -J + 1, \dots, +J$) ist Eigenwert von J_z , der Drehimpulskomponente in Richtung des Magnetfeldes, $\mu_0 = e\hbar/2m_e c$ ist das Bohrsche Magneton, $B = |\mathbf{B}| = B_z$, und g ist der Landé-Faktor. Im Falle der L-S-Kopplung kann der Landé-Faktor geschrieben werden als

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (2.11)$$

2.2.2. Normaler und anomaler Zeeman-Effekt

Der normale Zeeman-Effekt tritt bei Übergängen zwischen Niveaus mit gleichen Landé-Faktoren auf, also z. B. zwischen zwei Singlets ($g = 1$) oder einem Niveau mit $J = 1$ und einem anderen mit $J = 0$. Aufgrund unterschiedlicher J -Werte spalten erstere in verschieden viele Unterniveaus auf. Den möglichen Übergängen liegt die Auswahlregel $\Delta L = \pm 1$ für elektromagnetische Dipolstrahlung zugrunde und die Tatsache, dass $J = L$ für $S = 0$. Die Auswahlregel für die Projektion M des Gesamtdrehimpulses auf die Quantisierungsachse,

$$\Delta M = 0, \pm 1, \quad (2.12)$$

mit der Bedingung, dass

$$M = 0 \rightarrow M = 0 \text{ nur, falls } \Delta J \neq 0, \quad (2.13)$$

hat zur Folge, dass die Spektrallinie in drei Komponenten mit den Frequenzen ν_0 und $\nu_0 \pm \mu g B$ (entsprechend den Wellenlängen λ_0 und $\lambda_0 \pm \Delta\lambda_B$) aufspaltet. Der unverschobene Anteil ($\Delta M = 0$) wird als π -Komponente bezeichnet, die ($\Delta M = \pm 1$)-Anteile als σ^\pm -Komponenten. Die ($\Delta M = +1$)-Komponente ist blau-, die ($\Delta M = -1$)-Komponente rotverschoben. Im Falle eines Übergangs ($J = 1 \rightarrow J = 0$) ist es offensichtlich, dass die Linie in genau drei Komponenten aufspaltet, da das ($J = 0$)-Niveau nicht aufspaltet, während das ($J = 1$)-Niveau dreifach aufspaltet. In diesem Fall ist der g -Faktor der Linie mit dem g -Faktor des ($J = 1$)-Niveaus identisch.

Im viel häufigeren Fall haben unteres und oberes Niveau verschiedene g -Faktoren, und die Spektrallinie hat i. a. mehr als drei Komponenten. Dies wird als *anomale* Zeeman-Aufspaltung bezeichnet. Bezeichnet man die Landé-Faktoren des unteren und des oberen Niveaus mit g (*lower*) und g_u (*upper*), erhält man jetzt für die Energieniveaus mit ansonsten gleichen Bezeichnungen wie in Gl. (2.10)

$$E_{J,M_u,M_l} = E_J + \mu_0 (g_u M_u - g_l M_l) B. \quad (2.14)$$

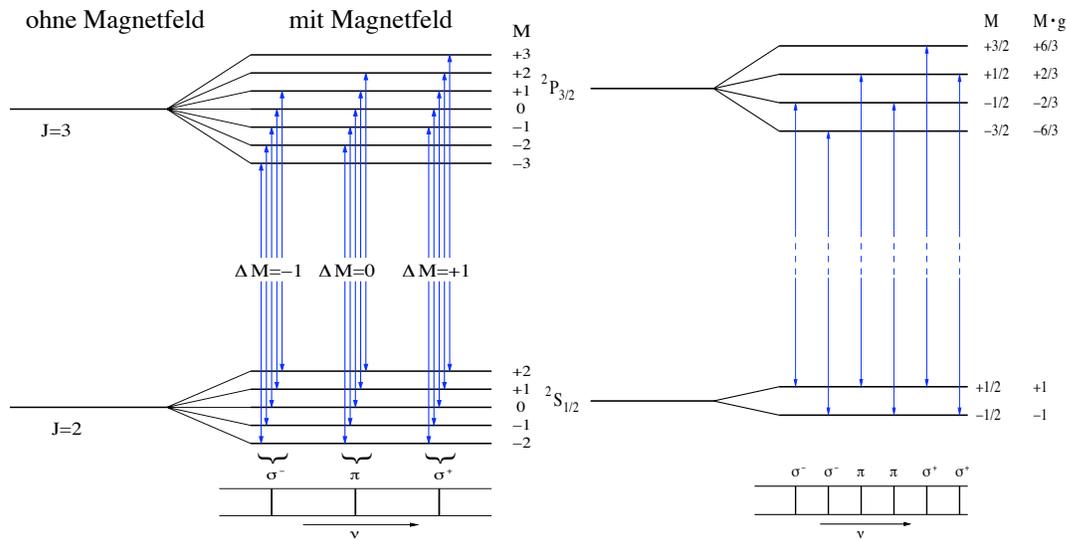


ABBILDUNG 2.1.: links: Normaler Zeeman-Effekt für eine Kombination $J = 3 \rightarrow J = 2$. Die Pfeile, die die Übergänge repräsentieren, bilden drei Gruppen. Innerhalb einer Gruppe sind die Differenzen der Energieniveaus identisch, so dass eine Spektrallinie entsteht (Aufspaltungsmuster im unteren Teil der Abbildung). rechts: Anomaler Zeeman-Effekt der Natrium- D_2 -Linie, $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$. Für die mit σ bezeichneten Komponenten gilt $\Delta M = \pm 1$, für die π -Komponenten ist $\Delta M = 0$. Man beachte, dass die zu gleichen ΔM gehörenden Übergänge nicht mehr die gleichen Energiedifferenzen haben, da die Aufspaltungen des oberen und des unteren Niveaus verschieden sind.

Man kann aber auch für Linien, die einen anomalen Zeeman-Effekt zeigen, zwischen σ - und π -Komponenten unterscheiden, wenn man analog zum g -Faktor für ein normales Zeeman-Triplett einen effektiven Landé-Faktor g_{eff} einführt (Beckers 1969):

$$g_{eff} = \frac{1}{2}(g_l + g_u) + \frac{1}{4}(g_l - g_u)(J_l(J_l + 1) - J_u(J_u + 1)). \tag{2.15}$$

Der effektive Landé-Faktor ist ein Maß für die Wellenlängenverschiebung des Schwerpunkts der σ - und π -Komponenten relativ zur Wellenlänge λ_0 der unverschobenen Linie. Es ist anzumerken, dass die letzte Gleichung symmetrisch bzgl. des Austauschs von oberem und unterem Niveau ist und auch für den normalen Zeeman-Effekt gültig ist (wenn für $J = 0$ $g = 0$ gesetzt wird).

Die Wellenlängenaufspaltung $\Delta\lambda_B$ durch den Zeeman-Effekt ist proportional zum Quadrat der Wellenlänge:

$$\Delta\lambda_B = \frac{e}{4\pi m_e c} g B \lambda_0^2. \tag{2.16}$$

Misst man λ in nm und B in mT, so nimmt (2.16) die Form $\Delta\lambda_B = 4.67 \cdot 10^{-11} g B \lambda_0^2$ an, im cgs-System (λ [cm], B [Gauß]) ist $\Delta\lambda_B = 4.67 \cdot 10^{-5} g B \lambda_0^2$.

Die Polarisierung der Zeeman-Komponenten ist abhängig von der Orientierung des Magnetfelds zum Betrachter. In Richtung parallel zum Magnetfeld sind nur die beiden σ -Komponenten sichtbar, die entgegengesetzt zirkular polarisiert sind (*longitudinaler* Zeeman-Effekt). Blickt der Beobachter senkrecht auf das Magnetfeld, erscheinen alle drei Komponenten mit linearer Polari-

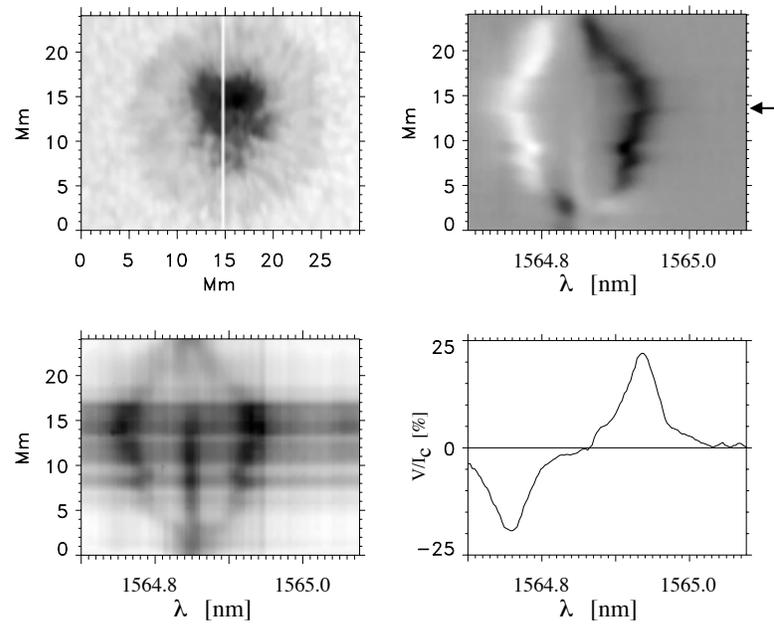


ABBILDUNG 2.2.: Zeeman-Aufspaltung und Zirkularpolarisation der Spektrallinie Fe I 1564.8 nm. Die weiße Linie im Bild links oben zeigt die Position des Spektrographenspalts für das Spektrum links unten. Das Bild oben rechts zeigt die Zirkularpolarisation dieses Spektrums, der Pfeil markiert die Position des Stokes-V-Profiles unten rechts (beobachtet am 9. November 1999 mit dem *Tenerife Infrared Polarimeter* am Vakuum-Turm-Teleskop, Teneriffa, Schlichenmaier & Collados (2001)).

sation (*transversaler* Zeeman-Effekt). Abb. 2.2 zeigt die Zeeman-Aufspaltung und Zirkularpolarisation einer Eisenlinie in einem Sonnenfleck.

3. Strahlungstransport

3.1. Grundlagen

Eine grundlegende Größe in der Theorie des Strahlungstransports ist die Intensität I eines Strahlungsfeldes. Die Änderung der monochromatischen Strahlungsintensität I_ν entlang des Weges s lässt sich auf die drei Elementarprozesse spontane Emission¹, stimulierte Emission und Absorption zurückführen (Mihalas 1978):

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} \left((-B_{12}n_1\Phi + B_{21}n_2\Psi)I_\nu + A_{21}n_2\Psi \right). \quad (3.1)$$

Dabei sind A_{21} und B_{21} die Einsteinkoeffizienten für spontane bzw. stimulierte Emission, B_{12} der Koeffizient für Absorption und Φ und Ψ die Absorptions- und Emissionsprofile. Für die Einsteinkoeffizienten gilt die Relation

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \quad \text{und} \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}, \quad (3.2)$$

wobei g_1 und g_2 die statistischen Gewichte des unteren bzw. oberen Niveaus sind. Für das Verhältnis der Besetzungszahlen N_1 und N_2 zweier Energieniveaus mit Energiedifferenz ΔE gilt nach Boltzmann-Statistik

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\Delta E/kT}. \quad (3.3)$$

Das Verhältnis der Dichten von $(r + 1)$ -fach und r -fach ionisierten Atomen wird von den Saha-Gleichungen beschrieben:

$$\frac{n^{r+1}}{n^r} n_e = \frac{Q^{r+1}}{Q^r} \cdot 2 \cdot \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-\chi_r/kT}. \quad (3.4)$$

Hierbei bezeichnen $Q^{r,r+1}$ die Zustandssummen, χ_r die Ionisationsenergie des r -fach ionisierten Atoms und n_e die Elektronendichte.

3.1.1. Thermodynamisches Gleichgewicht

Ein System befindet sich im *thermodynamischen Gleichgewicht*, wenn eine einzige Temperatur T zu seiner Beschreibung ausreicht. Die Teilchen besitzen dann eine dieser Temperatur entsprechende Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (3.7), und das Ionisationsgleichgewicht wird durch

¹Im Grunde ist auch die „spontane“ Emission stimuliert - durch ein virtuelles Photon.

die Saha-Boltzmann-Gleichungen (3.4) beschrieben. Das Strahlungsfeld ist homogen und isotrop, und die Strahlungsintensität ist durch die Kirchhoff-Planck-Funktion $B_\nu(T)$ gegeben:

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (3.5)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht gibt es keine Temperaturgradienten, und es ist offensichtlich, dass dies in Sternatmosphären so gut wie nie der Fall ist. In vielen Fällen sind jedoch die Bedingungen für ein *lokales thermodynamisches Gleichgewicht* (LTE) erfüllt, d.h. an einem bestimmten Ort genügt eine Temperatur T zur thermodynamischen Charakterisierung des Systems. Die wichtigste Vereinfachung hierdurch ist, dass die Quellfunktion lokal durch die Kirchhoff-Planck-Funktion gegeben ist: $S_\nu = B_\nu(T)$. Diese Bedingung gilt, wenn Beiträge zur Quellfunktion durch stoßinduzierte Übergänge dominiert werden, und ist für die in dieser Arbeit betrachteten Spektrallinien, die in der Photosphäre der Sonne entstehen, in guter Näherung erfüllt.

3.1.2. Spektrallinien

Die Lebensdauer eines angeregten atomaren Zustands ist durch spontane Emission begrenzt, was nach der Heisenberg'schen Unschärferelation zu einer Unbestimmtheit dieses Energieniveaus führt und damit zu einem Absorptionsprofil endlicher Breite. Dieser Beitrag zur Linienverbreiterung wird als *Strahlungsdämpfung* bezeichnet, und die Linienprofilfunktion Φ_L ist das Spektrum eines gedämpften harmonischen Oszillators, ein *Lorentz-Profil* mit voller Halbwertsbreite $\Gamma/2\pi$:

$$\Phi_L(\Delta\nu) = \frac{\Gamma}{(2\pi\Delta\nu)^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.6)$$

In Einheiten der Wellenlänge hat die Dämpfungskonstante für Strahlungsdämpfung den Wert $\Delta\lambda_n = e^2/3\epsilon_0 m_e c^2 = 11.8 \text{ fm}$. In der Sonnenatmosphäre ist die Linienverbreiterung durch Strahlungsdämpfung klein gegenüber der *Stoß- oder Druckverbreiterung*. Diese resultiert aus der Kollision des angeregten Atoms mit anderen Teilchen, bei der ein Teil der Energie des angeregten Atoms auf den Stoßpartner übertragen und die Lebensdauer des angeregten Zustands verkürzt wird. Die dominierenden Beiträge zur Linienverbreiterung in der Photosphäre sind Stöße mit neutralem Wasserstoff (*Van-der-Waals-Verbreiterung*) und mit Elektronen (*Stark-Verbreiterung*). Die Frequenzabhängigkeit ist auch hier durch ein Lorentz-Profil gegeben. Die Faltung der verschiedenen Lorentz-Profile liefert wieder ein Lorentz-Profil mit einem Dämpfungsparameter $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_{VdW} + \Gamma_{St}$ (Mihalas 1978). Diese Profile sind streng genommen *Emissionsprofile*, so dass zusätzlich die Annahme detaillierten Gleichgewichts notwendig ist, um sie als Absorptionsprofile zu verstehen.

In einem Ensemble von Atomen besitzt jedes einzelne eine Geschwindigkeit ξ entlang der Sichtlinie des Beobachters, so dass zusätzlich zu den genannten Verbreiterungsmechanismen eine Doppler-Verbreiterung durch die unkorrelierte Überlagerung der Eigenbewegungen auftritt. Im LTE genügen die Geschwindigkeiten einer Maxwell-Verteilung, nach der für die Wahrscheinlichkeit, ein Atom mit der Sichtliniengeschwindigkeit ξ im Intervall $(\xi, \xi' + d\xi')$ zu finden, gilt:

$$W(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi_0} \exp(-\xi^2/\xi_0^2) d\xi. \quad (3.7)$$

Dabei ist $\xi_0 = \sqrt{2kT/m_A}$ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit bei einer Temperatur T und atomaren Masse m_A . Mit der Definition der Doppler-Breite Δv_D

$$\Delta v_D \equiv v_0 \xi_0 / c \quad (3.8)$$

führt dies zu einer Doppler-Verbreiterung

$$\Phi_D(\Delta v) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \exp[-(\Delta v / \Delta v_D)^2]. \quad (3.9)$$

Die resultierende Profilfunktion erhält man nun durch Faltung dieses Profils mit dem Dämpfungsprofil Φ_L :

$$\Phi(v) = \frac{\Gamma}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(v - v')^2 / \Delta v_D^2]}{[2\pi(v' - v_0)]^2 + \Gamma^2/4} dv'. \quad (3.10)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} y &\equiv (v - v') / \Delta v_D = \xi / \xi_0, \\ a &\equiv \Gamma / 4\pi \Delta v_D, \\ v &\equiv (v - v_0) / \Delta v_D, \end{aligned} \quad (3.11)$$

erhält man

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} H(v, a). \quad (3.12)$$

Dabei ist $H(v, a)$ die als *Voigt-Funktion* bekannte Funktion

$$H(v, a) \equiv \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(v - y)^2 + a^2}, \quad (3.13)$$

die die typische Form einer atomaren Spektrallinie ohne Sättigungseffekte beschreibt.

Um dem Einfluss räumlich nicht aufgelöster Geschwindigkeitsfelder Rechnung zu tragen, addiert man zu der thermischen Komponente der Doppler-Breite einen die *Mikroturbulenz* beschreibenden Geschwindigkeitsterm ξ_{mic} . In Einheiten der Wellenlänge gilt dann für die Doppler-Breite (3.8)

$$\Delta \lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_A} + \xi_{mic}^2}. \quad (3.14)$$

3.1.3. Berechnung des Linienabsorptionskoeffizienten

Die Stärke eines atomaren Übergangs, der zur Bildung einer Spektrallinie führt, wird durch den *Linienabsorptionskoeffizienten* κ_L beschrieben. Um diesen Wirkungsquerschnitt pro Einheitsmasse zu erhalten, müssen wir den atomaren Wirkungsquerschnitt mit der Anzahl der absorbierenden Teilchen pro Einheitsmasse multiplizieren. Wir folgen dabei den Ausführungen von Stix (1989).

Für Übergänge zwischen zwei gebundenen Zuständen ist der *Wirkungsquerschnitt pro Atom* gegeben durch

$$\sigma = \frac{e^2 f}{4\epsilon_0 m_e c} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} H(v, a), \quad (3.15)$$

wobei f die *Oszillatorenstärke* ist, die die Übergangswahrscheinlichkeit enthält.

Es sei n_i die Anzahldichte der Teilchen der Sorte i , μ das mittlere Molekulargewicht, m_H die Masse von atomarem Wasserstoff und damit $\rho = \mu m_H \sum n_i$ die Massendichte der Teilchen der Sorte i . Dann gibt n_i/ρ die Anzahl der Teilchen der Sorte i pro Einheitsmasse an. Die Anzahl der *absorbierenden* Teilchen pro Einheitsmasse erhält man, indem man n_i/ρ multipliziert mit dem Anteil n_{ij}/n_i der Teilchen dieser Sorte, die sich im j -ten Ionisationszustand befinden, und das Produkt schließlich mit dem Anteil n_{ijk}/n_{ij} der Teilchen multipliziert, die davon im k -ten Anregungszustand sind. Wir erhalten damit für den Linienabsorptionskoeffizienten

$$\kappa_L = \frac{\sigma}{\mu m_H} \frac{n_i}{\sum n_i} \frac{n_{ij}}{n_i} \frac{n_{ijk}}{n_{ij}}. \quad (3.16)$$

Unter der Annahme von LTE ist der dritte Faktor in dieser Gleichung durch die Saha-Gleichungen (3.4) und der vierte durch die Boltzmann-Gleichungen der Form (3.3) beschrieben, während der zweite die relative Teilchenhäufigkeit angibt. Wir schreiben die Saha-Gleichungen in diesem Zusammenhang abgekürzt als

$$n_{i,j+1}/n_{ij} = f_{ij}(P_e, T) \quad \text{mit} \quad \sum_j n_{ij} = n_i, \quad (3.17)$$

um zum Ausdruck zu bringen, dass die Verhältnisse $n_{i,j+1}/n_{ij}$ vom Elektronendruck P_e und der Temperatur T abhängen, und die Boltzmann-Gleichungen als

$$n_{ijk} = n_{ij0} \exp(-E_{ijk}/kT) \quad \text{mit} \quad \sum_k n_{ijk} = n_{ij}, \quad (3.18)$$

wobei E_{ijk} das Anregungspotential des k -ten angeregten Niveaus des j -ten Ionisierungszustands eines Atoms der Sorte i bezeichnet. Wir werden uns später in Abschnitt 7.1 ausführlicher mit zwei Spektrallinien des neutralen Eisens befassen und in den beiden dort betrachteten Fällen das Anregungspotential zur Vereinfachung jeweils mit χ benennen.

Die Oszillatorenstärke, das statistische Gewicht eines Übergangs und die relative Häufigkeit der beteiligten Atomsorte werden in der Spektroskopie häufig in einem sog. „ $f g e$ “-Faktor zusammengefasst.

3.2. Die Strahlungstransportgleichung im Stokes-Formalismus

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie sich ein Lichtstrahl in einem Medium ausbreitet, und betrachten dazu einen Lichtstrahl der Frequenz ν , beschrieben durch einen Stokes-Vektor \mathbf{I} . Durch die Wechselwirkung zwischen der elektromagnetischen Welle und dem Medium ändert sich der Stokes-Vektor beim Durchgang durch dieses gemäß der Strahlungstransportgleichung

$$\frac{d\mathbf{I}}{ds} = -\mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{j}. \quad (3.19)$$

Dabei parametrisiert s den geometrischen Weg, $\mathbf{K} = \{K_{kj}\}$ ist die totale Absorptionsmatrix,

$$\mathbf{K} = \kappa_c \mathbb{1} + \kappa_0 \eta, \quad (3.20)$$

und \mathbf{j} der totale Emissionsvektor,

$$\mathbf{j} = \kappa_c S_c \mathbf{e}_0 + \kappa_0 S_l \eta \mathbf{e}_0. \quad (3.21)$$

κ_c und S_c bezeichnen die Opazität und die Quellfunktion des unpolarisierten Kontinuums, $\mathbb{1}$ die 4×4 -Einheitsmatrix und $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)^T$. Die Opazität in der Linienmitte κ_0 und die Linienquellfunktion S_l hängen nur von den Besetzungszahlen des oberen und unteren Niveaus des Übergangs ab (Mihalas 1978). Im Falle lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (LTE) gilt $S_l = S_c = B$. Die Linienabsorptionsmatrix η hat die Form

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

Diese Matrix kann in zwei Komponenten zerlegt werden:

- (1) Eine symmetrische Matrix, die die η -Terme enthält und die *Absorption* beschreibt.
- (2) Eine antisymmetrische Matrix, die die ρ -Terme enthält und die Effekte der *anomalen Dispersion*, auch *magneto-optische* Effekte genannt, repräsentiert.

Für elektromagnetische Dipolübergänge in einem Magnetfeld im LTE haben die Einträge die Form (Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti 1972)

$$\begin{aligned} \eta_I &= \frac{1}{2} \left[\eta_p \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} (\eta_r + \eta_b) (1 + \cos^2 \gamma) \right], \\ \eta_Q &= \frac{1}{2} \left[\eta_p - \frac{1}{2} (\eta_r + \eta_b) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\phi, \\ \eta_U &= \frac{1}{2} \left[\eta_p - \frac{1}{2} (\eta_r + \eta_b) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\phi, \\ \eta_V &= \frac{1}{2} \left[\eta_r - \eta_b \right] \cos \gamma, \\ \rho_Q &= \frac{1}{2} \left[\rho_p - \frac{1}{2} (\rho_r + \rho_b) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\phi, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\rho_U = \frac{1}{2} \left[\rho_p - \frac{1}{2} (\rho_r + \rho_b) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\phi,$$

$$\rho_V = \frac{1}{2} \left[\rho_r - \rho_b \right] \cos \gamma.$$

Hierbei bezeichnet γ die Inklination des Magnetfeldes, ϕ den Azimut und $\eta_{p,b,r} \equiv \eta_{0,\pm 1}$ und $\rho_{p,b,r} \equiv \rho_{0,\pm 1}$ die verallgemeinerten Profilfunktionen für Absorption und anomale Dispersion.

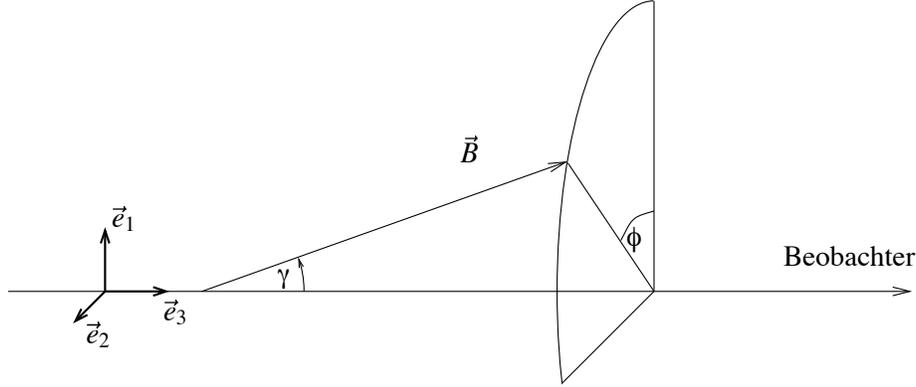


ABBILDUNG 3.1.: Winkelkoordinaten des Magnetfeldes

Man erhält die Profilfunktionen η_q und ρ_q ($q = 0, \pm 1$) als Summen über die Beiträge aller Übergänge, die der Auswahlregel

$$\Delta M = M_u - M_l = \begin{cases} +1 & \equiv b \\ 0 & \equiv p \\ -1 & \equiv r \end{cases} \quad (3.24)$$

genügen (p : π -Komponente des Zeeman-Tripletts, b : blauverschobene σ -Komponente, r : rotverschobene σ -Komponente):

$$\eta_q = \sum_{M_u} S_q(M_l, M_u) H(v_q - v_A, a), \quad (3.25)$$

$$\rho_q = \sum_{M_u} S_q(M_l, M_u) F(v_q - v_A, a). \quad (3.26)$$

Dabei ist $M_l = M_u + q$ und $v_q = v + v_B(g_u M_u - g_l M_l)$. $H(v, a)$ ist die Voigt-Funktion (3.13), $F(v, a)$ wird als Liniendispersionsfunktion oder Faraday-Voigt-Funktion

$$F(v, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(v-y)e^{y^2} dy}{(v-y)^2 + a^2}. \quad (3.27)$$

bezeichnet (a : Dämpfungskonstante). Die Faraday-Voigt-Funktion ist als Funktion von v *antisymmetrisch*, während die Voigt-Funktion *symmetrisch* ist.

Schließlich bezeichnen v , v_A und v_B den Abstand zur Linienmitte, die Doppler-Verschiebung durch eine Sichtliniengeschwindigkeit w_A und die Zeeman-Aufspaltung, jeweils in Einheiten der Doppler-Breite:

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D}, \quad v_A = \frac{\Delta\lambda_A}{\Delta\lambda_D} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_D} \frac{w_A}{c}, \quad v_B = \frac{\Delta\lambda_B}{\Delta\lambda_D} = \frac{e}{4\pi m_e c^2} \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_D} B. \quad (3.28)$$

Für die normierten statistischen Gewichte liefert das Wigner-Eckart-Theorem

$$S_q(M_l, M_u) = 3 \begin{pmatrix} J_l & J_u & 1 \\ -M_l & M_u & q \end{pmatrix}^2. \quad (3.29)$$

Eine Tabelle der statistischen Gewichte ist im Anhang A.1 gegeben.

3.2.1. Geometrische Interpretation

Die Strahlungstransportgleichung für polarisiertes Licht kann nach Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti (1981) geometrisch interpretiert werden. Dazu bildet man den Stokes-Vektor auf eine Einheitskugel, die *Poincaré-Sphäre*, ab (Poincaré 1892):

$$f : \mathbf{I} \rightarrow (x, y, z) = (Q/I, U/I, V/I). \quad (3.30)$$

Auf diese Weise wird jedem Stokes-Vektor ein Punkt in der Einheitskugel zugeordnet. Insbesondere wird vollständig polarisiertes Licht durch Punkte auf der Kugeloberfläche dargestellt, während der Ursprung der Kugel unpolarisiertes Licht repräsentiert. Die Projektion eines Kugelvektors auf die (x, y) -Ebene gibt den Grad der Linearpolarisation an, die Projektion auf die z -Achse den zirkular polarisierten Anteil. Die Propagation eines Lichtstrahls durch ein Medium lässt sich nun als Bewegung eines Vektors \mathbf{p} in der Poincaré-Sphäre interpretieren.

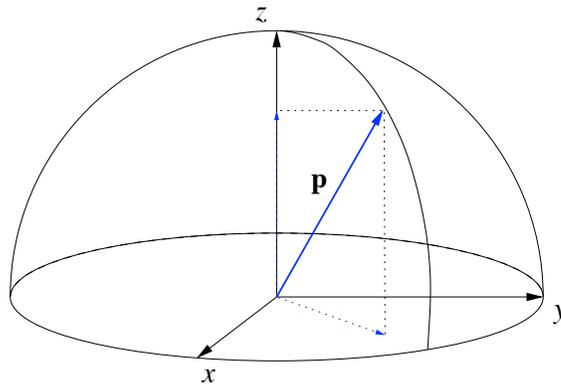


ABBILDUNG 3.2.: Die Poincaré-Sphäre: Die Polarisation eines Lichtstrahls wird durch den Vektor \mathbf{p} beschrieben. Seine Projektion auf die (x, y) -Ebene gibt den Grad der Linearpolarisation an, die Projektion auf die z -Achse den zirkular polarisierten Anteil.

Um die Ausdrücke so einfach wie möglich zu halten, verwenden wir für den Rest dieses Abschnitts die Notation von Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti (1981), die sich teilweise

von der sonst in dieser Arbeit verwendeten unterscheidet. Insbesondere ist die Darstellung der Absorptionsmatrix in der modifizierten Strahlungstransportgleichung

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_I \\ j_Q \\ j_U \\ j_V \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

eine andere (vergleiche (3.19) – (3.21)). Ausgehend von dieser Gleichung definieren wir die Vektoren

$$\mathbf{p} = (Q/I, U/I, V/I), \quad (3.32)$$

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_Q, \eta_U, \eta_V),$$

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_Q, \rho_U, \rho_V),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (j_Q/I, j_U/I, j_V/I)$$

(3.33)

und die skalare Größe

$$\varepsilon_I = j_I/I. \quad (3.34)$$

Damit lässt sich (3.31) schreiben als

$$\frac{dI}{ds} = -(\eta_I + \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \varepsilon_I)I, \quad (3.35)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\boldsymbol{\eta} + (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_I \mathbf{p}. \quad (3.36)$$

Die erste Gleichung gibt an, wie sich die Intensität des Lichtstrahls beim Durchgang durch das Medium verändert und stellt so einen Skalierungsfaktor dar, mit dem man aus den Elementen von \mathbf{p} wieder den Stokes-Vektor erhält. Die zweite Gleichung beschreibt die Bewegung des Vektors \mathbf{p} in der Poincaré-Sphäre. Der erste Term entspricht hier einer Bewegung von \mathbf{p} in Richtung $-\boldsymbol{\eta}$. Auf diese Weise könnte der Punkt jedoch die Sphäre verlassen, was durch den zweiten Term verhindert wird, dessen Gewicht zunimmt, je näher man der Oberfläche der Kugel kommt. Der dritte Term beschreibt eine Präzession von \mathbf{p} um den Vektor $\boldsymbol{\rho}$. Dabei bleibt der Polarisationsgrad $|\mathbf{p}|$ erhalten, aber die Art der Polarisation ändert sich. Dieser Effekt wird als *anomale Dispersion* bezeichnet und durch den Vektor $\boldsymbol{\rho}$ hervorgerufen, dessen Elemente den antisymmetrischen Anteil der Absorptionsmatrix \mathbf{K} bilden. Die Präzession lässt sich zerlegen in eine Drehung um die z -Achse, die die Richtung der Linearpolarisation ändert (Faraday-Rotation) und eine Drehung um eine Achse in der (x, y) -Ebene, die linear polarisiertes Licht in zirkular polarisiertes transformiert und umgekehrt (Faraday-Pulsation). Die letzten beiden Terme sind auf Emission zurückzuführen und lassen sich in gleicher Weise interpretieren wie die ersten beiden.²

²Das Bemerkenswerte an dieser Formulierung ist, dass sich (3.36) umformen lässt in eine Gleichung, die die gleiche Form hat wie die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld. Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti (1981) bezeichnen dies als „elektromagnetische Analogie“.

3.3. Formale Lösung der Strahlungstransportgleichung

Die Strahlungstransportgleichung (3.19) lässt sich unter Verwendung eines Evolutionsoperators $\mathbf{O}(s, s')$ (Gantmacher 1959) formal integrieren:

$$\mathbf{I}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{O}(s, s') \mathbf{j}(s') ds' + \mathbf{O}(s, s_0) \mathbf{I}(s_0), \quad (3.37)$$

Dabei genügt der Operator $\mathbf{O}(s, s')$ folgenden Relationen:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{O}(s, s') = -\mathbf{K}(s) \mathbf{O}(s, s') \quad \text{und} \quad \mathbf{O}(s, s) = \mathbb{1}. \quad (3.38)$$

Für eine semi-unendliche Atmosphäre mit $s_0 \rightarrow -\infty$ und $s = 0$ an der Oberfläche ist der austretende Stokes-Vektor das Integral

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^0 \mathbf{C}(s) ds \quad (3.39)$$

mit einem Vektor $\mathbf{C}(s)$ der Beitragsfunktionen

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{O}(0, s) \mathbf{j}(s). \quad (3.40)$$

Anschaulich lässt sich der Operator $\mathbf{O}(s, s')$ als Propagator verstehen, der beschreibt, wie Strahlung, die an einer Stelle s' emittiert wird, auf dem Weg zu einem neuen Ort s transformiert wird.

3.4. Numerische Lösung der Strahlungstransportgleichung

Da die Strahlungstransportgleichung (3.19) bis auf wenige Spezialfälle nicht analytisch lösbar ist, muss ein numerisches Verfahren gefunden werden, das diese Gleichung löst. Wir beginnen mit der diskreten Version von (3.39). Definiert man die optische Tiefe τ entlang des Sehstrahls, $d\tau = -\kappa_c ds$, und eine Diskretisierung $\tau_k, k = 1, \dots, N$, lässt sich der austretende Stokes-Vektor $\mathbf{I}(\tau_1)$ als Summe

$$\mathbf{I}(\tau_1) = \sum_{k=1}^N \mathbf{C}_k d\tau_k \quad (3.41)$$

schreiben, wobei \mathbf{C}_k der Vektor der Beitragsfunktionen in der Tiefe $d\tau_k$ ist, der sich aus der lokalen Quellfunktion \mathbf{j}_k und dem Evolutionsoperator \mathbf{O} wie folgt zusammensetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k &= \mathbf{O}(1, k) \mathbf{j}_k \\ &= \mathbf{O}(1, 2) \mathbf{O}(2, 3) \cdots \mathbf{O}(k-1, k) \mathbf{j}_k. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Gesucht wird nun ein Verfahren, dass für jeden Punkt τ_k der optischen Tiefe den Operator \mathbf{O} liefert.

3.4.1. Die DELO-Methode

Diese Methode zur Lösung der Strahlungstransportgleichung (3.19) wurde von Rees et al. (1989) vorgestellt und basiert auf der Idee der Λ -Iteration (Mihalas 1978). Die Abkürzung DELO steht für „Diagonal Elements Lambda Operator“.

Die Gleichung (3.19) lässt sich mit einer modifizierten Quellfunktion $S = \mathbf{S} - \boldsymbol{\eta}\mathbf{I}$ auch schreiben als

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \mathbf{I} - S. \quad (3.43)$$

Sei nun $\{\tau_k\}$ eine Diskretisierung der optischen Tiefe entsprechend der geometrischen Tiefe $\{x\}$. Dann ist im Intervall (τ_k, τ_{k+1}) die Lösung von (3.43) die Λ -Transformation

$$\mathbf{I}(\tau_k) = E_k \mathbf{I}(\tau_{k+1}) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-(\tau - \tau_k)} S(\tau) d\tau, \quad (3.44)$$

wobei

$$E_k = e^{-\tilde{\delta}_k} \quad \text{mit} \quad \tilde{\delta}_k = \tau_{k+1} - \tau_k \quad (3.45)$$

für $k = 1, \dots, N-1$. Da $S(\tau)$ von $\mathbf{I}(\tau)$ abhängt, ist (3.44) eine Integralgleichung für $\mathbf{I}(\tau)$. Um diese Gleichung zu lösen, wird in der DELO-Methode für die Funktion S die lineare Approximation

$$S(\tau) = [(\tau_{k+1} - \tau) S_k + (\tau - \tau_k) S_{k+1}] / \tilde{\delta}_k \quad (3.46)$$

verwendet. Mit diesem Ansatz lässt sich (3.44) *analytisch* lösen und man erhält

$$\mathbf{I}_{\tau_k} = P_k + Q_k \mathbf{I}(\tau_{k+1}). \quad (3.47)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} P_k &= [\mathbb{1} + (F_k - G_k) \boldsymbol{\eta}_k]^{-1} [(F_k - G_k) \mathbf{S}_k + G_k \mathbf{S}_{k+1}], \\ Q_k &= [\mathbb{1} + (F_k - G_k) \boldsymbol{\eta}_k]^{-1} (E_k \mathbb{1} - G_k \boldsymbol{\eta}_{k+1}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

mit

$$\begin{aligned} F_k &= 1 - E_k, \\ G_k &= [1 - (1 + \tilde{\delta}_k) E_k] / \tilde{\delta}_k. \end{aligned} \quad (3.49)$$

An der Stelle τ_N wird für den Stokes-Vektor die Randbedingung

$$\mathbf{I}_N = B_{vN} \mathbf{e}_0 \quad (3.50)$$

verwendet (unpolarisiertes Licht mit einer Intensität, die durch die Kirchhoff-Planck-Funktion an der Stelle τ_N gegeben ist), und man erhält aus (3.47) durch Rekursion den Stokes-Vektor an der Oberfläche, $\mathbf{I}(0) = \mathbf{I}(\tau_1)$. Der Vergleich von (3.47) mit (3.37) mit $\mathbf{j} = 0$ liefert nun für den Evolutionsoperator die Näherung

$$\mathbf{O}(\tau_k, \tau_{k+1}) = Q_k. \quad (3.51)$$

3.4.2. Implementierung

Für diese Arbeit wurde das Strahlungstransportprogramm DIAMAG von U. Grossmann-Doerth verwendet (Grossmann-Doerth 1994), in dem die DELO-Methode implementiert ist. Die Struktur des Programms ist im Anhang (B.1) beschrieben. Mit Hilfe des Programms DIAMAG können die Stokes-Parameter entlang eines Sehstrahls für eine gegebene Atmosphäre berechnet werden. Dabei wird eine planparallele Schichtung von Druck p und Temperatur T angenommen. Für jeden

der äquidistanten Stützpunkte in $\Delta \log(\tau)$ werden tabellierte Werte für die magnetische Feldstärke B , die Inklination γ und den Azimut ϕ , die Sichtlinienkomponente v der makroskopischen Geschwindigkeit des Plasmas und die Mikroturbulenz v_{mic} verwendet.

Der Zusammenhang zwischen optischer und geometrischer Tiefe bei einer Frequenz ν und $\mu \equiv \cos \theta$ ist gegeben durch (Rutten 1999)

$$d\tau_{\nu\mu} \equiv \kappa_{\nu} \rho \frac{dz}{\mu}, \quad (3.52)$$

wobei κ_{ν} die Opazität (oder Wirkungsquerschnitt pro Einheitsmasse) und ρ die Massendichte bezeichnet. Damit können für jeden heliozentrischen Winkel θ die physikalischen Größen von einer geometrischen Skala auf ein in $\Delta \log(\tau)$ äquidistantes Gitter umgerechnet werden.

In verschiedenen Unterprogrammen werden für jeden Tiefenpunkt in der Atmosphäre folgende Größen berechnet:

- die Teilchendichten als Funktion von Temperatur und Druck
- die Partialdrücke aller Elemente bis zur Kernladungszahl $Z = 28$ als Funktion der Temperatur und des Elektronendrucks, wobei H_2 -Bildung und -Ionisation berücksichtigt wird
- die Kontinuumsopazität κ_c als Funktion der Wellenlänge, Temperatur und der verschiedenen Partialdrücke
- das Ionisationsgleichgewicht gemäß den Saha-Gleichungen (3.4).

Danach wird für alle Punkte in einem gegebenen Wellenlängenintervall die Strahlungstransportgleichung mittels der DELO-Methode gelöst, wobei jeweils als Randbedingung für den innersten Tiefenpunkt der Atmosphäre ein unpolarisiertes Kontinuum im LTE angenommen wird.

3.4.3. Konvergenz

Lösung eines Systems von Differentialgleichungen mit Hilfe eines Evolutionsoperators

Für ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{P}(t) \mathbf{X} \quad (3.53)$$

mit einer im Intervall (a, b) stetigen Matrizenfunktion $\mathbf{P}(t)$ und $t \in (a, b)$ lässt sich zeigen (Gantmacher 1959), dass die Näherungslösungen

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{E} + \int_{t_0}^t \mathbf{P}(\tau) \mathbf{X}_{k-1} d\tau, \quad (3.54)$$

die man aus den Rekursionsformeln

$$\frac{d\mathbf{X}_k}{dt} = \mathbf{P}(t) \mathbf{X}_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.55)$$

erhält, indem man für \mathbf{X}_0 die Einheitsmatrix \mathbf{E} einsetzt, im Intervall (a, b) gegen die Lösung der Gleichung (3.53) konvergieren und in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) sogar absolut

und gleichmäßig konvergieren. Das Gleiche gilt für inhomogene Differentialgleichungssysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t), \quad (3.56)$$

für die Gantmacher (1959) eine formale Lösung angibt.

Konvergenz der DELO-Methode

Die DELO-Methode, wie sie von Rees et al. (1989) beschrieben wird, konvergiert für stetige Quellfunktionen *linear* bezüglich der Diskretisierung $\Delta \log(\tau)$ in der optischen Tiefe. Leichte Abweichungen von einem exakt linearen Verhalten im positiven Sinne können durch inhomogene Verteilung der Gitterpunkte entstehen (Superkonvergenz). Ein geeignetes Maß zur Quantifizierung der Konvergenzeigenschaften eines numerischen Verfahrens ist die „experimental order of convergence“ (EOC) (Kröner 1997):

$$EOC \equiv \ln \left(\frac{\|u - u_h\|}{\|u - u_{2h}\|} \right) / \ln \left(\frac{1}{2} \right). \quad (3.57)$$

Dabei ist u die exakte Lösung, u_h und u_{2h} sind die numerischen Lösungen für zwei Diskretisierungsintervalle h und $2h$, und $\|\dots\|$ ist eine Norm, beispielsweise die L^1 -Norm, $\|f(x)\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$, $x \in \Omega$, oder die Maximumnorm, $\|f(x)\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Wir berechnen hier die Konvergenzordnung der DELO-Methode unter Verwendung der exakten Lösung für ein Atmosphärenmodell einer Magnetopause (siehe Kap. 5) und erhalten

$$EOC_{L^{\infty}} = 0.96 \pm 0.02. \quad (3.58)$$

Abb. 3.3 zeigt den Fehler von Stokes-V bezüglich der Maximumsnorm in Abhängigkeit der Schrittweite $\Delta \log(\tau)$. Es ist anzumerken, dass die Konvergenzordnung i. a. nicht für alle Paare u_h, u_{2h} die gleiche ist. Die angegebenen Werte beziehen sich auf Diskretisierungen $\Delta \log(\tau) \in [0.005, 0.1]$. Bezüglich der Konvergenz der DELO-Methode existieren verschiedene Veröffentlichungen mit unterschiedlichen Aussagen. Bei der Argumentation gilt es folgendes zu beachten: Die Konvergenzordnung eines Verfahrens, das linear oder mit höherer Ordnung konvergiert, lässt sich nicht für den Fall einer linearen Quellfunktion ermitteln, da jedes Verfahren, das mindestens linear konvergiert, hier die exakte Lösung liefern muss. In diesen Fällen auftretenden Fehler sind auf andere Ursachen zurückzuführen, wie z. B. numerische Fehler von Integrationsroutinen und endliche Gleitkommagenauigkeit. Dies ist unmittelbar einsichtig und wird nur deshalb erwähnt, weil zuweilen die Konvergenz unter Verwendung einer Milne-Eddington-Atmosphäre berechnet wird, deren Quellfunktion nach Definition linear in der optischen Tiefe ist. Statt dessen muss eine tiefenabhängige Quellfunktion verwendet werden, die nicht im gesamten Integrationsintervall linear ist und für die sich trotzdem eine exakte Lösung der Strahlungstransportgleichung finden lässt. Ein Beispiel dafür ist das Modell einer Magnetopause (Kap. 5) mit einer stückweise linearen Quellfunktion. Stift (1999, 2000) und Trujillo-Bueno (1998) bestätigen die lineare Konvergenz der DELO-Methode. Von Bellot Rubio et al. (1998) wird die DELO-Methode als *quadratische* Methode in $\Delta \log(\tau)$ beschrieben, was jedoch vermutlich auf eine Abänderung der ursprünglichen Methode zurückzuführen ist, die in Trujillo-Bueno (1998) beschrieben wird.

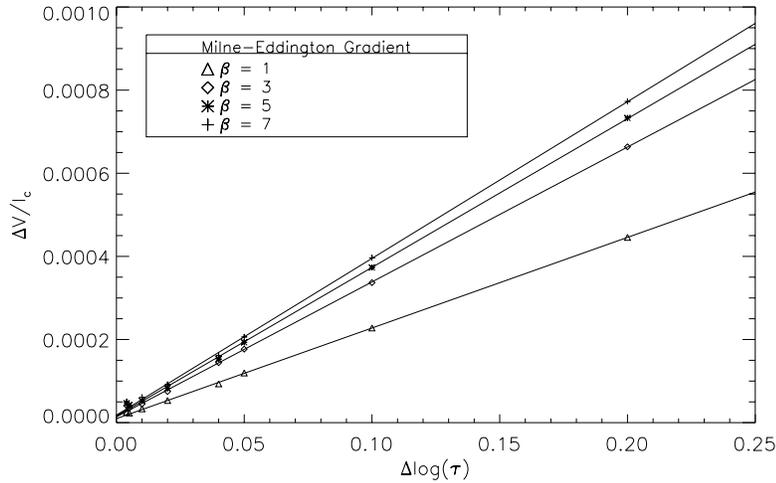


ABBILDUNG 3.3.:

Maximaler Fehler von Stokes-V für ein Atmosphärenmodell mit Magnetopause (siehe Abschnitt 5) in Abhängigkeit der Schrittweite $\Delta \log(\tau)$ für verschiedene Gradienten β in der Milne-Eddington-Quellfunktion

Konvergenz bei Unstetigkeiten

Im Falle von Unstetigkeiten in den atmosphärischen Parametern, wie sie z. B. am Rand magnetischer Flussröhren auftreten, muss ein numerisches Verfahren nicht mehr konvergieren. Verfahren höherer Ordnung neigen an Unstetigkeitsstellen z. B. zu Oszillationen in der Lösung, so dass an diesen Stellen ein Verfahren niedrigerer Ordnung verwendet werden sollte. In dieser Hinsicht ist die DELO-Methode prinzipiell gut zur Lösung der Strahlungstransportgleichung geeignet. Dies wird in Kapitel 5 demonstriert. In allen Fällen, in denen sich keine analytische Lösung der Strahlungstransportgleichung finden lässt, kann die Konvergenz nur abgeschätzt werden, indem man Lösungen mit unterschiedlich feiner Diskretisierung mit einer Referenzlösung vergleicht, von der man annimmt, dass sie der exakten Lösung hinreichend nahe ist (maximale Anzahl von Gitterpunkten). Ein Maß für die Konvergenz (EOC) erhält man dann, indem man die exakte Lösung u in (3.57) durch eine Referenzlösung \tilde{u} ersetzt. Diese EOC wurde für ein großes Ensemble ($n > 1000$) von Atmosphären mit Diskontinuitäten an verschiedenen Stellen und mit verschiedenen Amplituden für unterschiedliche Spektrallinien berechnet. Als Referenzlösung wurden jeweils die Lösung für $\Delta \log(\tau) = 0.005$ verwendet, was 1300 Gitterpunkten im Intervall $[-5, 1.5]$ entspricht. Unter Verwendung der L^1 -Norm erhält man

$$EOC_{L^1} = 1.17 \pm 0.03 \quad (3.59)$$

und für die Maximumsnorm

$$EOC_{L^\infty} = 1.08 \pm 0.04, \quad (3.60)$$

wobei jeweils der Mittelwert und dessen Standardabweichung angegeben sind. Dies zeigt, dass sich die Strahlungstransportgleichung mit der DELO-Methode auch bei atmosphärischen Unste-

tigkeiten in der Art magnetischer Flussröhren lösen lässt und die Konvergenz dabei immer noch in guter Näherung linear ist.

Für glatte Atmosphärenmodelle lässt sich durch Verwendung eines Verfahrens höherer Ordnung, z. B. der Hermite-Methode von Bellot Rubio et al. (1998), die Rechenzeit reduzieren, was aber in den meisten Fällen nicht von großer Wichtigkeit ist, da diese für die Berechnung eines Sehstrahls mit der DELO-Methode nur wenige Sekunden beträgt. Sobald jedoch Unstetigkeiten auftreten, ist ein lineares oder stückweise lineares Verfahren überlegen, da Verfahren höherer Ordnung z. T. nur konvergieren, wenn die Unstetigkeiten vorher künstlich geglättet werden (Martínez Pillet 2000a,b).

4. Asymmetrische Stokes-V-Profile

Im einfachsten Fall einer magnetohydrostatischen Atmosphäre sollten die Stokes-V-Profile atomarer Spektrallinien antisymmetrisch sein (siehe 4.1). Beobachtungen zeigen jedoch, dass ein Großteil der Profile Asymmetrien aufweisen. Die ersten Messungen solcher Asymmetrien in Sonnenflecken stammen von Illing et al. (1974a,b, 1975), die u. a. die Mitte-Rand-Variation von der Netto-Zirkularpolarisation mit einem Filter der Bandbreite 10 nm untersuchten („broad band circular polarization“). Eine Polarisation des Kontinuums, wie sie von Kemp (1970) beschrieben wurde, schlossen Illing et al. (1975) als Erklärung aus, da die gemessenen Asymmetrien dafür um zwei Größenordnungen zu groß waren. Stattdessen wurde vermutet, dass Gradienten des Magnetfelds und der Geschwindigkeit entlang der Sichtlinie Ursache der beobachteten Asymmetrien seien. Die ersten Modelle zur Erklärung von Linienasymmetrien mit Hilfe von Gradienten und Diskontinuitäten in Magnet- und Strömungsfeldern stammen von Maltby (1964). Kapitel 5 illustriert, wie durch eine Diskontinuität im Magnetfeld und in der Strömungsgeschwindigkeit Stokes-Profile mit beliebig starken Asymmetrien entstehen können.

4.1. Symmetriebetrachtungen

Symmetrieeigenschaften der Absorptionsmatrix (3.22) der Strahlungstransportgleichung wurden zuerst von Auer & Heasley (1978) diskutiert, allerdings ohne Berücksichtigung der magneto-optischen Effekte. Dies wurde von Landi Degl’Innocenti & Landi Degl’Innocenti (1981) ergänzt, und wir nennen hier die wichtigsten Resultate.

Einfachster Fall: Statische Atmosphäre im LTE

Man betrachte die Absorptionsmatrix η (3.22) bei einer beliebigen Frequenz ($\nu_0 + \Delta\nu$):

$$\eta(\nu_0 + \Delta\nu) = \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Unter der Transformation $\Delta\nu \rightarrow -\Delta\nu$ geht diese, mit $\eta_I \equiv \eta_I(\nu_0 + \Delta\nu)$ usw., über in

$$\eta(\nu_0 - \Delta\nu) = \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & -\eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & \rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & -\rho_Q \\ -\eta_V & -\rho_U & \rho_Q & \eta_I \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

da nach (3.23) $\eta_{I,Q,U}$ und ρ_V als Funktion der Wellenlänge symmetrisch sind, während η_V und $\rho_{U,Q}$ Antisymmetrie zeigen. Die Substitution der Absorptionsmatrix $\eta(\nu_0 + \Delta\nu) \rightarrow \eta(\nu_0 - \Delta\nu)$ in

der Strahlungstransportgleichung (3.19) führt mit $\mathbf{I}(v_0 + \Delta v) = (I, Q, U, V)$ zu dem neuen Lösungsvektor

$$\mathbf{I}(v_0 - \Delta v) = (I, Q, U, -V), \quad (4.3)$$

d.h. das Stokes-V-Profil ist relativ zur Linienmitte antisymmetrisch, während die anderen drei Stokes-Parameter symmetrisch sind. Dabei wurde die Variation der Quellfunktion B_ν über den Frequenzbereich $2\Delta\nu$ vernachlässigt, was bei den hier betrachteten Magnetfeldstärken und Wellenlängen sehr gut erfüllt ist. Die beiden wichtigsten Annahmen, die zu (4.3) führen, sind, dass lokales thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt, keine Materieströmungen auftreten und die Quellfunktion die in (3.21) angegebene Form besitzt. Es ist wichtig festzustellen, dass (4.3) nicht mehr gelten muss, wenn eine oder beide dieser Annahmen verletzt sind. Allerdings führt z. B. ein höhenunabhängiges Geschwindigkeitsfeld in der Atmosphäre lediglich zu einer spektralen Verschiebung $v_0 \rightarrow v_0 + \Delta v_\nu$ des ganzen Profils, so dass (4.3) weiterhin erfüllt ist. Das bedeutet, dass zumindest ein räumlicher Gradient der Strömungsgeschwindigkeiten oder eine Abweichung vom LTE vorliegen muss, um (4.3) zu verletzen.

Horizontale Geschwindigkeitsgradienten

Aus der Antisymmetrie von Stokes-V folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda) d\lambda = 0. \quad (4.4)$$

Das räumlich gemittelte Profil einer in der Ebene senkrecht zum Sehstrahl inhomogenen Atmosphäre lässt sich schreiben als

$$\langle V \rangle = \frac{1}{F} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} V(x, y) dx dy, \quad (4.5)$$

wobei $F = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dy$ die Fläche ist, über die die Mittelung erfolgt. Da das Integral von $V(x, y)$ für jeden Punkt (x, y) verschwindet und die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist, ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle V \rangle d\lambda = 0, \quad (4.6)$$

d.h., dass auch Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zur Sichtlinie nicht zu asymmetrischen Stokes-V-Profilen führen. Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti (1981) zeigten darüber hinaus, dass sich unter der Annahme $\eta_U = \rho_U = 0$ ein Stokes-Vektor bei Inversion des Magnetfeldes ($\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$) wie folgt transformiert:

$$\mathbf{I} = (I, Q, U, V) \rightarrow \mathbf{I}' = (I, Q, -U, -V). \quad (4.7)$$

4.2. Analyse von Stokes-V-Profilen

Zur Beschreibung der Asymmetrie von Stokes-V-Profilen werden vor allem die Flächenasymmetrie bzw. *Netto-Zirkularpolarisation* (im Text nachfolgend als NCP abgekürzt) und die Amplitudenasymmetrie herangezogen. Wir definieren die Netto-Zirkularpolarisation N als:

$$N \equiv \int_{\delta\lambda} V(\lambda) d\lambda, \quad (4.8)$$

wobei das Integrationsintervall $\delta\lambda$ das gesamte Linienprofil umfasst. Die Amplitudenasymmetrie wird durch

$$\delta a \equiv a_b - a_r \quad (4.9)$$

definiert, wobei a_b die Amplitude des blauen Flügels des V-Profiles bezeichnet, a_r die des roten und λ_0 die Wellenlänge des Nulldurchgangs:

$$\begin{aligned} a_b &= \max(|V(\lambda)|) \text{ für } \lambda < \lambda_0, \\ a_r &= \max(|V(\lambda)|) \text{ für } \lambda > \lambda_0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

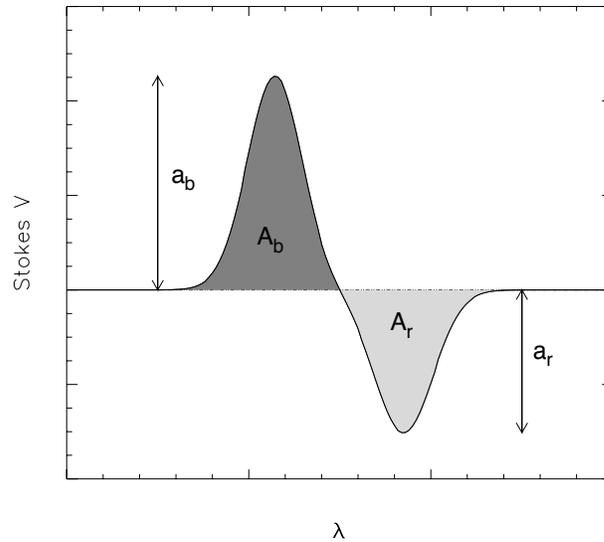


ABBILDUNG 4.1.: Asymmetrische Stokes-V-Profile: Die Fläche des *blauen* Flügels wird mit A_b bezeichnet, die des *roten* Flügels mit A_r . Die dazugehörigen Amplituden sind a_b und a_r .

Die Flächenasymmetrie oder NCP ist ein besseres Maß zur Charakterisierung von Asymmetrien als die Amplitudenasymmetrie, da sie unabhängig von einer Verschmierung durch räumlich nicht aufgelöste Geschwindigkeitsfelder (Makroturbulenz) ist, deren Wert nur empirisch ermittelt werden kann. Der Grund für die Unabhängigkeit liegt darin, dass die Faltung des Stokes-Profiles mit einer normierten Profildfunktion flächenerhaltend ist. Auch die Unkenntnis darüber, welcher Anteil eines Auflösungselements von magnetischen Flussröhren durchsetzt ist (*Füllfaktor*), legt nahe, mit der Flächenasymmetrie zu arbeiten. Um die durch eine teilweise von magnetischen Flussröhren durchsetzten Atmosphäre verursachte NCP zu berechnen, muss man lediglich die für eine Flussröhrenatmosphäre berechnete Flächenasymmetrie mit dem Füllfaktor multiplizieren, da der nicht von Strömungskanälen durchsetzte Teil des Auflösungselements zu keiner Asymmetrie führt. Die Amplitudenasymmetrie hängt dagegen von der relativen Lage der Maxima der verschiedenen höhenabhängigen Beiträge des Linienprofils ab. Außerdem können Probleme bei der Definition der Amplitudenasymmetrie in den Fällen auftreten, in denen das Stokes-V-Profil mehr als zwei Extrema besitzt. Solche „seltsamen“ Profile werden in der Tat beobachtet (siehe z. B. Sigwarth (1999)).

5. Entstehung von Spektrallinien in Gegenwart einer Magnetopause

Um zu testen, wie gut sich mit der DELO-Methode die Strahlungstransportgleichung in der Gegenwart von Unstetigkeiten in den atmosphärischen Parametern lösen lässt, wurden Stokes-Profile für den Fall einer einfachen zweischichtigen Modellatmosphäre berechnet, für die sich eine analytische Lösung angeben lässt (Steiner 2000). Die Modellatmosphäre besteht aus zwei Schichten, die durch eine Diskontinuität im Magnetfeld, die *Magnetopause*, getrennt sind. Die untere Schicht ist unmagnetisch und besitzt ein makroskopisches Geschwindigkeitsfeld, während das darüberliegende Plasma ruht und von einem vertikalen Magnetfeld durchsetzt ist. Diese Konfiguration ist ein Modell für eine von vertikalen magnetischen Flussröhren durchsetzte Atmosphäre, die sich mit zunehmender Höhe ausdehnen und schließlich den gesamten Raum mit einem nahezu vertikalen Magnetfeld füllen.

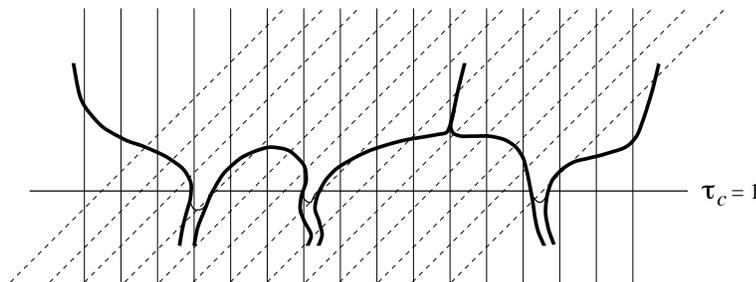


ABBILDUNG 5.1.: Skizze des Netzwerks magnetischer Flussröhren. Die durchgezogenen Linien bezeichnen Sichtlinien für Beobachtungen in Sonnenmitte, die gestrichelten solche für Beobachtungen außerhalb der Mitte. Die meisten Sichtlinien durchlaufen eine oder mehrere Flussröhrengrenzen (aus Steiner (2000)).

5.1. Berechnung der auf die Magnetopause auftreffenden Intensität

Wir betrachten die Strahlungstransportgleichung für Stokes-I in der Form (3.43):

$$\frac{dI}{d\tau} = I - S. \quad (5.1)$$

Im Falle lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (LTE) ist die Quellfunktion S gleich der Kirchhoff-Planck-Funktion B . Für eine Absorptionslinie ist $d\tau = (1 + \eta)d\tau_c$, wenn τ_c die Kontinuumsopazität bezeichnet. Unter der Annahme, dass das Linienabsorptionsprofil η unabhängig

von der optischen Tiefe τ ist, lässt es sich als Produkt aus einer Profildfunktion $\phi(\lambda)$ und einem konstanten Absorptionskoeffizienten η_0 schreiben:

$$\eta(\lambda) = \eta_0 \phi(\lambda). \quad (5.2)$$

Dann gilt für die in einer optischen Tiefe τ_1 nach außen gerichtete Strahlung $I^+(\tau_1, \lambda)$

$$I^+(\tau_1, \lambda) = \int_{\tau_1}^{\infty} (1 + \eta_0 \phi(\lambda)) B(\lambda, T, \tau_c) e^{(\tau_1 - \tau_c)(1 + \eta_0 \phi(\lambda))} d\tau_c. \quad (5.3)$$

In der Milne-Eddington-Näherung ist die Quellfunktion B gegeben durch

$$B(\tau) = B_0 + B_1 \tau, \quad (5.4)$$

wobei B_0 die Kirchhoff-Planck-Funktion bei $\tau = 0$ ist. Unter dieser vereinfachenden Annahme lässt sich dieses Integral analytisch lösen, und man erhält

$$I^+(\tau_1, \lambda) = B_0 + B_1 \left(\tau_1 + \frac{1}{1 + \eta_0 \phi(\lambda)} \right). \quad (5.5)$$

Speziell ergibt sich für die Kontinuumsintensität bei $\tau = \tau_1$

$$I_1 = B_{0,2} + B_{1,2}(\tau_1 + 1), \quad (5.6)$$

wobei der zweite Index die innere Schicht bezeichnet, bzw. mit $\beta \equiv B_{1,2}/B_{0,2}$

$$I_1 = B_{0,2}(\beta(\tau_1 + 1) + 1). \quad (5.7)$$

Für das in Abb. 5 in Steiner (2000) als Abszisse aufgetragene Verhältnis $B_{0,1}/I_1$ gilt damit:

$$\frac{B_{0,1}}{I_1} = \frac{1}{\beta(\tau_1 + 1) + 1} \frac{B_{0,1}}{B_{0,2}}. \quad (5.8)$$

5.2. Analytische Lösung oberhalb der Magnetopause

Die Magnetopause unseres Atmosphärenmodells befindet sich nun in der optischen Tiefe τ . In der darüber liegenden statischen Schicht der Atmosphäre führt ein vertikales Magnetfeld zur Aufspaltung der Spektrallinie in ihre Zeeman-Komponenten (siehe Abb. 5.2).

Unter der Annahme, dass der Sehstrahl parallel zum Magnetfeld verläuft, entkoppelt das System der vier Differentialgleichungen der Strahlungstransportgleichung und die Gleichungen für Stokes-I und Stokes-V lassen sich analytisch lösen. Nach (Steiner 2000) ist die analytische Lösung für die nach außen gerichtete rechts- bzw. linkszirkular polarisierte Strahlung $I_{r,l}$ in einer optischen Tiefe τ gegeben durch

$$\begin{aligned} I_{r,l}(\tau, \lambda) = & I_{r,l}(\tau_1, \lambda) e^{-(1 + \eta_0 \phi_{r,b})(\tau_1 - \tau)} + \\ & \frac{1}{2} \left(B_0 + \frac{B_1}{1 + \eta_0 \phi_{r,b}} \right) \left[1 - e^{-(1 + \eta_0 \phi_{r,b})(\tau_1 - \tau)} \right] + \\ & \frac{B_1}{2} \left[\tau - \tau_1 e^{-(1 + \eta_0 \phi_{r,b})(\tau_1 - \tau)} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

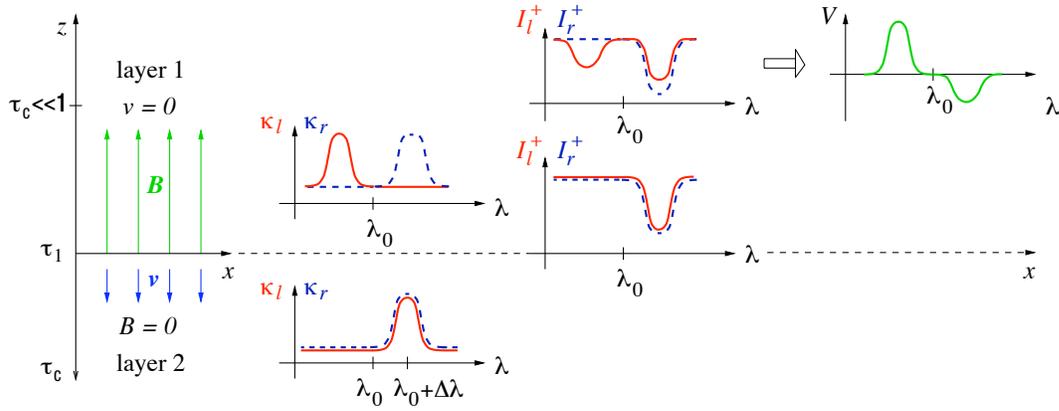


ABBILDUNG 5.2.: Die Entstehung asymmetrischer Stokes-V-Profile in einer zweischichtigen Modellsphäre. Die Magnetopause befindet sich in der optischen Tiefe τ_1 . $\kappa_{r,l}$ bezeichnet die Gesamtopazität für rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht (*gestrichelte* bzw. *durchgezogene* Kurve). $I_{r,l}^+$ sind die zugehörigen Intensitäten der auswärts gerichteten Strahlung. $V = I_r^+ - I_l^+$ ist das Stokes-V-Profil bei $\tau = 0$. Mit zunehmender Linien einsenkung in $I_{r,l}^+(\tau_1)$ sinkt die Differenz $I_r^+ - I_l^+$ bei $\tau = 0$ und $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ und führt zur teilweisen Unterdrückung des rechten Flügels des V-Profiles (aus Steiner (2000)).

Hierbei bezeichnen $\phi_{r,b}$ die Absorptionsprofile der rot- bzw. blauverschobenen Zeeman-Komponente, τ_1 die optische Tiefe der Magnetopause und $I_{r,l}(\tau_1, \lambda)$ die auf die Magnetopause auftreffende Intensität. Diese erhält man für eine Milne-Eddington-Atmosphäre durch Einsetzen von $\phi_{r,b}$ für ϕ aus (5.5). Aus (5.9) erhält man dann Stokes-I und Stokes-V als

$$I = I_r + I_l \quad \text{bzw.} \quad V = I_r - I_l. \quad (5.10)$$

5.3. Verhältnis von Linien einsenkung und Linienstärke

In Steiner (2000) wird für das Linienprofil der auf die Grenzschicht auftreffenden Strahlung *ad hoc* eine skalierte Voigt-Funktion angenommen:

$$I^+(\tau_1, \lambda) = I_1(1 - d(\lambda)) \quad (5.11)$$

mit

$$d(\lambda) = D\phi(\lambda). \quad (5.12)$$

Dies trifft in der Näherung für geringe Linienstärken zu, allgemein ist jedoch $D = D(\lambda)$. Dann lässt sich nur für eine bestimmte Wellenlänge (z. B. die Linienmitte) eine Linien einsenkung D angeben, die zu einem Voigt-Profil führt, das an dieser Stelle mit dem Linienprofil aus einer Milne-Eddington-Atmosphäre übereinstimmt. Dieses D erhält man unter Verwendung von (5.6) durch Gleichsetzen von (5.5) und (5.11):

$$B_0 + B_1\left(\tau_1 + \frac{1}{1 + \eta_0\phi(\lambda)}\right) = (B_0 + B_1(\tau_1 + 1))(1 - D\phi(\lambda_0)) \quad (5.13)$$

und daraus

$$D = \frac{1}{(\tau_1 + 1 + 1/\beta)} \frac{\eta_0}{1 + \eta_0 \phi(\lambda_0)}. \quad (5.14)$$

Verwendet man als Profilkfunktion ϕ eine auf die Doppler-Breite $\Delta\lambda_D$ normierte Voigt-Funktion

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta\lambda_D} H\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D}, a\right), \quad (5.15)$$

so ist $\phi(\lambda_0) = 1/(\sqrt{\pi}\Delta\lambda_D)$. Die Größenordnung dieser Zahl ist verständlich, wenn man bedenkt, dass das Profil über alle Wellenlängen integriert Eins ergibt und $\phi(\lambda_0 + \Delta\lambda_D) \approx \phi(\lambda_0)/e$ ist („Doppler-Kern“). In diesem Zusammenhang ist wichtig zu bemerken, dass verschiedene Definitionen des Linienabsorptionskoeffizienten η verwendet werden. Falls

$$\tilde{\eta}_0 \equiv \eta_0 \frac{1}{\Delta\lambda_D} = \frac{\kappa_L}{\kappa_c} \frac{1}{\Delta\lambda_D} \quad (5.16)$$

definiert wird, enthält der Linienabsorptionskoeffizient den Normierungsfaktor $1/\Delta\lambda_D$ der Voigt-Funktion. Zu diesem $\tilde{\eta}_0$ gehört dann das entsprechende, *nicht* auf eins normierte Linienprofil

$$\tilde{\phi}(\lambda) = \Delta\lambda_D \phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D}, a\right), \quad (5.17)$$

mit $\tilde{\phi}(\lambda_0) = 1/\sqrt{\pi}$ und eine Linieneinsenkung \tilde{D} , in der η_0 und $\phi(\lambda)$ durch $\tilde{\eta}_0$ und $\tilde{\phi}(\lambda)$ ersetzt sind. Definiert man die Linieneinsenkung einer komplett schwarzen Linie als Eins, ist $D = \tilde{D}/\sqrt{\pi}$, und man erhält für die Linieneinsenkung in Linienmitte

$$D' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{D}(\lambda_0) = \frac{1}{(\tau_1 + 1 + 1/\beta)} \frac{\tilde{\eta}_0}{\sqrt{\pi} + \tilde{\eta}_0}. \quad (5.18)$$

Beispielsweise ergibt sich für $\tilde{\eta}_0 = 1$, $\beta = 1$ und $\tau_1 = 0$

$$D' = \frac{1}{2(\sqrt{\pi} + 1)} = 0.18. \quad (5.19)$$

Setzt man β als positiv voraus, ist $1/(\tau_1 + 1 + 1/\beta)$ eine obere Schranke für D' , d. h. sehr große D' ergeben sich nur unter Annahme eines hinreichend großen Gradienten β in der Quellfunktion.

5.4. Vergleichende Rechnungen

5.4.1. Gradienten der Milne-Eddington-Atmosphäre

Mit Hilfe der Formel (5.18) lässt sich zu den in Steiner (2000) gegebenen Wertepaaren von $\tilde{\eta}_0$ und D' bei gegebener Position τ_1 der Magnetopause jeweils ein Gradient β für die Milne-Eddington-Atmosphäre in der inneren Schicht finden. Diese Werte sind in Tabelle 5.1 verzeichnet. Bei gegebener Temperatur T_2 an der Grenzschicht lässt sich dann mit (5.8) die Kontinuumsintensität I_1 an dieser Stelle gemäß (5.4) und (5.6) berechnen und damit entweder für gegebenes T_1 das Verhältnis $B_{0,1}/I_1$ oder für gegebenes $B_{0,1}/I_1$ die Temperatur T_1 in der äußeren Schicht. Die Werte für die Temperatur T_1 , die sich für $T_2 = 4900$ K und $\lambda = 500$ nm ergeben, sind in Tabelle 5.2 aufgelistet.

Position MP $\log(\tau_1)$	Linienstärke $\tilde{\eta}_0$	Max. Linieneinsenkung D'	ME-Gradient β
-2.3	1.25	0.1	0.32
-2.3	2.0	0.3	1.31
-2.3	4.0	0.5	2.63
-2.3	12.5	0.7	4.06
-2.3	830.0	0.9	9.64

TABELLE 5.1.:

Atmosphärenmodell mit Magnetopause: Milne-Eddington-Gradienten für den Atlas der Stokes-V-Profile in (Steiner 2000)

	$B_{0,1}/I_1$						
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.2
0.9	4956	6104	6837	7419	7921	8151	8579
0.7	4394	5277	5820	6241	6596	6757	7055
D 0.5	4181	4974	5453	5822	6132	6271	6527
0.3	3924	4615	5026	5338	5598	5714	5927
0.1	3645	4233	4577	4835	5048	5143	5315

TABELLE 5.2.:

Atmosphärenmodell mit Magnetopause: Temperaturen $T_1[K]$ in der äußeren Schicht für den Atlas der Stokes-V-Profile in (Steiner 2000)

5.4.2. Vergleich mit der numerischen Lösung

Für eine hypothetische Spektrallinie der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm zeigt Abb. 5.3 einen Atlas synthetischer Stokes-V-Profile. Die Profile wurden mit Hilfe der DELO-Methode berechnet und dann mit der analytischen Lösung (5.10) verglichen. Als oberer Rand der Atmosphäre wurde dabei $\log(\tau) = -5$ gewählt. Die Differenzen zwischen beiden Lösungen sind in Abb. 5.4 dargestellt. Die maximalen Fehler in der Amplitude liegen für fast alle Profile deutlich unterhalb von 1% der Kontinuumsintensität, die relativen Fehler betragen zwischen 2% und 6%. Wir stellen fest, dass die DELO-Methode selbst in Situationen, in denen eine abrupte Änderung in der Temperatur, der Strömungsgeschwindigkeit und im Magnetfeld auf einer kleinen räumlichen Skala stattfindet, in der Lage ist, die Strahlungstransportgleichung zu lösen.

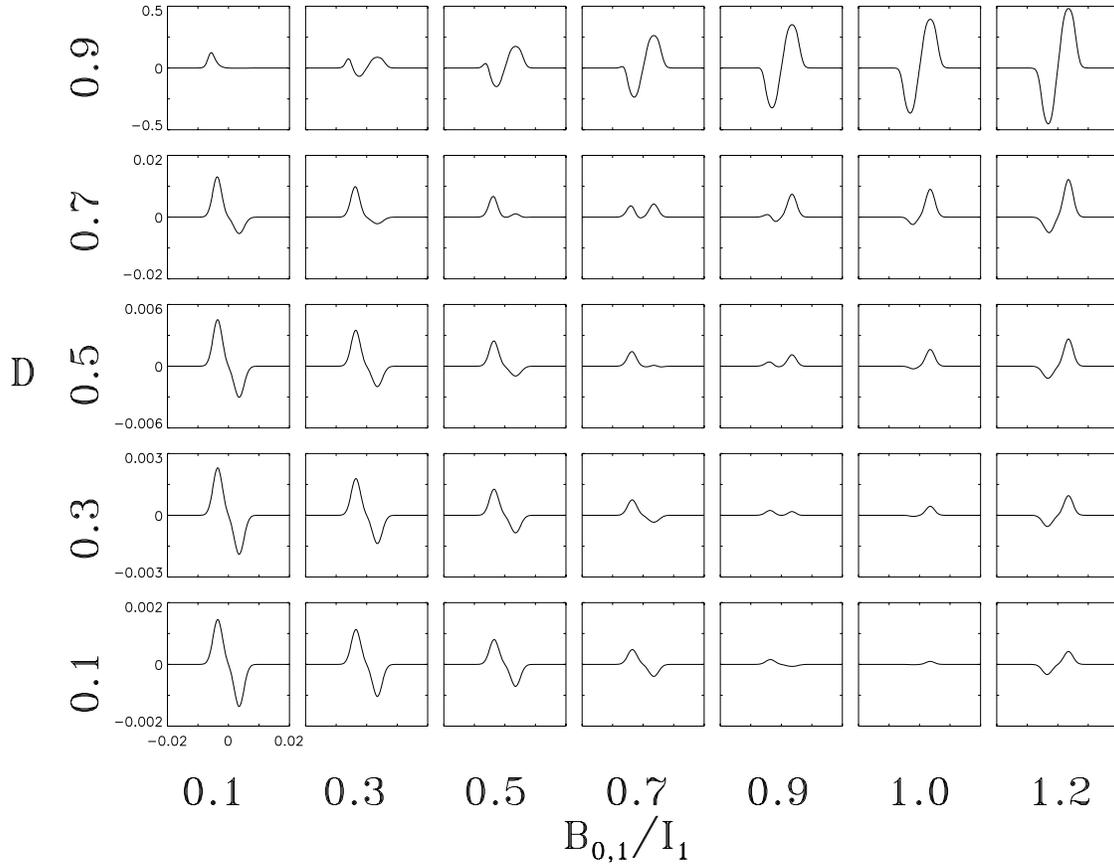


ABBILDUNG 5.3.:

Atlas synthetischer Stokes-V-Profile in Abhängigkeit der maximalen Linieneinsenkung D und des Intensitätsverhältnisses $B_{0,1}/I_1$ an der Magnetopause. Die Wellenlänge der hier betrachteten hypothetischen Spektrallinie beträgt $\lambda = 500$ nm, die Geschwindigkeit des Plasmas wurde so gewählt, dass die Doppler-Verschiebung der Aufspaltung durch den Zeeman-Effekt entspricht ($v = 2.1$ km/s, $B = 100$ mT, $g = 3$). Die Ordinate ist auf die Kontinuumsintensität $I_c(\lambda = 500$ nm) normiert.

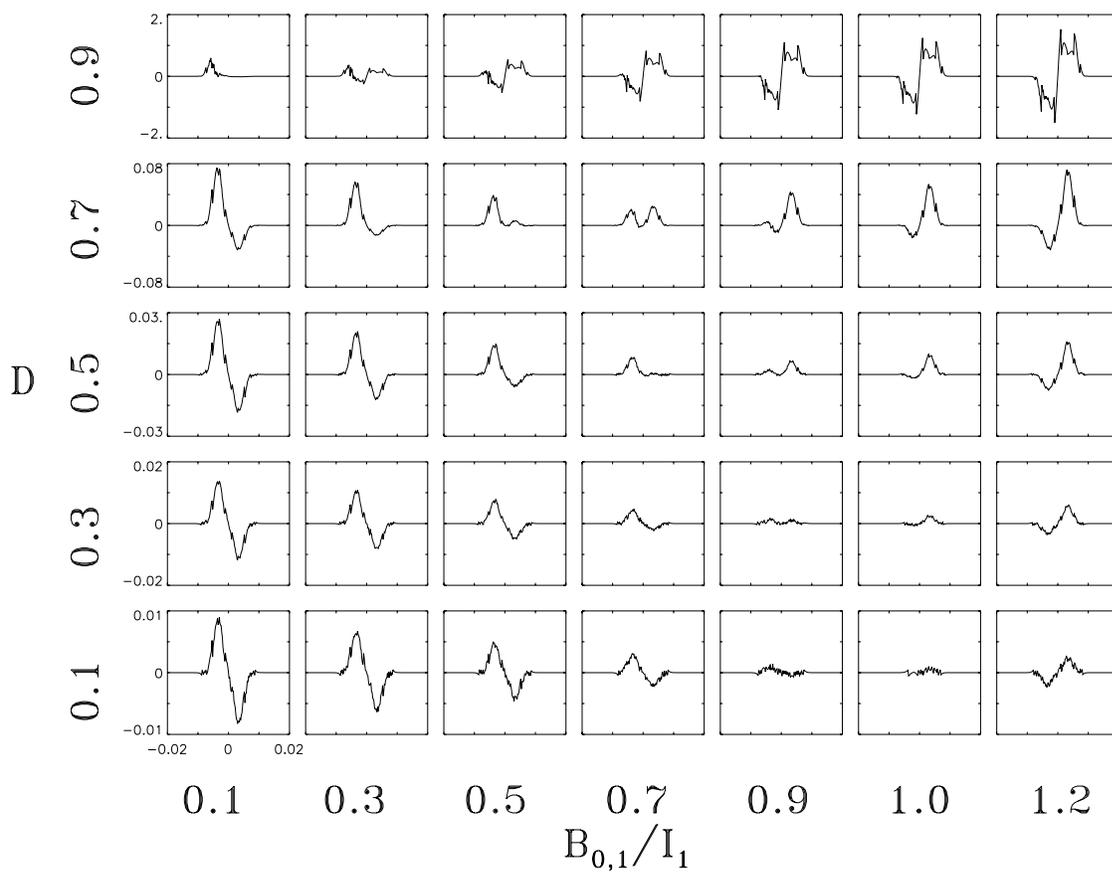


ABBILDUNG 5.4.:

Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung. Aufgetragen ist die Differenz $\Delta V = V_{\text{DELO}} - V_{\text{analytisch}}$ der Profile aus Abb. 5.3 in Prozent der Kontinuumsintensität für eine Schrittweite von $\Delta \log(\tau_c) = 0.004$.

Unterschiede zu den Profilen in Steiner (2000) Vergleicht man die hier berechneten Profile mit dem in Steiner (2000) vorgestellten Profilatlas, fallen vor allem die qualitativ anderen Profile in der obersten Zeile von Abb. 5.3 auf, die zu extrem starken Linien mit $\eta = 830$ gehören. Der Grund dafür liegt im wesentlichen darin, dass in Steiner (2000) für die auf die Grenzschicht auftreffende Intensität ein skaliertes Voigt-Profil verwendet wird, während die aus einer Milne-Eddington-Atmosphäre austretende Intensität durch (5.5) gegeben ist. Diese Näherung eines skalierten Voigt-Profiles ist in diesem Fall für starke Linien ungültig, was in Abb. 5.5 illustriert ist.

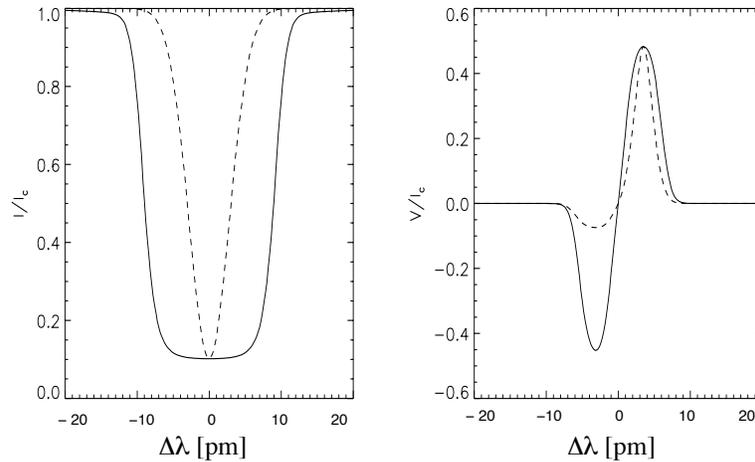


ABBILDUNG 5.5.:

Links: auf die Grenzschicht auftreffende Intensität für $\eta = 830$. *Rechts:* resultierende Stokes-V-Profile. Die durchgezogenen Linien bezeichnen die Profile für eine Milne-Eddington-Atmosphäre in der inneren Schicht, die gestrichelten Linien die Ergebnisse bei Verwendung eines skalierten Voigt-Profiles.

6. Modellierung von Magnetfeldern in Sonnenflecken

Die Struktur und Dynamik von Sonnenflecken wird von Magnetfeldern dominiert. Spektropolarimetrische Messungen können Aufschluss über Strömungskanäle und die genaue Form des Magnetfelds geben. Dies setzt voraus, dass man die beiden Vektorfelder in einem geeigneten Modell parametrisiert, um für unterschiedliche Positionen eines Flecks auf der Sonne und für beliebige Orte innerhalb des Flecks die Orientierung des Magnetfeldvektors relativ zum Beobachter und die Projektion der Strömung auf die Sichtlinie angeben zu können. Damit lassen sich dann unter Verwendung eines Modells für die Temperatur- und Druckschichtung in der Atmosphäre synthetische Spektrallinien berechnen, die mit Beobachtungen verglichen werden können.

6.1. Koordinatensysteme

Zur Beschreibung des Magnetfeldes eines Sonnenflecks werden verschiedene Koordinatensysteme verwendet, die im folgenden definiert werden. Dabei betrachten wir einen (theoretischen) axialsymmetrischen Sonnenfleck, dessen Fläche sehr klein gegenüber der Sonnenoberfläche ist, so dass deren Krümmung vernachlässigt werden kann ($A_f/A_\odot \approx 10^{-10}$).

6.1.1. Definition der verwendeten Bezugssysteme

Ortskoordinaten im Fleck Ein Punkt \mathbf{x}_0 in einem Sonnenfleck lässt sich in Zylinderkoordinaten $\mathbf{x}_0 = (r, z, \psi)$ beschreiben. Dabei ist r die radiale Entfernung von der Fleckachse \vec{n} , der Oberflächennormalen in Fleckmitte, und z die geometrische Höhe relativ zu einer Referenzhöhe z_0 (beispielsweise $z_0 = z(\tau_c = 1)$). Die Fleckachse \vec{n} und die Sichtlinie spannen eine Ebene E auf. Der Azimutwinkel ψ wird im mathematisch positiven Sinn um \vec{n} relativ zur Schnittlinie der Tangentialebene der Sonnenoberfläche mit der Ebene E gemessen.

Beschreibung des Magnetfeldes im Sonnenfleck Das Magnetfeld eines Sonnenflecks ist ein Vektorfeld $\mathbf{B}_s(\mathbf{x})$. Der Magnetfeldvektor an einem Ort \mathbf{x}_0 im Fleck lässt sich in einem *sphärischen Koordinatensystem* S als $\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_0) = (B', \gamma', \phi')$ beschreiben, mit dem Ursprung in Fleckmitte und dem Normalenvektor \vec{n}' als Achse. Dabei ist $B' = |\mathbf{B}|$ die magnetische Feldstärke, γ' beschreibt die Inklination relativ zu \vec{n}' und ϕ' den Azimut um \vec{n}' . Die Oberflächennormale \vec{n}' und die Sichtlinie spannen eine Ebene E' auf. Dieses System wird in ein *kartesisches Koordinatensystem* S_K transformiert, indem man \vec{n}' als z -Achse wählt, die x -Achse rechtwinklig dazu in der Ebene E' und die y -Achse rechtwinklig zu dieser Ebene derart, dass die drei Achsen ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden. Der Azimut ϕ' wird entgegen dem Uhrzeigersinn von der x -Achse in Richtung

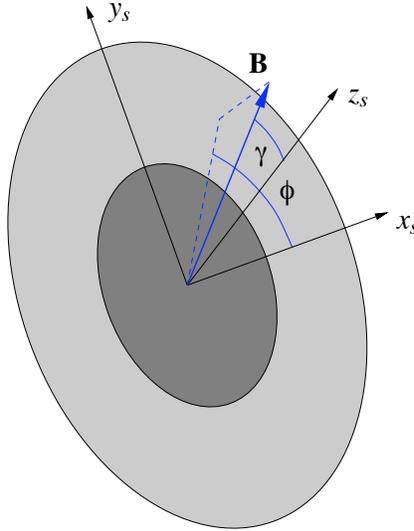


ABBILDUNG 6.1.: Parametrisierung eines Sonnenflecks (1): Die z_s -Achse zeigt aus der Zeichenebene heraus. Der Inklinationswinkel γ des Magnetfeldvektors \mathbf{B} wird relativ zur z_s -Achse gemessen, der Azimutwinkel ϕ von der x_s -Achse in Richtung der y_s -Achse.

der y -Achse gemessen. S und S_K stehen dann in folgender Beziehung zueinander:

$$\begin{aligned} B_{x,s}(\mathbf{x}_0) &= B' \sin \gamma' \cos \phi', \\ B_{y,s}(\mathbf{x}_0) &= B' \sin \gamma' \sin \phi', \\ B_{z,s}(\mathbf{x}_0) &= B' \cos \gamma'. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Koordinatensystem des Beobachters Sei nun K das Koordinatensystem des Beobachters. Da die für den Strahlungstransport entscheidenden Größen die Inklination und der Azimut des lokalen Magnetfeldvektors *relativ zur Sichtlinie* sind, werden auch hier sphärische Koordinaten verwendet. Die Koordinatentransformation lässt sich allerdings anschaulicher in kartesischen Koordinaten formulieren: Wir definieren das neue System K , indem wir das Fleck-Koordinatensystem S_K um den heliozentrischen Winkel θ um die y_s -Achse drehen, so dass die neue z -Achse entlang der Sichtlinie liegt. Die neue x -Achse liegt dann weiterhin in der Ebene E und $y \equiv y_s$. Diese Transformation des Koordinatensystems wird durch die Drehmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

beschrieben, so dass

$$\mathbf{B}_{\text{obs}}(\mathbf{x}_0) \equiv \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta B_{x,s} + \sin \theta B_{z,s} \\ B_{y,s} \\ -\sin \theta B_{x,s} + \cos \theta B_{z,s} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

und nach Rücktransformation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 B &= B' = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}, \\
 \gamma &= \arctan\left(\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B_z}\right), \\
 \phi &= \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right).
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

Wie auch im Fleck-Koordinatensystem wird der Azimut ϕ relativ zur x -Achse gemessen, die in der Ebene E' liegt. Abb. (6.1) und Abb. (6.2) zeigen Skizzen der verwendeten Koordinatensysteme.

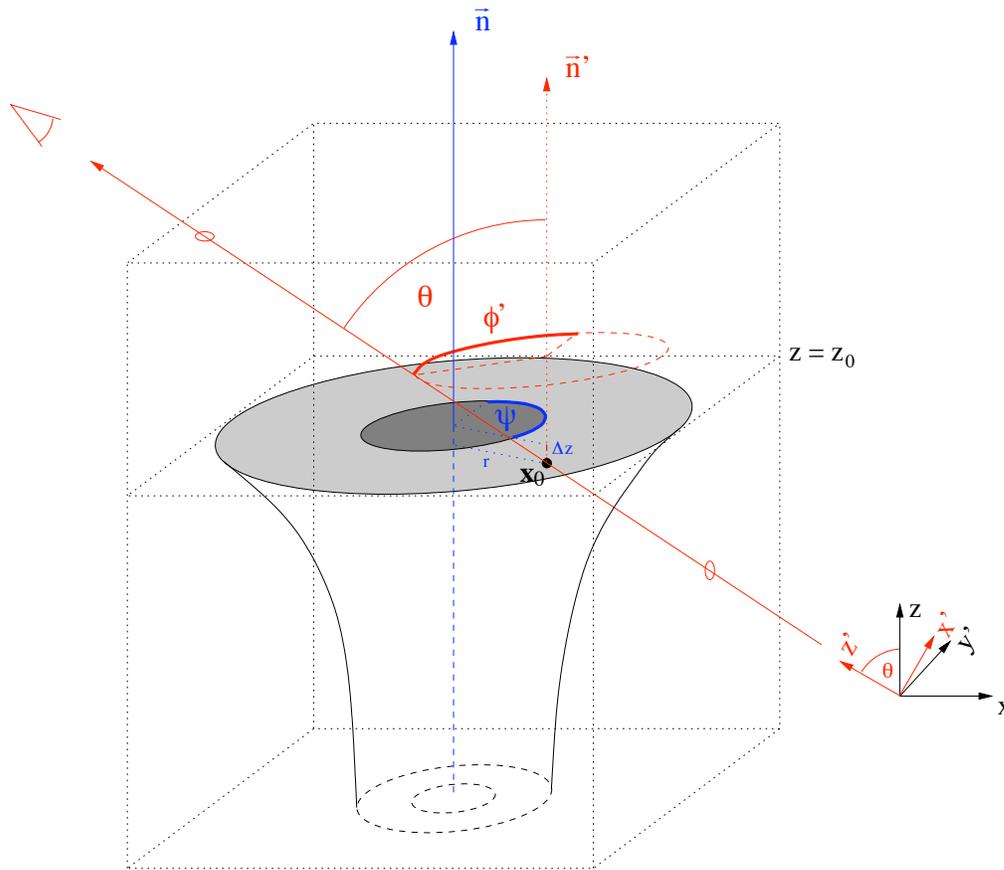


ABBILDUNG 6.2.:

Parametrisierung eines Sonnenflecks (2): Die Projektion des Magnetfeldes in einem Punkt $\mathbf{x}_0 = (r, z, \psi)$ auf die Sichtlinie wird bestimmt durch den heliozentrischen Winkel θ und den Azimutwinkel ϕ . \vec{n} und \vec{n}' bezeichnen die Oberflaechennormalen in der Fleckmitte und im Punkt \mathbf{x}_0 , die parallel zueinander sind.

6.2. Ein einfaches Modell für das Magnetfeld eines Sonnenflecks

Aus Beobachtungen haben Beckers & Schröter (1969) folgende Formel für die magnetische Feldstärke $B = |\mathbf{B}|$ in einem Sonnenfleck als Funktion des Abstands r von der Fleckmitte in der geometrischen Höhe $z = z_0$ abgeleitet:

$$B(r) = B_0 \frac{1}{1 + (r/r_*)^2}. \quad (6.5)$$

In diesem Ausdruck bezeichnet r_* den Abstand, in dem die Feldstärke um 50% relativ zur Fleckmitte abgenommen hat, und B_0 die Feldstärke in Fleckmitte. Für die Inklination γ in der geometrischen Höhe $z = z_0$ fanden sie

$$\gamma(r) = \frac{\pi r}{2 r_*}. \quad (6.6)$$

Um neueren Beobachtungen Rechnung zu tragen, nach denen das Magnetfeld eines Sonnenflecks bei $r = r_*$ nicht horizontal ist, sondern eine Neigung von ca. $5^\circ - 20^\circ$ relativ zur Horizontalen besitzt, erweitern wir diese Formel hier auf

$$\gamma(r) = \frac{\pi r}{2 r_\gamma}, \quad (6.7)$$

wobei r_γ der Abstand von der Fleckmitte ist, bei dem $\gamma = 90^\circ$ beträgt. Beckers & Schröter und auch nachfolgende Beobachter konnten keine signifikante azimutale Feldkomponente messen. Unter der Annahme, dass letztere Null ist, lässt sich die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ schreiben als

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = 0 \quad (6.8)$$

oder

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{B_r}{r} - \frac{\partial B_r}{\partial r}. \quad (6.9)$$

Hierbei bezeichnet $B_z = |B| \cos \gamma$ die vertikale und $B_r = |B| \sin \gamma$ die radiale Komponente des Magnetfeldes. Für kleine Höhenänderungen $z - z_0$ liefert eine Taylor-Entwicklung in erster Ordnung

$$\begin{aligned} B_z(z, r) &\approx B_z(z = z_0, r) + (z - z_0) \cdot \frac{\partial B_z(z, r)}{\partial z}, \\ B_r(z, r) &\approx B_r(z = z_0, r). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Mit (6.9) erhält man

$$B_z(z, r) \approx B_{z,0} + (z - z_0) \cdot |B| \cdot \left(-\frac{\sin \gamma}{r} - \left(\cos \gamma \frac{\pi}{2 r_\gamma} - \sin \gamma \frac{2r}{r_*^2} \frac{1}{1 + (r/r_*)^2} \right) \right). \quad (6.11)$$

Die Inklination γ kann dann für Werte von $z \neq z_0$ aus $\gamma = \tan^{-1}(B_r/B_z)$ berechnet werden, für $z = z_0$ ist sie durch (6.7) gegeben. Insbesondere erhält man für die Fleckmitte ($r = 0, \gamma = 0$):

$$B_z(z, 0) \approx B_{z,0} \left(1 - \frac{\pi}{2 r_\gamma} (z - z_0) \right). \quad (6.12)$$

Wir benutzen diese analytische Näherung in unserem Penumbra-Modell für die *Richtung* des magnetischen Hintergrundfeldes, da aus dem Modell von Jahn & Schmidt (1994) nur der *Betrag* des

Magnetfeldes bekannt war. Der Koeffizient r_γ in (6.7) wurde so gewählt, dass die Feldlinien am äußeren Rand der Penumbra bei $z(\tau = 1)$ tangential zur Magnetopause verlaufen. In Abb. 6.5 im nächsten Abschnitt ist die Richtung des Magnetfelds für einen radialen Schnitt durch die photosphärische Penumbra skizziert. Mit den Werten von $B_0 = 270 \text{ mT}$ ($= 2700 \text{ G}$) und $r_\gamma = 16800 \text{ km}$ ergibt sich in der Fleckmitte ein vertikaler Magnetfeldgradient von $\partial B_z / \partial z \approx -0.025 \text{ mT/km}$, was recht gut mit dem aus dem Modell von Jahn & Schmidt (1994) bestimmten Wert für $r = 0$ (senkrecht Feld) und $z = z(\tau = 1)$ von $\partial B_z / \partial z \approx -0.03 \text{ mT/km}$ übereinstimmt.

6.3. Modellierung magnetischer Flussröhren in der Penumbra

Ausgangspunkt für die Modellierung von Flussröhren in der Penumbra sind die MHD-Rechnungen von Schlichenmaier et al. (1998). Die zeitliche Evolution einer aufsteigenden Flussröhre in zwei räumlichen Dimensionen wird hier im Lagrange-Formalismus berechnet, die Diskretisierung der Gitterpunkte ist dabei äquidistant in der Masse. Für jeden Lagrange-Punkt werden u. a. die Koordinaten in der r - z -Ebene, die thermodynamischen Parameter (Druck p , Dichte ρ , Temperatur T), die magnetische Feldstärke B , die Neigungswinkel α der Röhre und die Strömungsgeschwindigkeit berechnet. Aus der magnetischen Feldstärke und der Erhaltung des magnetischen Flusses $F = \pi r^2 B$ entlang der Röhre lässt sich an jeder Stelle ein Radius der Röhre berechnen, wobei in der Näherung der dünnen Flussröhren die physikalischen Parameter entlang des Röhrenradius als konstant angenommen werden. Als Hintergrundfeld wird das magnetostatische Sonnenfleckmodell von Jahn & Schmidt (1994) verwendet (siehe Abschnitt 1.3). Die Parameter des in dieser Arbeit verwendeten Modells sind: Radius der Umbra $R_U = 8000 \text{ km}$, Radius der Penumbra $R_P = 16000 \text{ km}$, gesamter magnetischer Fluss $\Phi = 10^{22} \text{ Mx} = 10^{14} \text{ Wb}$ (1 Weber [Wb] = $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$). In Abb. 6.3 ist der Verlauf der thermodynamischen Größen Temperatur, Druck und Dichte dieses Sonnenfleckmodells als Funktion der Höhe in der Atmosphäre aufgetragen.

6.3.1. Diskretisierung

Ziel ist die Diskretisierung einer axialsymmetrischen Flussröhre auf einem regulären, d.h. in den räumlichen Koordinaten äquidistanten, dreidimensionalen Gitter, um dann für jeden Ort in der Penumbra und für beliebige heliozentrische Winkel die austretende Strahlung berechnen zu können. Dazu werden zuerst zweidimensionale Schnitte durch die Röhre in der r - z -Ebene konstruiert, die anschließend zusammengesetzt werden. Dies ist möglich, weil die Achse der Flussröhre aufgrund der auf zwei Dimensionen beschränkten Simulation eine ebene Raumkurve beschreibt.

Im ersten Schritt werden die Koordinaten (r_L, z_L) der Lagrange-Punkte auf ein in r äquidistantes eindimensionales Gitter interpoliert. Die Anzahl der Gitterpunkte wird dabei so groß gewählt, dass auch im aufsteigenden Teil der Flussröhre mehrere Punkte zwischen zwei Lagrange-Punkten liegen. Aus dem Neigungswinkel und der Magnetfeldstärke lässt sich zu jedem Punkt (r_i, z_i) auf der Achse der Röhre ein Normalenvektor \vec{n}_i konstruieren, entlang dem die physikalischen Parameter die gleichen sind wie an seinem Aufpunkt. So erhält man eine Menge M von Koordinatenpunkten $\{r_{il}, z_{il}\}$, wobei l die Position entlang der Normalen bezeichnet. Für diese Punktmenge M lässt sich eine Triangulierung \mathbf{T} berechnen, mit deren Hilfe sich die physikalischen Parameter auf ein reguläres Gitter von Punkten $(\tilde{r}_i, \tilde{z}_i)$ mit Gitterweite h interpolieren lassen. Die genaue Art der Triangulierung ist bei diesem Problem unkritisch, da die Variation aller Größen in der Röhre

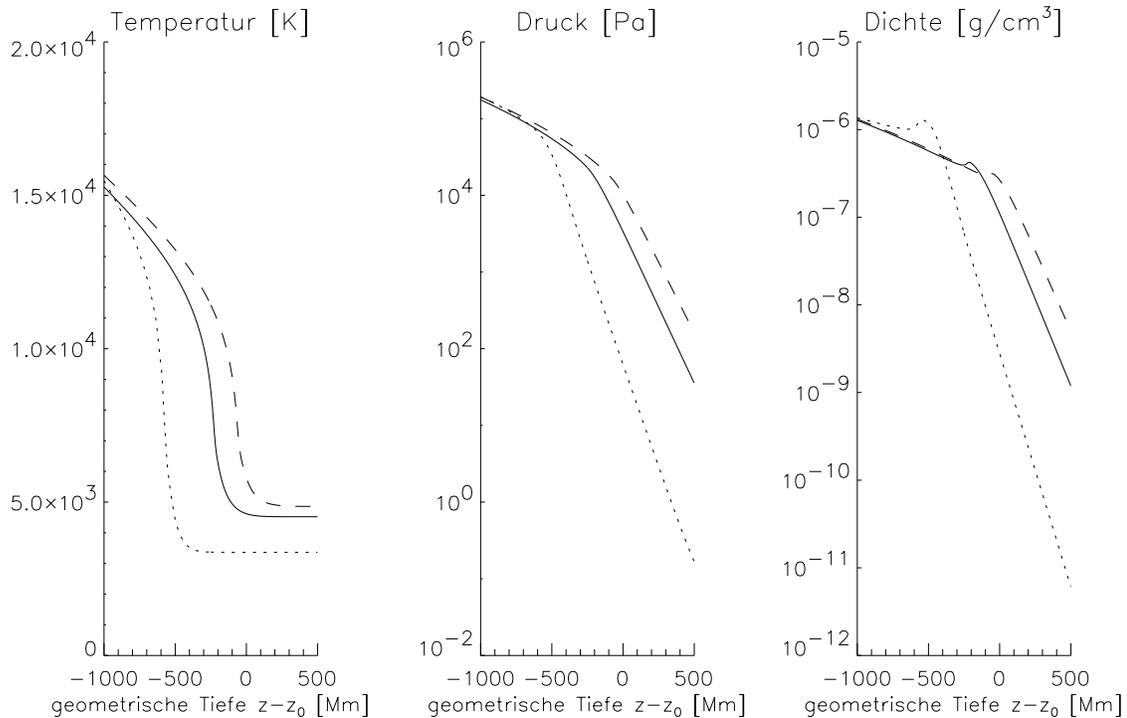


ABBILDUNG 6.3.: Verlauf der thermodynamischen Variablen Temperatur, Druck und Dichte für die drei Bereiche Penumbra (*durchgezogene Linie*), Umbra (*gepunktet*) und ruhige Sonne (*gestrichelt*) nach dem Modell von Jahn & Schmidt (1994).

glatt ist. Hier wurde eine Delaunay-Triangulierung (Delaunay 1934) gewählt, die die Eigenschaft hat, dass der Umkreis jedes Dreiecks T_i keine weiteres Vertizes enthält, so dass die Werte an den neuen Koordinatenpunkten nur aus den Nachbarpunkten interpoliert werden. Die vorgenommene Interpolation ist linear. Abb. 6.4 zeigt einen Ausschnitt der Triangulierung in der Symmetrieebene, die die Achse der Flussröhre enthält. Für jeden Abstand d von der Röhrenmitte kann nun ein Schnitt in der r - z -Ebene durch die Flussröhre gelegt werden und das oben beschriebene Verfahren angewendet werden. Als Abstand der Schnitte wird die Gitterweite h gewählt, so dass man aus der Vereinigung aller Schnitte die gesuchte Diskretisierung der Röhre auf einem regulären dreidimensionalen Gitter erhält.

Abb. 6.5 zeigt eine Darstellung des Magnetfelds in der Penumbra in einem vertikalen Schnitt durch die Flussröhrenachse. Die Werte für den Betrag des Hintergrundmagnetfelds stammen aus dem Modell von Jahn & Schmidt (1994), die Richtung des Feldes wurde mit Hilfe der in Abschnitt 6.2 beschriebenen analytischen Näherung ermittelt.

6.3.2. Einbettung in ein Hintergrundmodell

Bei der Berechnung des Strahlungstransports entlang eines Sehstrahls, der Flussröhren durchquert, muss einerseits die Flussröhre räumlich aufgelöst werden, insbesondere deren Ränder, andererseits

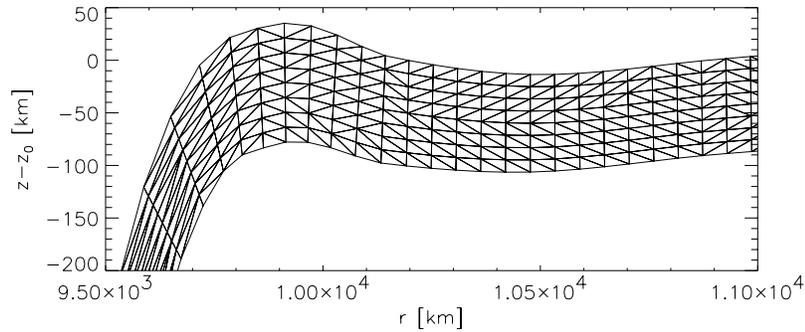


ABBILDUNG 6.4.: Triangulierung einer Flussröhre, Ausschnitt aus der Symmetrieebene.

sollte aus Gründen der Recheneffizienz der Tatsache Rechnung getragen werden, dass der größte Teil des Sehstrahls durch eine räumlich unstrukturierte Atmosphäre verläuft, in der die thermodynamischen Parameter lediglich höhenabhängig sind und das Magnetfeld eine glatte Funktion des Ortes $\mathbf{x} = (r, z, \psi)$ ist. Aus diesem Grund wird die magnetische Flussröhre in einer dreidimensionalen Box diskretisiert, welche dann in ein parametrisiertes Hintergrundmodell eingebettet wird, für das hier das oben beschriebene Modell von Jahn & Schmidt (1994) verwendet wird.

Der Sehstrahl wird durch einen Aufpunkt $\mathbf{x}_0 = (r, z, \psi)$ im Sonnenfleck und den heliozentrischen Winkel θ definiert und durch eine Punktmenge $P = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1\dots n}$ diskretisiert. Durchkreuzt der Sehstrahl die Röhre, werden die physikalischen Parameter innerhalb der Röhre auf die entsprechenden Punkte des Sehstrahls interpoliert. Dazu wird die „nearest neighbour“-Approximation verwendet, also auf den nächstgelegenen Gitterpunkt gerundet, um die scharfen Ränder der Flussröhre zu erhalten. Außerhalb der Röhre werden die thermodynamischen Parameter und die Magnetfeldstärke aus dem Hintergrundmodell interpoliert und die Richtung des Magnetfeldes aus der analytischen Näherung (6.10) berechnet. Die Gitterweite einer Box beträgt $h = 2 - 5$ km, deren Länge zwischen 3000 und 8000 Kilometern, die Höhe 200 – 800 km und die Breite 100 – 200 km.

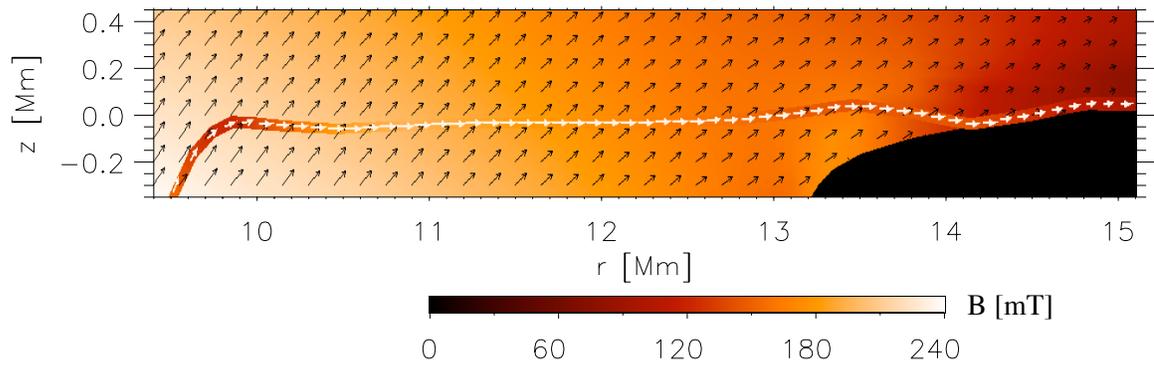


ABBILDUNG 6.5.: Betrag und Richtung des Magnetfeldes in der Penumbra: Schnitt in der r - z -Ebene. In der magnetischen Flussröhre strömt das Plasma entlang der magnetischen Feldlinien (weiße Pfeile), während der Hintergrund als statisch angenommen wird. Die Farbschattierung gibt die magnetische Feldstärke an, die schwarzen Pfeile kennzeichnen die Richtung des Hintergrundmagnetfeldes.

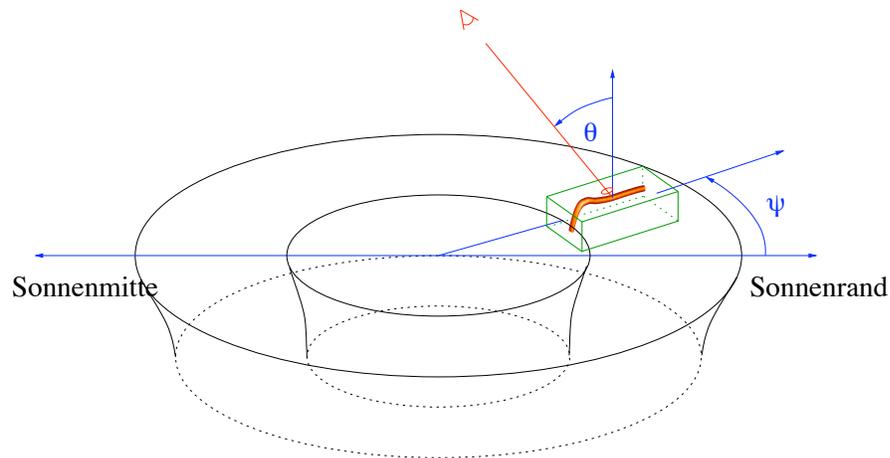


ABBILDUNG 6.6.: Einbettung der Flussröhre in die Penumbra: Eine magnetische Flussröhre wird in einer dreidimensionalen Box diskretisiert, die in ein parametrisiertes axialsymmetrisches Hintergrundmodell eingebettet wird. Die physikalischen Parameter entlang der Sichtlinie werden durch den heliozentrischen Winkel θ und den Azimutwinkel ψ im Sonnenfleck bestimmt.

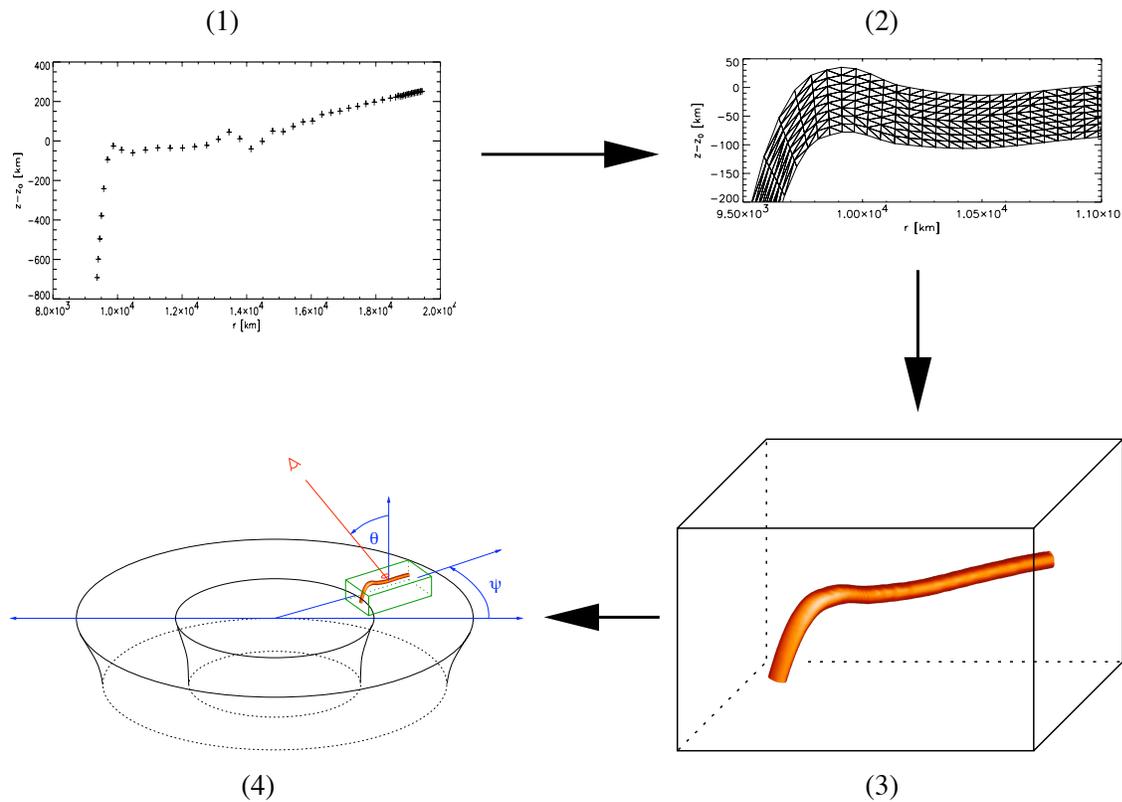


ABBILDUNG 6.7.: Diskretisierung einer magnetischen Flussröhre in der Penumbra: Die Daten der MHD-Simulation (1) werden unter Verwendung der Approximation einer dünnen Flussröhre und der Delaunay-Triangulierung in parallelen Ebenen dargestellt (2), welche dann auf das reguläre Gitter einer Box interpoliert werden (3). Schließlich wird die Box in das Hintergrundmodell eingebettet (4).

7. Spektrale Signatur penumbraler Flussröhren

In diesem Kapitel soll untersucht werden, welchen Effekt eine magnetische Flussröhre in der Penumbra auf die Asymmetrie von Stokes-V-Profilen hat. Wir werden dazu als erstes zwei Spektrallinien beschreiben, die wir zur Analyse verwenden wollen, und deren berechnete Stokes-V-Profile in der Penumbra für verschiedene heliozentrische Winkel und radiale Positionen erläutern. Dabei werden wir auf die Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkularpolarisation eingehen. In Abschnitt 7.7 werden wir anhand eines vereinfachten Modells die Abhängigkeit der NCP von verschiedenen Parametern einer magnetischen Flussröhre untersuchen.

7.1. Charakter und diagnostische Möglichkeiten zweier Spektrallinien

Im folgenden sollen zwei Spektrallinien des neutralen Eisens, Fe I 630.25 nm im sichtbaren Wellenlängenbereich und Fe I 1564.8 nm im Infraroten, im Hinblick auf ihre Verwendung bei der Bestimmung atmosphärischer Parameter untersucht werden. Diese Linien wurden ausgewählt, weil sie große Landé-Faktoren besitzen und den normalen Zeeman-Effekt zeigen. U. a. aus diesen Gründen wird in diesen beiden Linien häufig in der Sonnenphysik beobachtet, in der sichtbaren Linie z. B. mit dem *Advanced Stokes Polarimeter* (USA) und in der Infrarotlinie mit dem *Tenerife Infrared Polarimeter*.

λ [nm]	atomarer Übergang	χ [eV]	g_1	g_2	g	g (exper.)	$fg\epsilon$
630.25	$z^5P_1 - e^5D_0$	3.69	2.5	0	2.5	2.487	$1.78 \cdot 10^{-6}$
1564.8	$e^7D_1 - 3d^64s5p^7D_1^o$	5.43	3.0	3.0	3.0	3.001	$7.24 \cdot 10^{-6}$

TABELLE 7.1.: Linienparameter für Fe I 630.25 nm und Fe I 1564.8 nm

Bei beiden Linien handelt es sich um Übergänge zwischen Energieniveaus neutraler Eisenatome, die vor allem in der Photosphäre stattfinden. Beides sind normale Zeeman-Triplets mit ähnlichen Landé-Faktoren von $g = 2.5$ bzw. $g = 3.0$. Für das Produkt aus Oszillatorenstärke, statistischem Gewicht der Übergangs und relativer Häufigkeit von Eisen in der Sonnenatmosphäre („ $fg\epsilon$ -Faktor“) ergibt sich $1.78 \cdot 10^{-6}$ bzw. $7.24 \cdot 10^{-6}$ für die Infrarotlinie.

Abb. 7.1 zeigt die Intensitätsprofile (Stokes-I) dieser beiden Spektrallinien für das Atmosphärenmodell von Jahn & Schmidt (1994) und ein konstantes Magnetfeld der Stärke 170 mT, das um 30° gegenüber der Sichtlinie geneigt ist. Man erkennt, dass die Zeeman-Komponenten der Infrarotlinie (*rechts*) vollständig aufgespalten sind, während das Absorptionsprofil der Linie Fe I 630.25 nm

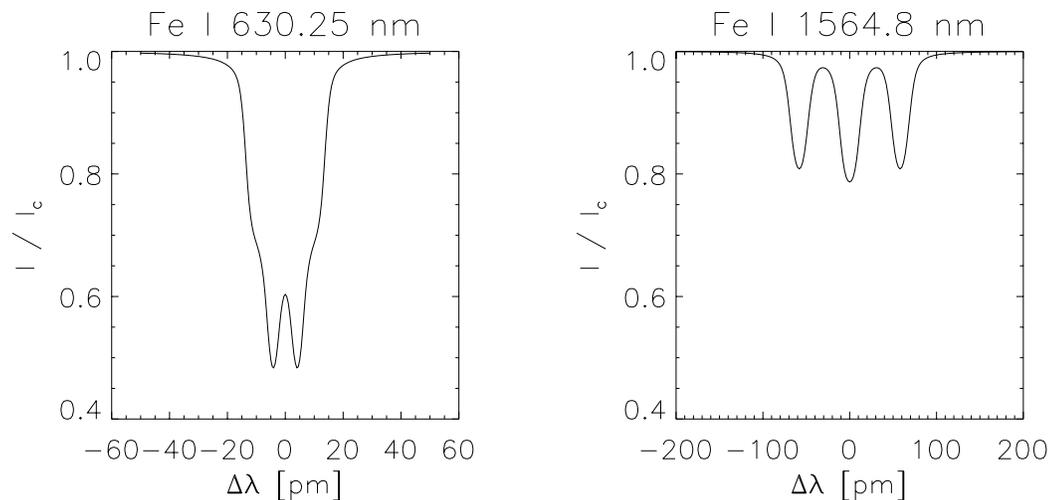


ABBILDUNG 7.1.: Intensitätsprofile der Spektrallinien Fe I 630.25 nm (*links*) und Fe I 1564.8 nm (*rechts*) in einem Magnetfeld von $B = 170$ mT mit einem Inklinationwinkel von 30° relativ zur Sichtlinie. Aufgetragen ist das Verhältnis I/I_c von absoluter Intensität zu Kontinuumsintensität.

(*links*) lediglich verbreitert ist und nur nahe der Linienmitte die beiden σ -Komponenten getrennt zu sehen sind. In Abb. 7.2 sind für das gleiche Atmosphärenmodell die Beitragsfunktionen für die Linieneinsenkung aufgetragen, die für jeden Wellenlängenpunkt die Beiträge der Absorption in der Atmosphäre als Funktion der optischen Tiefe τ beschreiben. Es zeigt sich, dass der Linienkern bei Fe I 630.25 nm in deutlich höheren Atmosphärenschichten ($\log(\tau) \approx -2$) entsteht als bei der Infrarotlinie ($\log(\tau) \approx -0.5$). Auch hier sieht man, dass die Zeeman-Komponenten der Infrarotlinie vollständig aufgespalten sind, während die σ - und π -Komponenten bei der Linie Fe I 630.25 nm teilweise überlappen. Diese unterschiedliche Form der Beitragsfunktionen liegt vor allem in der Wellenlänge und des Anregungspotentials der beiden unteren Niveaus begründet:

Wellenlänge Die Wellenlängenaufspaltung (2.16) durch den Zeeman-Effekt ist proportional zu λ^2 , die Doppler-Verbreiterung (3.14) einer Spektrallinie nur proportional zu λ . Aus diesem Grund sind die drei Zeeman-Komponenten der Linie Fe I 1564.8 nm viel deutlicher voneinander getrennt als bei der Linie im sichtbaren Wellenlängenbereich. Man beachte, dass das Wellenlängenintervall in Abb. 7.2 *links* 80 pm, *rechts* dagegen 400 pm beträgt.

Anregungspotential Neben der Wellenlänge ist das wichtigste Unterscheidungsmerkmal zwischen den beiden betrachteten Linien ihr unterschiedliches Anregungspotential χ . Für Fe I 630.25 nm beträgt es $\chi_1 = 3.69$ eV, für Fe I 1564.8 nm dagegen $\chi_2 = 5.43$ eV. Das Anregungspotential geht in den Linienabsorptionskoeffizienten (3.16) über einen Term $\exp(-\chi/kT)$ ein. Dieser Faktor im Linienabsorptionskoeffizienten ist für die Linie Fe I 630.25 nm um den Faktor $a_\chi = \exp((\chi_2 - \chi_1)/kT)$ stärker als für Fe I 1564.8 nm. Für $T = 5000$ K ist $a_\chi = 56.7$. Zusammen mit den unterschiedlichen Oszillatorenstärken der beiden Linien ergibt sich damit für die sichtbare Linie ein Linienabsorptionskoeffizient, der um den Faktor 10 – 15 höher ist als der der Infrarotlinie, was

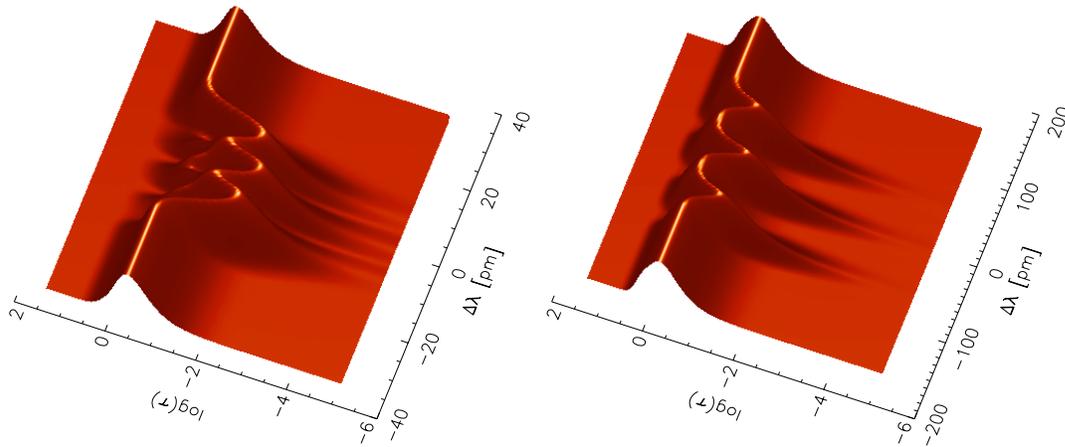


ABBILDUNG 7.2.: Beitragsfunktionen für die Linieneinsenkung von Stokes-I für die beiden Linien Fe I 630.25 nm (*links*) und Fe I 1564.8 nm (*rechts*). Dargestellt sind die Beiträge in Abhängigkeit der Wellenlänge und der optischen Tiefe $\log(\tau)$ in der Atmosphäre. Das Kontinuum wird um $\tau = 2/3$ bzw. $\log(\tau) = -0.18$ gebildet (gut erkennbar außerhalb der Spektrallinien). Die Infrarotlinie rechts im Bild entsteht wegen ihres höheren Anregungspotentials näher am Kontinuum und über einen kleineren Bereich in der optischen Tiefe als die Linie bei $\lambda = 630.25$ nm.

dazu führt, dass die Linieneinsenkung für die Linie Fe I 630.25 nm größer ist als für die Linie Fe I 1564.8 nm.

Die verschiedenen Entstehungshöhen der beiden Linien sind durch die Temperaturabhängigkeit des Linienabsorptionskoeffizienten begründet. Der unterschiedliche Verlauf von $\kappa_\lambda(T)$ wird vor allem durch das Anregungspotential gesteuert: Für ein größeres Anregungspotential χ ist eine höhere Temperatur nötig, um den gleichen Wert für κ_λ zu erhalten. Für die Infrarotlinie hat das zur Folge, dass diese Linie, verglichen mit der Linie Fe I 630.25 nm, größere Beiträge in tiefen Schichten der Atmosphäre hat, in denen die Temperatur höher ist.

7.2. Verhältnisse von Zeeman-Aufspaltung und Doppler-Verschiebung

Asymmetrische Stokes-V-Profile entstehen in Gegenwart von Gradienten bzw. Diskontinuitäten in den Projektionen des Geschwindigkeitsfelds *und* des Magnetfeldes auf die Sichtlinie. Bettet man eine Flussröhre oder eine strömende Schicht, in der das Plasma mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} entlang der Röhre fließt, in eine ruhende magnetische Atmosphäre ein, wird in diesem Bereich das Absorptionsprofil einer Spektrallinie mit Ruhewellenlänge λ_0 um $\Delta\lambda_D = \lambda_0 v/c$ verschoben, wobei v die Sichtlinienkomponente von \mathbf{v} ist. Das Spektrum des oben aus der strömenden Schicht austre-

tenden Lichts ist abhängig vom Verhältnis der Linienabsorptionskoeffizienten κ in und *unterhalb* der Schicht durch eine Kombination der Absorptionsprofile beider Schichten geprägt. Dieses Licht pflanzt sich nun weiter in einer Atmosphärenschicht fort, in der das Absorptionsprofil unverschoben ist. Die Beiträge einer Flussröhre sind vor allem dann sichtbar, wenn die Maxima der Beiträge der Röhre spektral deutlich von denen des Hintergrunds verschieden sind, also in den Flügeln des unverschobenen Profils liegen. Wichtig ist dabei auch die Linienstärke: Wenn der Linienabsorptionskoeffizient sehr hoch ist, kann dies dazu führen, dass die beiden Maxima zu einem breiten Maximum verschmelzen.

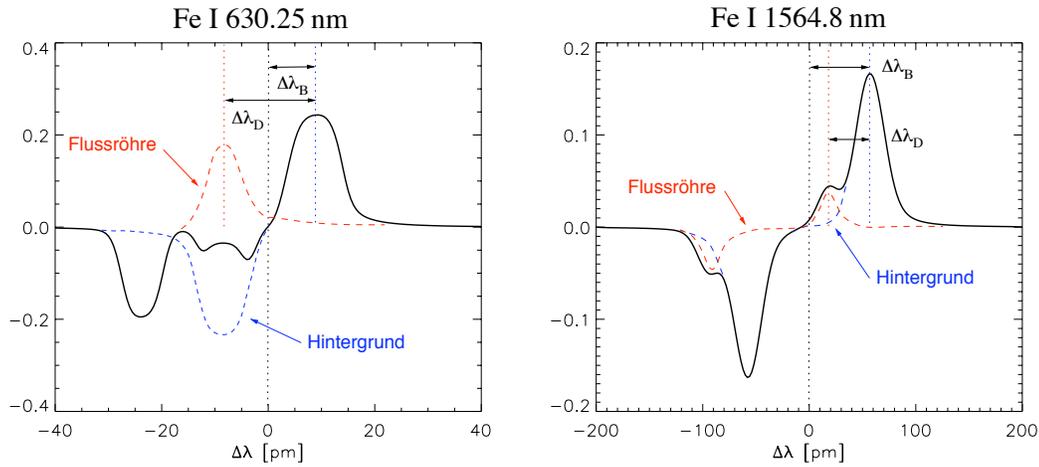


ABBILDUNG 7.3.: Stokes-V-Profile der beiden Linien Fe I 630.25 nm (*links*) und Fe I 1564.8 nm (*rechts*) für eine Atmosphäre mit magnetischer Flussröhre (Strömungsgeschwindigkeit $|\mathbf{v}| = 12$ km/s) und eine einheitliche Magnetfeldstärke des Hintergrunds und der Flussröhre von $B = 170$ mT. Der heliozentrische Winkel beträgt $\theta = 35^\circ$. Die Doppler-Verschiebung $\Delta\lambda_D$ ist linear in der Wellenlänge λ , die Zeeman-Aufspaltung $\Delta\lambda_B$ dagegen proportional zu λ^2 . Im sichtbaren Wellenlängenbereich ist dadurch die spektrale Komponente der Flussröhre so stark gegenüber der des Hintergrunds verschoben, dass zwei Flügel verschiedener Polarität der beiden Absorptionsprofile bei gleicher Wellenlänge liegen und ein stark asymmetrisches Stokes-V-Profil entsteht. Im Infraroten ist dagegen das Verhältnis aus Doppler-Verschiebung und Zeeman-Aufspaltung fast immer kleiner als Eins, so dass die Flussröhrenkomponente als Nebenmaximum in der Flanke des Hintergrundprofils zu sehen ist.

Vergleichen wir für die beiden Linien Fe I 630.25 nm (1) und Fe I 1564.8 nm (2) das Verhältnis $\Delta\lambda_D/\Delta\lambda_B$ aus Doppler-Verschiebung und Zeeman-Aufspaltung für eine Situation in der mittleren Penumbra ($|\mathbf{v}| = 12$ km/s, $B = 170$ mT). Wir nehmen in diesem Beispiel an, dass die Magnetfeldstärke in der Flussröhre die gleiche ist wie die des Hintergrunds und die Flussröhre waagrecht in der Atmosphäre liegt. Man erhält für die Doppler-Verschiebung der beiden Linien bei Beobachtung unter dem heliozentrischen Winkel θ

$$\Delta\lambda_{D,1} = 25 \text{ pm} \cdot \sin \theta, \quad \Delta\lambda_{D,2} = 63 \text{ pm} \cdot \sin \theta, \quad (7.1)$$

und für die Zeeman-Aufspaltung

$$\Delta\lambda_{B,1} = 7.9 \text{ pm}, \quad \Delta\lambda_{B,2} = 58 \text{ pm}. \quad (7.2)$$

Für die Verhältnisse ergibt sich damit im ersten Fall $\Delta\lambda_{D,1}/\Delta\lambda_{B,1} = 3.16 \cdot \sin\theta$ und im zweiten Fall $\Delta\lambda_{D,2}/\Delta\lambda_{B,2} = 1.09 \cdot \sin\theta$. Wählt man z. B. $\theta = 35^\circ$, ergibt sich $\Delta\lambda_{D,1}/\Delta\lambda_{B,1} = 1.81$ und $\Delta\lambda_{D,2}/\Delta\lambda_{B,2} = 0.63$. Diese Situation ist in Abb. 7.3 illustriert. Man erkennt, dass die Absorptionsprofile der Flussröhre im sichtbaren Wellenlängenbereich spektral vollständig am Absorptionsprofil der Hintergrunds „vorbeigeschoben“ sind, während bei der Infrarotlinie die Maxima der Profile der Flussröhrenkomponente in der Flanke der Hintergrundprofile zu liegen kommen. Dieser Effekt ist wichtig zum Verständnis der Mitte-Rand-Variation der NCP, auf die wir im Abschnitt 7.5 eingehen werden.

7.3. Berechnung von Stokes-V-Profilen in der Penumbra

Nachdem in Abschnitt 6.3.2 beschrieben wurde, wie eine magnetische Flussröhre in das Hintergrundmodell eines Sonnenflecks eingebettet wird, können wir nun einen Sehstrahl durch einen beliebigen Punkt der Penumbra legen und die physikalischen Parameter der Atmosphäre entlang des Sehstrahls auf ein Gitter von Punkten in der optischen Tiefe interpolieren. Abb. 7.5 am Ende dieses Abschnitts zeigt exemplarisch den Verlauf der atmosphärischen Parameter als Funktion des Logarithmus der optischen Tiefe τ für einen Sehstrahl durch die mittlere randseitige Penumbra bei einem heliozentrischen Winkel von $\theta = 30^\circ$. Am Verlauf der Geschwindigkeit erkennt man, dass die magnetische Flussröhre im Intervall $\log(\tau) \in [-1.0, -0.5]$ liegt. Das Plasma strömt in diesem begrenzten Bereich mit einer Sichtliniengeschwindigkeit von $v = 4.5$ km/s vom Betrachter weg. Die Absolutgeschwindigkeit des Plasmas an dieser Stelle beträgt $|\mathbf{v}| \approx 12$ km/s. Man erkennt, dass die Magnetfeldstärke in der Röhre sich in nur unwesentlich von der des Hintergrunds unterscheidet und entsprechend auch der Gasdruck in Röhre und Hintergrund sehr ähnlich ist. Dagegen ändern sich die Inklination und der Azimutwinkel des Magnetfelds für den Beobachter abrupt beim Eintritt in die Flussröhre (siehe dazu die Bemerkung im nächsten Abschnitt). Inklinationswinkel von $\gamma < 90^\circ$ bedeuten hier, dass das Magnetfeld eine Komponente in Richtung des Beobachters besitzt, $\gamma > 90^\circ$ bezeichnet die Situation, dass die Projektion des Magnetfeldvektors auf die Sichtlinie vom Beobachter weg zeigt. Bei der Beobachtung von Flussröhren in der randseitigen Penumbra kommt es zu einem Polaritätswechsel des Magnetfelds, wie er hier skizziert ist, wenn die Summe aus dem heliozentrischen Winkel θ und dem Neigungswinkel des Hintergrundfelds gegenüber der Sonnenoberfläche kleiner als 90° , die Summe aus θ und dem Inklinationswinkel der Flussröhre dagegen größer als 90° ist. In dieser Konstellation entstehende Stokes-V-Profile sind im nächsten Abschnitt in Abb. 7.4 dargestellt ($\theta \geq 30^\circ$).

7.3.1. Bemerkung zur Divergenzfreiheit des Magnetfeldes

Um die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes zu gewährleisten, muss die Normalkomponente des Magnetfelds an der Grenzschicht zwischen Flussröhre und Hintergrund stetig sein. Wenn wir in diesem Zusammenhang von einer „Diskontinuität“ in der Richtung des Magnetfelds sprechen, ist damit eine stetige Änderung der Feldrichtung innerhalb einer Grenzschicht endlicher Ausdehnung gemeint, deren geometrische Dicke im Anhang A.3 auf 3 – 10 km abgeschätzt wird. Bei der Konstruktion von Sehstrahlen nehmen wir an, dass die Linienbeiträge in dieser Schicht geringer optischer Dicke, in der die Aufweitung des Hintergrundfelds geschieht, vernachlässigbar sind. Abb. 7.4 skizziert den Verlauf der Magnetfeldlinien um eine Flussröhre herum.

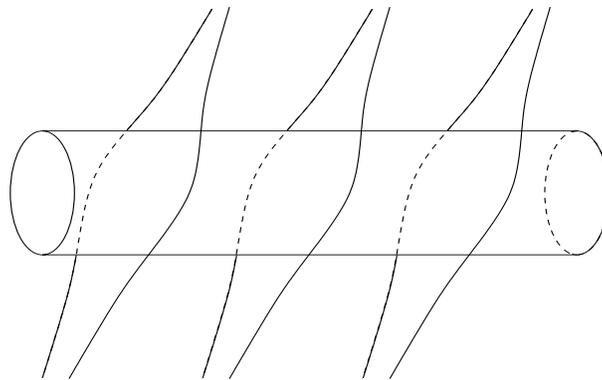


ABBILDUNG 7.4.: Skizze der Feldlinien des Hintergrundmagnetfelds in der Umgebung einer magnetischen Flussröhre. Da die Normalkomponente des Magnetfelds stetig ist, ändert sich die Feldrichtung innerhalb einer Grenzschicht endlicher Dicke.

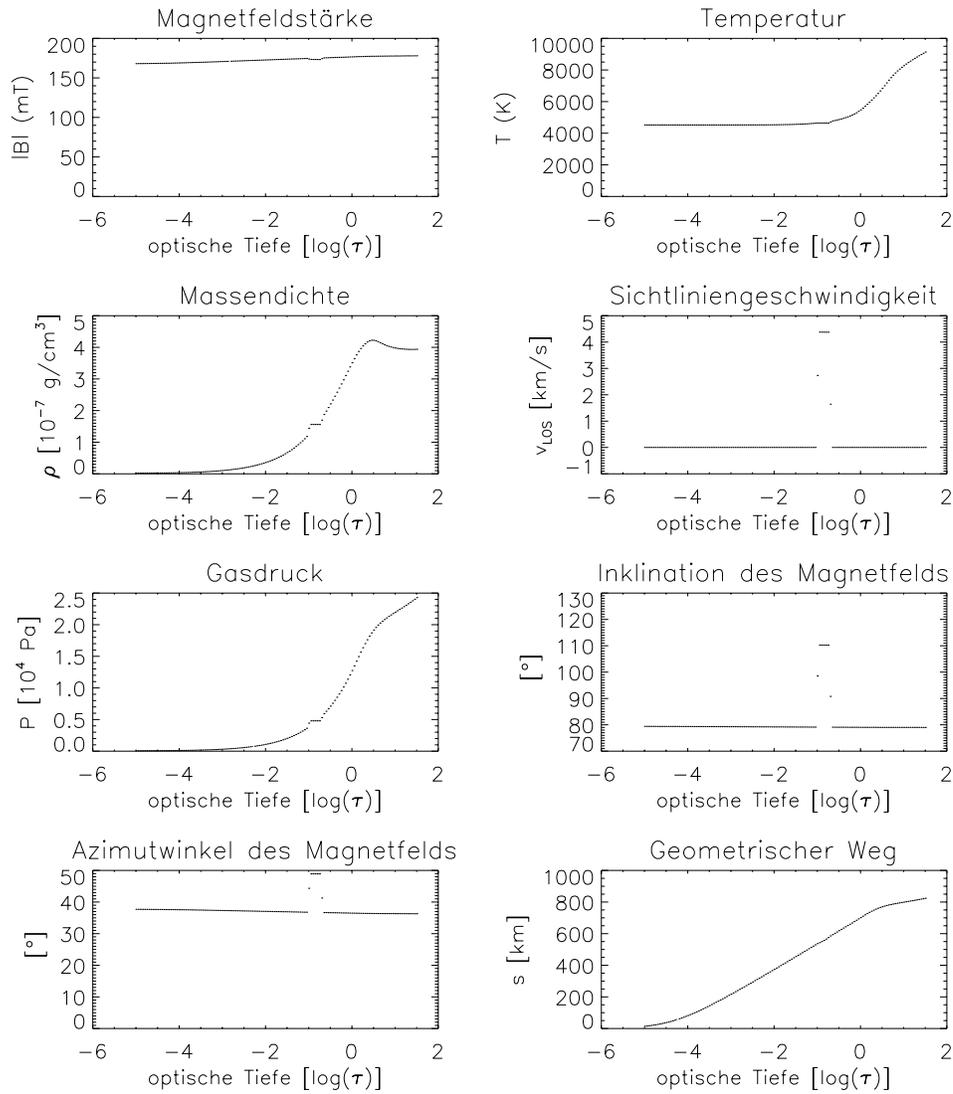


ABBILDUNG 7.5.: Physikalische Parameter entlang des Sehstrahls beim Blick durch eine magnetische Flussröhre in der Penumbra (radiale Position: $r = 12000$ km, heliozentrischer Winkel $\theta = 30^\circ$, Azimutwinkel im Sonnenfleck $\psi = 45^\circ$). Die Darstellung *rechts unten* stellt eine Beziehung zwischen optischer Tiefe und geometrischem Weg entlang des Sehstrahls her. Als Nullpunkt wurde eine Höhe von 300 km oberhalb von $\tau = 1$ in der Penumbra gewählt, in der die optische Tiefe $\tau = 10^{-6}$ beträgt.

7.4. Mitte-Rand-Variation von Stokes-V-Profilen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die Form der Stokes-V-Profile in Abhängigkeit von der Position des Sonnenflecks auf der Sonne ändert (*Mitte-Rand-Variation*). Die Motivation dabei ist, dass sich bei der Variation des Sichtwinkels die Orientierung des Magnetfelds relativ zum Beobachter und die Projektion der Strömungsgeschwindigkeit auf die Sichtlinie ändert und man so den Einfluss von Strömungskanälen auf die Form der Stokes-V-Profile untersuchen kann.

Wir betrachten dazu Profile in der mittleren Penumbra entlang einer gedachten Linie durch Sonnenmitte und Fleckmitte, wobei Sichtlinie und Flussröhrenachse sich in einer Ebene befinden. Die Flussröhre liegt an dieser Stelle nahezu waagrecht in der Atmosphäre. Profile der *randseitigen* Penumbra werden mit Winkeln $\theta > 0$ bezeichnet, die der Zentrumsseite mit $\theta < 0$ (θ : heliozentrischer Winkel). In Abb. 7.6 sind Stokes-V-Profile an einer festen radialen Position in der Penumbra ($r = 12000$ km) für verschiedene Winkel θ aufgetragen. Unterlegt sind die Profile, die sich für das gleiche Atmosphärenmodell *ohne* Flussröhre ergeben (*gepunktete Linien*). Die hier gezeigten synthetischen Profile sind ohne Berücksichtigung von Makroturbulenz und instrumenteller Verbreiterung berechnet worden und müssen zum Vergleich mit Beobachtungen mit den entsprechenden Verbreiterungsfunktionen gefaltet werden.

Die Beiträge der Flussröhre sind in der Infrarotlinie als Nebenmaxima des Hintergrundprofils zu erkennen, die in der Wellenlänge proportional zur Sichtliniengeschwindigkeit $v = |\mathbf{v}| \cdot \sin \theta$ verschoben sind. In der randseitigen Penumbra wechselt das Hintergrundfeld bei $\theta \approx 30^\circ$ die Polarität. Die Punktmenge in der Penumbra, für die das Hintergrundfeld senkrecht zum Sehstrahl ist, wird auch als „magnetische Neutrallinie“ bezeichnet und zeichnet sich durch stark asymmetrische Stokes-V-Profile aus, wie sie auch in Abb. 7.6 um $\theta = 35^\circ$ herum zu sehen sind.

In den Stokes-V-Profilen der Linie Fe I 630.25 nm ist der Einfluss einer Flussröhre auch zu erkennen, aber nicht durch deutlich getrennte spektral verschobene Anteile wie bei der Infrarotlinie, sondern in Form von mitunter extrem asymmetrischen Profilen. Ein Blick auf Abb. 7.2 lässt erkennen, dass die Linie Fe I 630.25 nm auch oberhalb von $\log(\tau) = -1$, wo der obere Rand der Flussröhre liegt, große Beiträge besitzt und deshalb die spektrale Signatur des Strömungskanals nach der Durchquerung der darüberliegenden Atmosphärenschichten nur noch teilweise vorhanden ist.

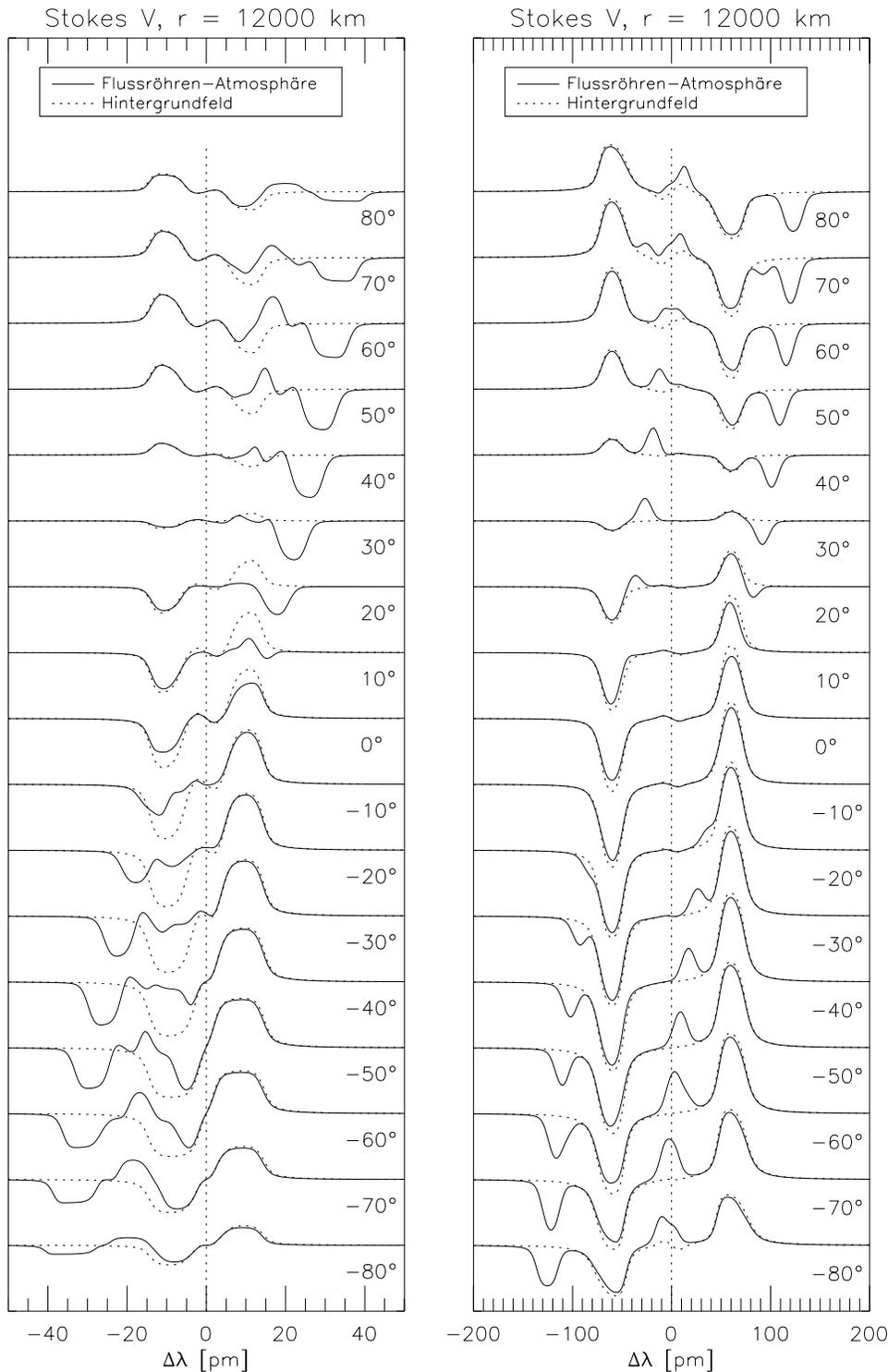


ABBILDUNG 7.6.: Mitte-Rand-Variation der Stokes-V-Profile in der mittleren Penumbra ($r = 12000$ km) für die beiden Linien Fe I 630.25 nm (*links*) und Fe I 1564.8 nm (*rechts*). Negative Winkel bezeichnen die zentrumsseitige Penumbra, positive Winkel die Randseite. *Durchgezogene Linien*: Penumbra-Modell mit Flussröhre, *gepunktete Linien*: Profile des Hintergrundfelds ohne Flussröhre. Der vertikale Abstand zwischen zwei Profilen entspricht auf der linken Seite einem Stokes-V-Signal von 30% der Kontinuumsintensität, auf der rechten Seite sind es 15%. Der spektrale Beitrag der Flussröhre ist besonders gut im Infraroten zu erkennen. Die abgeplattete Form der Profile von Fe I 630.25 nm um $\theta = -60^\circ$ herum weist darauf hin, dass die Linie für diese Blickwinkel sättigt.

7.5. Mitte-Rand-Variation der NCP

Aus den im letzten Abschnitt berechneten Profilen können wir jetzt durch Integration über die Wellenlänge die Netto-Zirkularpolarisation berechnen und erhalten so ein Maß für die Asymmetrie von Stokes-V-Profilen als Funktion des heliozentrischen Winkels. Ein Verständnis solcher NCP-Kurven kann dazu beitragen, aus Beobachtungen Rückschlüsse auf Strömungsgeschwindigkeiten zu ziehen und die Unterschiede zwischen Beobachtungen in verschiedenen Wellenlängen richtig zu interpretieren.

Wir betrachten dazu wie in Abschnitt 7.4 Profile in der mittleren Penumbra entlang einer gedachten Linie durch Sonnenmitte und Fleckmitte. Der Verlauf der NCP als Funktion von $\mu = \cos(\theta)$ ist in Abb. 7.7 dargestellt.

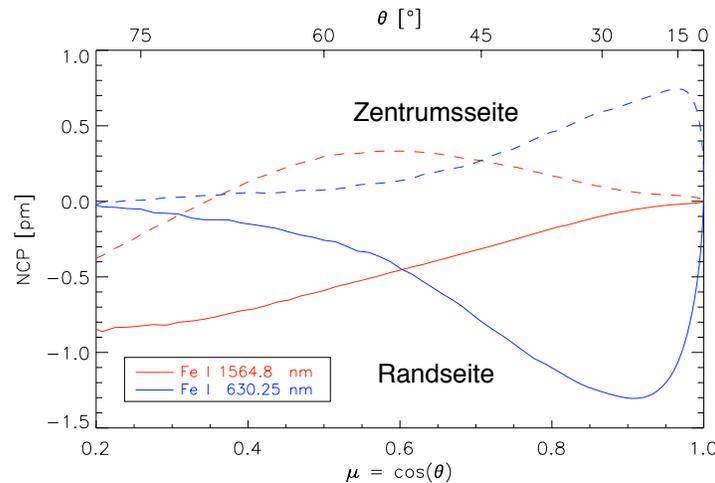


ABBILDUNG 7.7.: Mitte-Rand-Variation der NCP für die beiden Linien Fe I 630.25 nm und Fe I 1564.8 nm. Die durchgezogenen Kurven beschreiben die Asymmetrie der Profile auf der randseitigen Penumbra, die gepunkteten die der Zentrumsseite.

Als erstes fällt auf, dass die NCP-Kurven von Zentrums- und Randseite nicht symmetrisch sind, was daran liegt, dass die Orientierung des Magnetfelds zum Beobachter auf beiden Seiten des Sonnenflecks unterschiedlich ist. Auf der Randseite kann das Hintergrundfeld für den Beobachter je nach heliozentrischem Winkel und radialer Position in der Penumbra die Polarität wechseln, was auf der Zentrumsseite nicht möglich ist.

Die Form der NCP-Kurven ist für Fe I 630.25 nm und Fe I 1564.8 nm eine völlig andere: $N_1 = N(\text{Fe I } 630.25 \text{ nm})$ erreicht ihre Extrema auf beiden Seiten der Penumbra bereits für kleine heliozentrische Winkel ($\theta = 15^\circ$ auf der Zentrumsseite, $\theta = 23^\circ$ auf der Randseite) und fällt für größere Winkel vom Betrag her monoton. $N_2 = N(\text{Fe I } 1564.8 \text{ nm})$ hingegen nimmt nahe Sonnenmitte sehr kleine Werte an und erreicht ihr Extremum auf der Randseite erst für heliozentrische Winkel nahe $\theta = 90^\circ$. Auf der Zentrumsseite ist N_2 bei etwa $\mu = 0.55$ ($\theta \approx 57^\circ$) maximal und wechselt für große θ sogar das Vorzeichen. Die Amplitude von N_1 ist auf der Zentrumsseite von Sonnenmitte bis zu einem heliozentrischen Winkel von $\theta = 45^\circ$ größer als die von N_2 , auf der Randseite bis zu einem Winkel von $\theta = 53^\circ$. Die beiden wichtigsten Linienparameter, die

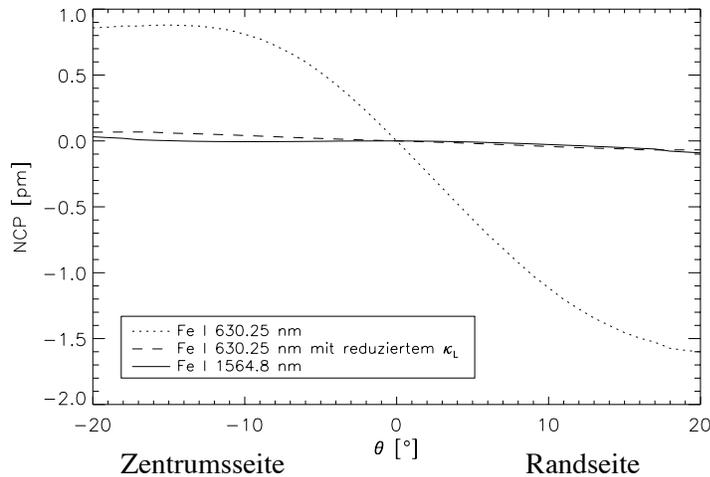


ABBILDUNG 7.8.: Mitte-Rand-Variation der NCP nahe Sonnenmitte: Der Grund für den unterschiedlich steilen Verlauf der NCP-Kurven von Fe I 1564.8 nm und Fe I 630.25 nm ist die Größe des Linienabsorptionskoeffizienten κ_L . Die gestrichelte Linie zeigt die NCP für eine artifizielle Spektrallinie mit dem Linienabsorptionskoeffizienten κ_L der Infrarotlinie und den übrigen Linienparametern der Linie Fe I 630.25 nm.

dieses unterschiedliche Verhalten hervorrufen, sind das Anregungspotential und die Wellenlänge. Das Anregungspotential beeinflusst die Stärke einer Spektrallinie (siehe (3.16) und (3.18)). Ist der Linienabsorptionskoeffizient groß, wie im Falle von Fe I 630.25 nm, sättigt der Linienkern und die Asymmetrie des Stokes-Profiles nimmt zu. So lässt sich der Verlauf der NCP-Kurven nahe Sonnenmitte verstehen: Schon für kleine θ spielen Sättigungseffekte bei Fe I 630.25 nm eine wichtige Rolle, während die schwächere Infrarotlinie davon unbeeinflusst ist. Zur Überprüfung dieses Effekts wurde die NCP einer hypothetischen Spektrallinie berechnet, die bis auf das Anregungspotential mit der Linie Fe I 630.25 nm identisch ist. Dieses wurde so gewählt, dass der resultierende Linienabsorptionskoeffizient κ_L mit dem der Infrarotlinie übereinstimmt. Abb. 7.8 zeigt das Ergebnis: Wäre die Linie Fe I 630.25 nm so schwach wie die Infrarotlinie, verlief N_2 nahe Sonnenmitte wie N_1 . Die verbleibende Differenz in der NCP zwischen der hypothetischen Spektrallinie und der Linie Fe I 1564.8 nm ist auf die Unterschiede in der Wellenlänge und im Landé-Faktor zurückzuführen.

Wie in Abschnitt 7.2 erläutert wurde, entstehen stark asymmetrische Stokes-V-Profile, wenn ein Flügel des Profils der Flussröhrenkomponente durch Doppler-Verschiebung zu einer Wellenlänge verschoben wird, bei der ein Flügel des Profils der Hintergrundkomponente liegt. Abhängig von der Wellenlänge wird der Punkt, an dem $\Delta\lambda_D/\Delta\lambda_B = 1$ ist, für verschieden große heliozentrische Winkel erreicht. Nach (7.1) und (7.2) ergibt sich für diese Winkel $\theta_1 = 18,4^\circ$ für Fe I 630.25 nm und $\theta_2 = 66,6^\circ$ für Fe I 1564.8 nm. Zu diesem Effekt kommt noch ein negativer Beitrag dadurch, dass die Amplitude des Stokes-Profiles mit dem heliozentrischen Winkel variiert.¹ Dieser Beitrag führt bei der Infrarotlinie dazu, dass die in Abb. 7.7 aufgetragene NCP-Kurve auf

¹Blickt der Beobachter parallel zu den Magnetfeldlinien, ist das Stokes-V-Signal des Hintergrundmagnetfelds maximal (reiner longitudinaler Zeeman-Effekt). Diese Situation wird nur in der zentrumsseitigen Penumbra erreicht.

der Zentrumsseite für Winkel $\theta > 40^\circ$ wieder fällt und für sehr große θ sogar das Vorzeichen wechselt. Bei der NCP-Kurve der Linie Fe I 630.25 nm verschieben sich dadurch die Extrema von $\theta_1 = 18.4^\circ$ zu 15° auf der Zentrumsseite und 23° auf der Randseite. Bei großen heliozentrischen Winkeln ist dieser Effekt für diese Linie weniger wichtig, da hier die Flussröhrenkomponente spektral vollständig an der Hintergrundkomponente vorbeigeschoben ist (siehe Abschnitt 7.2) und deshalb die Asymmetrie sehr klein ist.

7.6. Stokes-V-Profile für verschiedene radiale Positionen

Nachdem wir Stokes-Profile bislang für eine Position in der mittleren Penumbra berechnet haben, sollen nun noch bei festem heliozentrischen Winkel Profile für verschiedene Positionen *entlang* einer Flussröhre betrachtet werden. In der inneren Penumbra, wo der Fußpunkt der Flussröhre die Photosphäre erreicht, ändert sich die Neigung der Röhre und die thermodynamischen Größen innerhalb einer räumlichen Skala, die klein gegenüber der räumlichen Auflösung heutiger Polarimeter im infraroten Wellenlängenbereich ist (die pixel-begrenzte Auflösung des *Tenerife Infrared Polarimeters* beträgt $0.8'' \approx 600$ km). Aus diesem Grund ist es schwierig, die berechneten Profile für die innere Penumbra direkt mit Beobachtungen zu vergleichen. Abb. 7.9 zeigt Stokes-V-Profile für verschiedene radiale Positionen in der zentrumsseitigen Penumbra bei einem heliozentrischen Winkel von $\theta = -30^\circ$. Man erkennt an der erhöhten Amplitude des Stokes-V-Profils bei $r \approx 9700$ km, dass das aufsteigende Plasma der Flussröhre hier dem Beobachter direkt entgegen strömt (reiner longitudinaler Zeeman-Effekt). Auf dem Weg nach außen wird das nun horizontal strömende Plasma stark beschleunigt und erreicht bereits für $r > 11000$ km supersonische Geschwindigkeit. In den Profilen der Linie Fe I 1564.8 nm ist der Strömungskanal in Form eines rotverschobenen Nebenmaximums und -minimums zu erkennen. Aus der spektralen Verschiebung der Flussröhrenkomponente lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit abschätzen, und wir erhalten z. B. für $r = 12300$ km mit $\Delta\lambda_D = 34$ pm eine Geschwindigkeit von $|\mathbf{v}| = \Delta\lambda \cdot c / (\lambda_0 \cdot \sin \theta) \approx 13$ km/s, in Übereinstimmung mit der simulierten Geschwindigkeit des Plasmas an dieser Stelle der Flussröhre von $|\mathbf{v}| = 12950$ m/s. Bei den stark asymmetrischen Stokes-V-Profilen von Fe I 630.25 nm (siehe dazu auch Abschnitt 7.4) lässt sich nicht so verfahren. Hier kann es sinnvoll sein, die spektrale Verschiebung der σ - und π -Komponenten in der Linearpolarisation $P = \sqrt{Q^2 + U^2}$ zu betrachten (in Abb. 7.9 gepunktet gezeichnet): Man erkennt bei $\Delta\lambda = 0$ mit sehr kleiner Amplitude die unverschobene π -Komponente des Hintergrunds und bei $\Delta\lambda_D = -14$ pm die rotverschobene π -Komponente der Flussröhre. Daraus lässt sich auch aus den Profilen dieser Linie eine Strömungsgeschwindigkeit von $|\mathbf{v}| \approx 13$ km/s bestimmen.

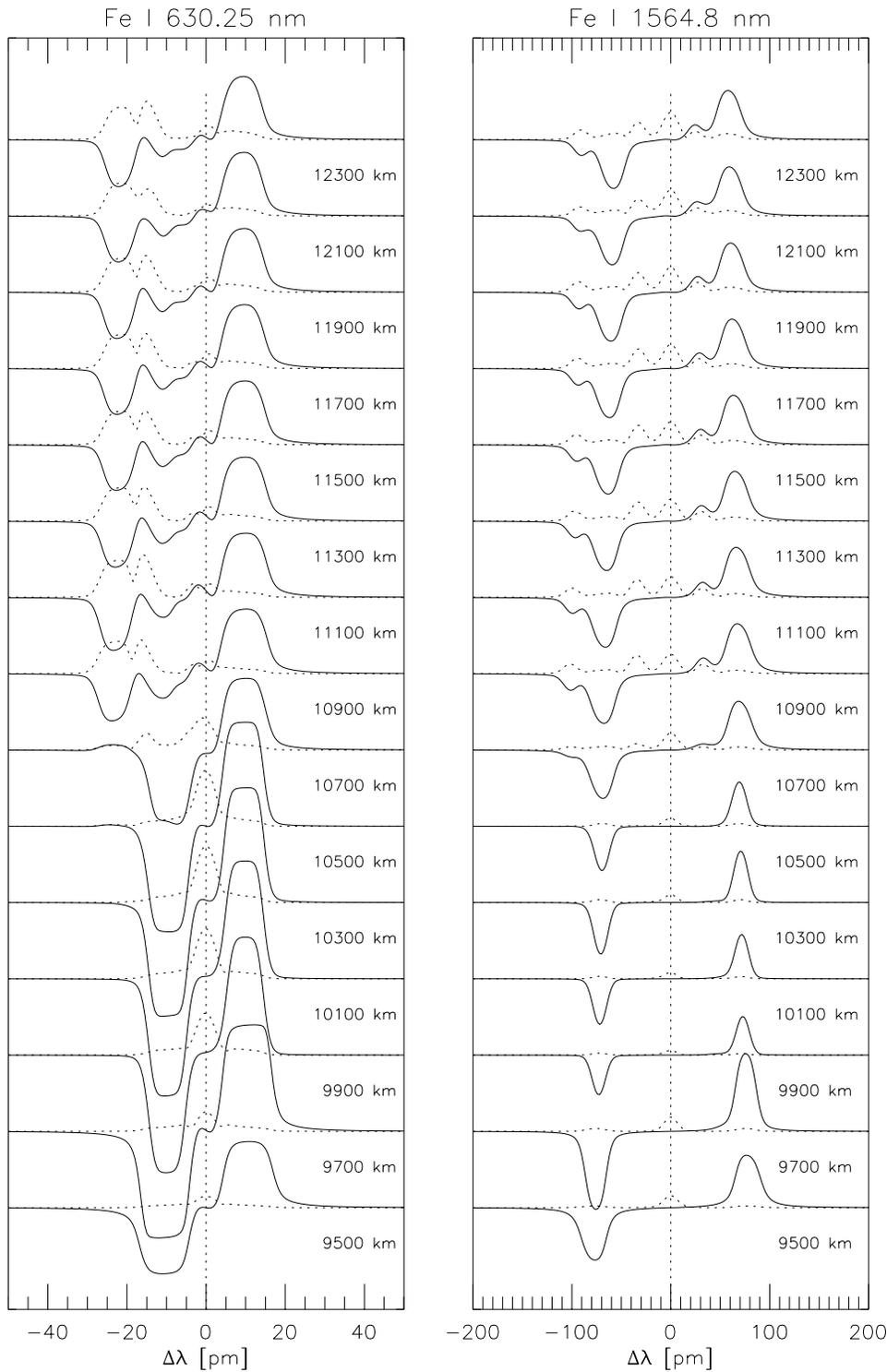


ABBILDUNG 7.9.: Stokes-V-Profile für verschiedene radiale Positionen in der zentrumsseitigen Penumbra bei einem heliozentrischen Winkel von $\theta = -30^\circ$. *Durchgezogene Linien:* Stokes-V, *gepunktete Linien:* Linearpolarisation, $P = \sqrt{Q^2 + U^2}$. Die Profile auf der rechten Seite sind zur besseren Sichtbarkeit mit doppelter Amplitude aufgetragen. Bei $r \approx 9700$ km strömt das aufsteigende Plasma der Flussröhre dem Beobachter entgegen. Der vertikale Abstand zwischen zwei Profilen entspricht auf der linken Seite einem Stokes-V-Signal von 30% der Kontinuumsintensität, auf der rechten Seite sind es 15%.

7.7. Mitte-Rand-Variation der NCP: Ein vereinfachtes Modell

Um besser zu verstehen, wie sich die verschiedenen Parameter eines Penumbra-Modells mit einer magnetischen Flussröhre – wie z. B. die Neigung der Röhre und ihre vertikale Lage in der Atmosphäre – auf die entstehenden Linienprofile auswirken, wollen wir in diesem Abschnitt ein vereinfachtes Modell zu betrachten, mit dem wir den Einfluss einzelner Parameter einer magnetischen Flussröhre auf die Mitte-Rand-Variation der NCP studieren können. Die Abhängigkeit der Asymmetrie von Stokes-V-Profilen von Strömungskanälen in der Penumbra wurde mit dieser Art von Modellen zuerst von Solanki & Pahlke (1988) und Solanki & Montavon (1993) untersucht. Das im folgenden betrachtete Modell (Abb. 7.10) entspricht der geometrischen Konfiguration, die von Martínez Pillet (2000b) verwendet wird.

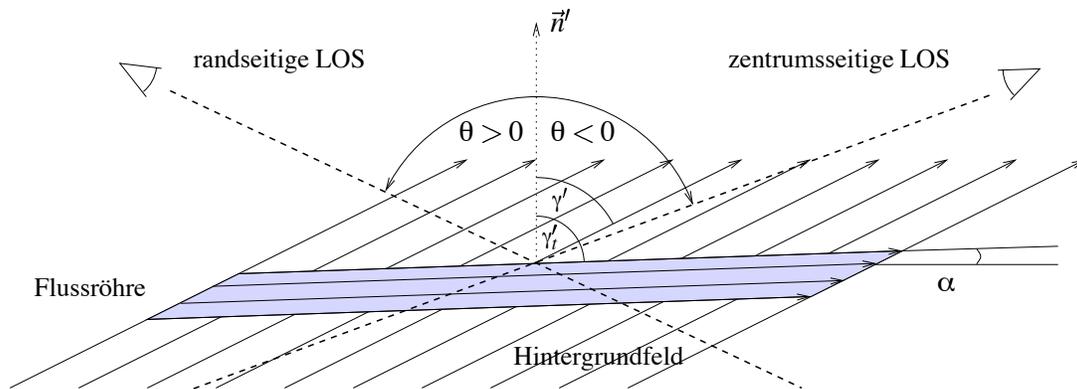


ABBILDUNG 7.10.: Skizze des vereinfachten Modells einer penumbralen magnetischen Flussröhre in einem Hintergrundmagnetfeld. Die Magnetfeldrichtung und Strömungsgeschwindigkeit relativ zur Sichtlinie des Beobachters (LOS) hängt vom Neigungswinkel $\gamma'_t = 90^\circ - \alpha$ der Flussröhre und der Inklination γ' des Hintergrundfelds ab, außerdem vom heliozentrischen Winkel θ . Dabei muss unterschieden werden, ob die randseitige oder die zentrumsseitige Penumbra betrachtet wird.

Wir wollen mit dieser Parameterstudie erörtern, wie die Neigung einer Flussröhre den Nulldurchgang der NCP beeinflusst, und beschreiben, wie sich die NCP in Abhängigkeit der vertikalen Position einer Flussröhre in der Atmosphäre ändert. Dabei ist anzumerken, dass die Entstehung von Spektrallinien in der Atmosphäre ein in hohem Maße nichtlinearer Prozess ist. Die Betrachtung der Netto-Zirkularpolarisation ermöglicht es, die Asymmetrie von Stokes-V-Profilen zu beschreiben, allerdings lassen sich verständlicherweise nicht alle Phänomene durch die Projektion auf eine Variable erfassen.

7.7.1. Isotherme Flussröhren in der mittleren Penumbra

Unser vereinfachtes zweidimensionales Modell (siehe Abb. 7.10) beinhaltet eine strömende Schicht, die in eine Hintergrundatmosphäre mit einem Magnetfeld konstanter Neigung und Stärke eingebettet ist. Ausgehend von dieser Konfiguration soll nun die spektrale Signatur von Strömungskanälen in der mittleren Penumbra untersucht werden. Diese Situation zeichnet sich dadurch aus, dass die Strömungsgeschwindigkeit in diesem Bereich der Penumbra sehr hoch ist und die Flussröhren nahezu waagrecht in der umgebenden Atmosphäre liegen. In unserem Modell

betrachten wir eine strömende Schicht von 100 km Dicke, die – anders als in der Arbeit von Martínez Pillet (2000b) – im Druck- und Temperatungleichgewicht mit der Umgebung ist. Die Magnetfeldstärke beträgt im Strömungskanal und im Hintergrund gleichermaßen $B = 170$ mT (ein typischer Wert für die mittlere Penumbra), für die Strömungsgeschwindigkeit wird, motiviert durch die Simulationen von Schlichenmaier et al. (1998), ein Wert von 12 km/s angenommen. Die Neigung des Hintergrundmagnetfelds gegenüber dem lokalen Normalenvektor beträgt $\psi = 60^\circ$. Die Oberkante der Flussröhre bzw. Stromschicht, die in diesem Abschnitt als Referenz dient, liegt 150 km oberhalb des lokalen $\tau = 1$ -Niveaus bei senkrechtem Einblick und damit etwa in der Höhe, in der die mit MHD-Rechnungen simulierte Flussröhre in der mittleren Penumbra liegt, die wir in den Abschnitten 7.3 und 7.4 betrachtet haben.

Abhängigkeit der NCP von der Inklination der Flussröhre

Die durch eine magnetische Flussröhre verursachte NCP hängt maßgeblich von der Projektion der Strömung auf die Sichtlinie ab. Martínez Pillet (2000b) führt Beobachtungen an, nach denen die NCP in der Penumbra von Sonnenflecken nicht in Sonnenmitte, sondern bei $\mu = \cos \theta = 0.96$ bzw. $\theta = 16^\circ$ verschwindet, und erklärt dies durch eine Strömung des gesamten Hintergrunds. Fehlergrenzen für den Winkel des Nulldurchgangs der NCP-Kurve gibt Martínez Pillet (2000b) jedoch nicht an. Ein Nulldurchgang der NCP bei einem Winkel $\theta_0 \neq 0^\circ$ lässt sich alternativ auch durch eine Neigung der Flussröhre um den Winkel $\alpha = \theta_0$ gegenüber der Horizontalen erklären, da dann die Strömung in der Röhre keine Komponente in Richtung des Beobachters besitzt und damit die Asymmetrie verschwindet (siehe Kap. 4.1). In Abb. 7.11 ist die berechnete NCP der Linie Fe I 630.25 nm nahe Sonnenmitte exemplarisch für verschiedene Inklinationenwinkel der Röhre gegenüber der Horizontalen als Funktion des heliozentrischen Winkels aufgetragen.

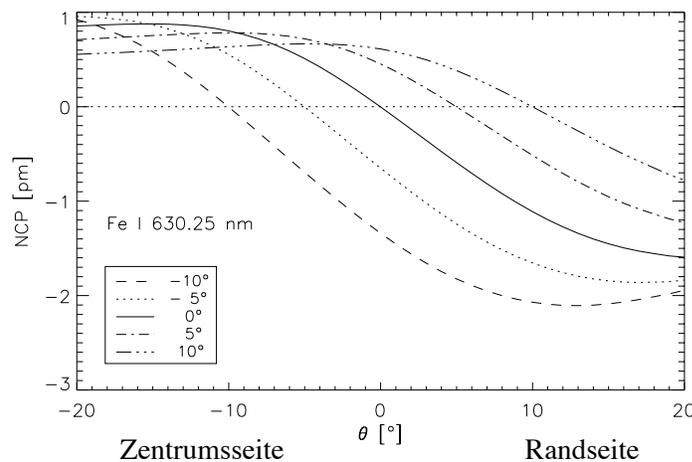


ABBILDUNG 7.11.: Nulldurchgang der NCP für verschiedene Inklinationenwinkel α der Flussröhre gegenüber der Horizontalen. Die Asymmetrie der Netto-Zirkularpolarisation ist genau dann Null, wenn die Projektion der Strömungsgeschwindigkeit auf die Sichtlinie verschwindet, also der Inklinationenwinkel α dem heliozentrischen Winkel θ entspricht.

Abb. 7.12 zeigt für drei verschiedene Inklinationen der Flussröhre die Mitte-Rand-Variation der NCP für die beiden Spektrallinien Fe I 630.25 nm und Fe I 1564.8 nm. Da hier die NCP gegen $\mu = \cos\theta$ aufgetragen ist, sind die unterschiedlichen Nulldurchgänge bei $\theta = 0^\circ$ und $\theta = 5^\circ$ nur schwer zu erkennen. Der in Abschnitt 7.5 beschriebene charakteristische Verlauf dieser Kurven hängt nicht stark von der Inklination ab, allerdings erkennt man, dass tendenziell die Asymmetrie schwächer wird, wenn man eine nach oben geneigte Röhre annimmt ($\alpha > 0$). Dies ist damit zu erklären, dass die Höhe der Diskontinuität in der Magnetfeldinklination $\Delta\gamma = \gamma'_i - \gamma'$ sinkt, die durch die Amplitude des Flussröhrenanteils der drei Zeeman-Komponenten zur Asymmetrie der Stokes-V-Profile beiträgt. Außerdem ist zu sehen, dass die NCP für eine nach unten geneigte Flussröhre ($\alpha < 0$) in der randseitigen Penumbra nahe Sonnenmitte steiler ansteigt als für eine waagrecht liegende Röhre, da in diesem Fall bereits für kleine heliozentrische Winkel eine signifikante Strömungskomponente in Richtung des Beobachters zeigt. Dies ist besonders gut bei der starken Linie Fe I 630.25 nm zu sehen, deren NCP eine große Variation für kleine heliozentrische Winkel aufweist.

Abhängigkeit der NCP von der Lage der Flussröhre in der Atmosphäre

Wie beeinflusst die vertikale Position einer magnetischen Flussröhre in der Atmosphäre die zu erwartende NCP? Man könnte vermuten, dass die Asymmetrie am stärksten ist, wenn der Strömungskanal in der Höhe liegt, in der die Beitragsfunktion des Linienprofils am größten ist, andererseits ändert sich durch die temperaturabhängige Opazität je nach Lage in der Atmosphäre die optische Dicke einer Flussröhre gegebenen Durchmessers.

Um den Leser nicht durch eine Überhäufung mit Kurven zu verwirren, sind die Mitte-Rand-Variationen der NCP für hoch und tief in der Atmosphäre liegende Flussröhren getrennt dargestellt. Abb. 7.13 zeigt die NCP-Kurven für Flussröhren, die deutlich oberhalb des lokalen $\tau = 1$ -Niveaus liegen. Dabei bezeichnen die Höhenangaben immer die Position des oberen Randes des Strömungskanals. Man erkennt, dass sich die Mitte-Rand-Variation der NCP einer Flussröhre in diesem Höhenbereich fast nicht ändert. Die *Entstehung* der beiden Spektrallinien ist so hoch in der Atmosphäre ($\log(\tau) < -2.5$) weitgehend abgeschlossen, durch den Strömungskanal wird hauptsächlich die *Form* des Stokes-V-Profiles und damit die Asymmetrie beeinflusst. Aus diesem Grund ist die NCP auch für eine hoch in der Atmosphäre liegende Flussröhre nicht Null, allerdings nicht mehr stark von deren genauer Position abhängig.

Ganz anders zeigt sich dagegen die Situation für einen tief in der Atmosphäre liegenden Strömungskanal. Abb. 7.14 zeigt, dass die entstehende Asymmetrie in Stokes-V auf der Randseite der Penumbra mit abnehmender Höhe des oberen Randes der Flussröhre stark zunimmt und erst für sehr tiefe Strömungen ($z < z(\tau = 1)$) wieder sinkt, während die NCP auf der Zentrumsseite für diesen Höhenbereich kaum variiert. Das unterschiedliche Verhalten von Rand- und Zentrumsseite wurde in Kap. 7.5 diskutiert. Liegt die Flussröhre unterhalb von $\tau = 1$, ist die Röhre selbst nicht mehr zu sehen. Der Strömungskanal verursacht aber auch in diesen Tiefen eine Dopplerverschiebung des Absorptionsprofils, so dass die entstehenden Stokes-V-Profile immer noch asymmetrisch sind.

Für die in tiefen Schichten entstehende Linie Fe I 1564.8 nm ergeben sich für die randseitige Penumbra extrem hohe Werte für die NCP, die weit über den gemessenen liegen. Die Tatsache, dass polarimetrische Messungen nicht derart hohe NCP-Werte zeigen, lässt sich mit der Vorstellung verstehen, dass eine Flussröhre in so tiefen Schichten der Atmosphäre eine starke Auftriebs-

kraft erfährt und aus diesem Grund nicht lange in diesem Bereich verweilt. Eine hypothetische zeitaufgelöste Beobachtung der Penumbra, die einen kurzzeitigen Anstieg der NCP zeigen würde, gefolgt von einem Abfall auf ein stationäres Niveau, ließe sich auf diese Weise als die spektrale Signatur einer aufsteigenden Flussröhre interpretieren.

Zuletzt zeigt Abb. 7.15 exemplarisch für einen heliozentrischen Winkel von $\theta = 45^\circ$, wie sich die NCP der randseitigen Penumbra als Funktion der vertikalen Lage einer magnetischen Flussröhre in der Atmosphäre verhält. Die berechnete NCP für Fe I 630.25 nm ist für eine Lage des oberen Randes der Flussröhre im Intervall von $z \in [0\text{km}, 220\text{km}]$ oberhalb von $\tau = 1$ größer als die NCP der Linie Fe I 1564.8 nm, während für höher und tiefer liegende Strömungskanäle die NCP im Infraroten größer ist. Simultane Beobachtungen in zwei Wellenlängen, wie z. B. den hier untersuchten, könnten damit genaueren Aufschluss über die Lage magnetischer Flussröhren in der Penumbra geben.

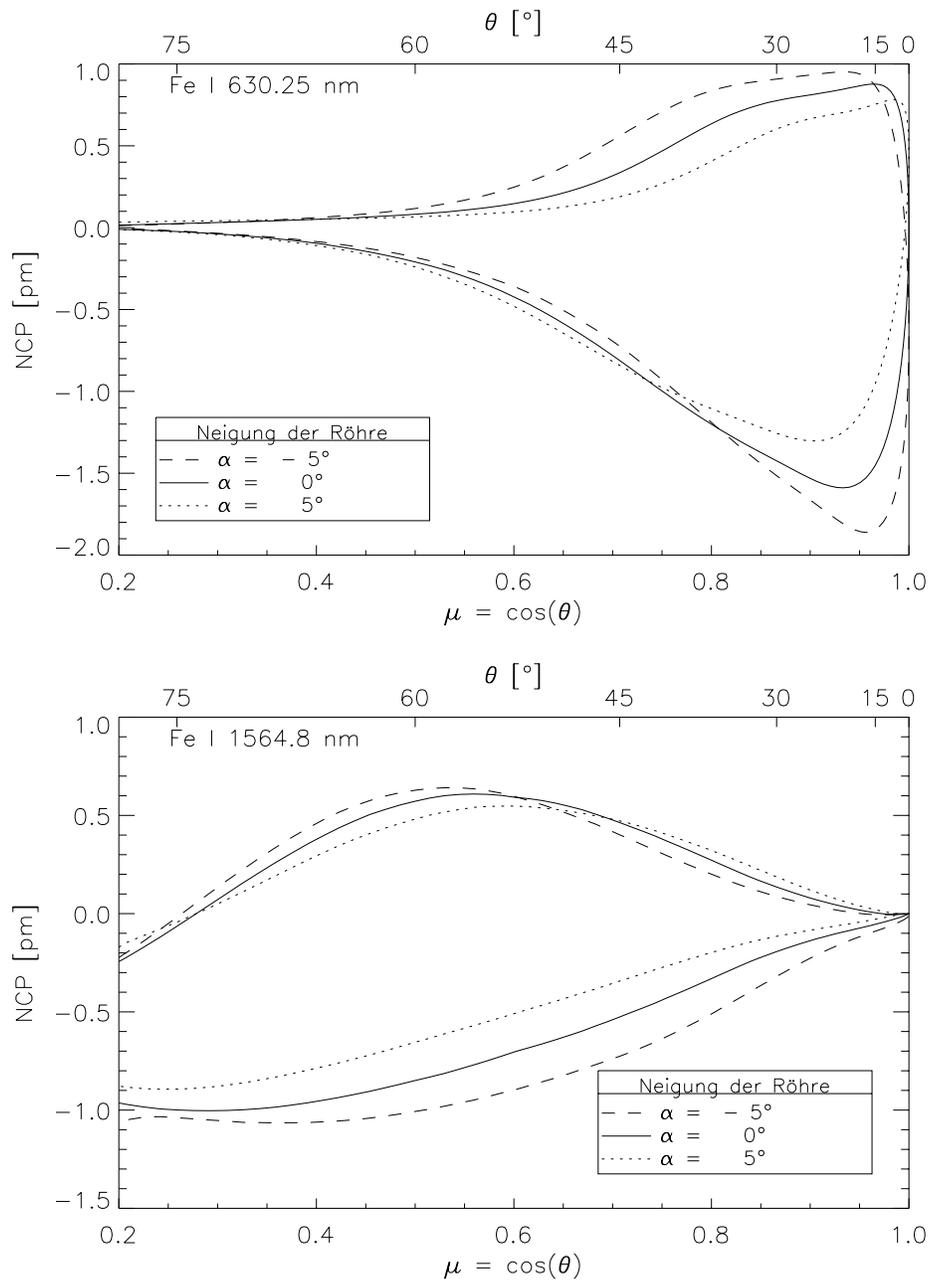


ABBILDUNG 7.12.: Abhängigkeit der NCP vom Neigungswinkel α der magnetischen Flussröhre gegenüber der Horizontalen, *oben* für Fe I 630.25 nm, *unten* für Fe I 1564.8 nm. Der untere Ast jeder Kurve repräsentiert Beobachtungen der randseitigen Penumbra, der obere solche der Zentrumsseite. Die Kurven entsprechen verschiedenen Neigungswinkeln α gegenüber der Horizontalen.

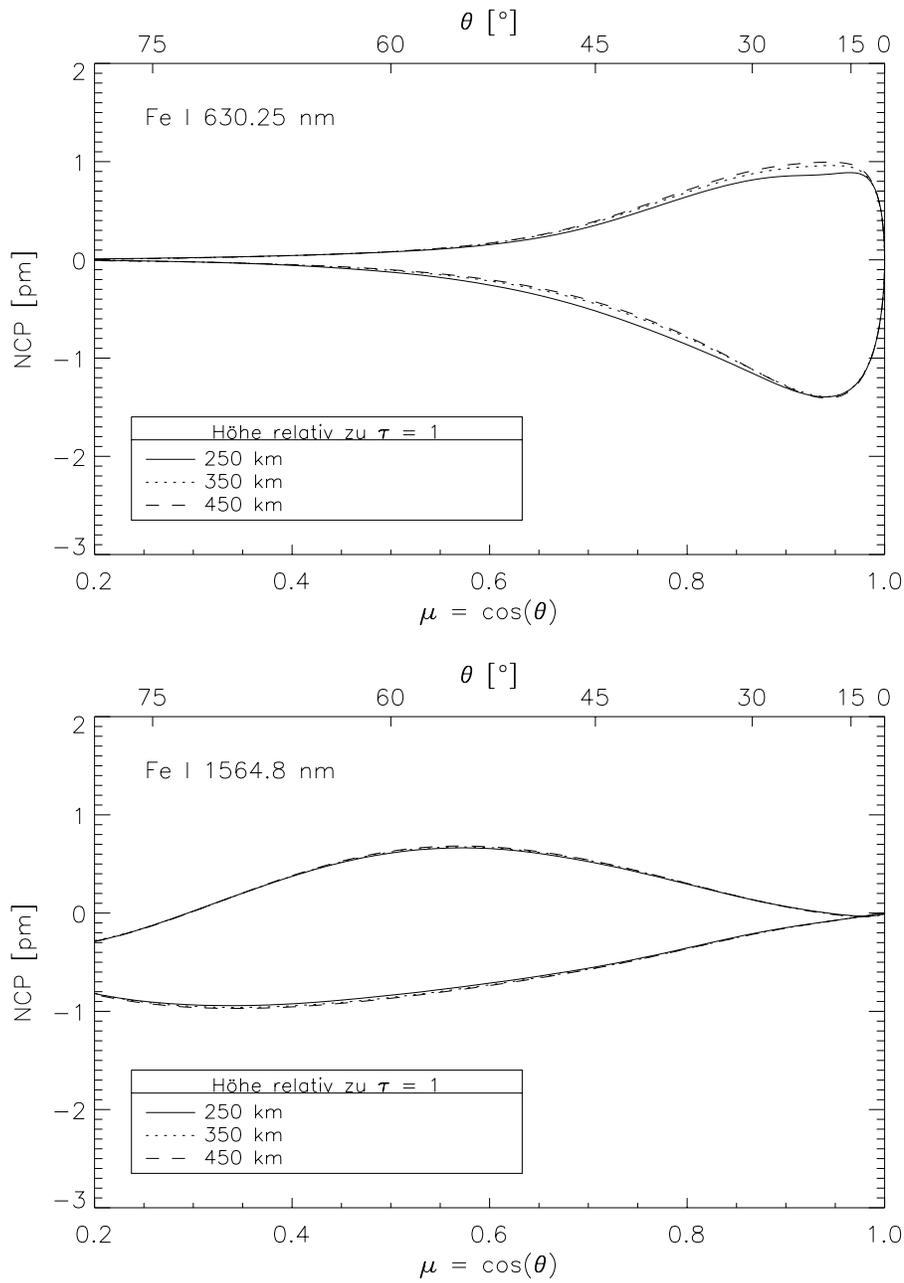


ABBILDUNG 7.13.: Abhängigkeit der Mitte-Rand-Variation der NCP von der Lage der magnetischen Flussröhre in der Atmosphäre (1): Positionen oberhalb der optischen Tiefe $\tau = 1$. Oben: Fe I 630.25 nm, unten: Fe I 1564.8 nm.

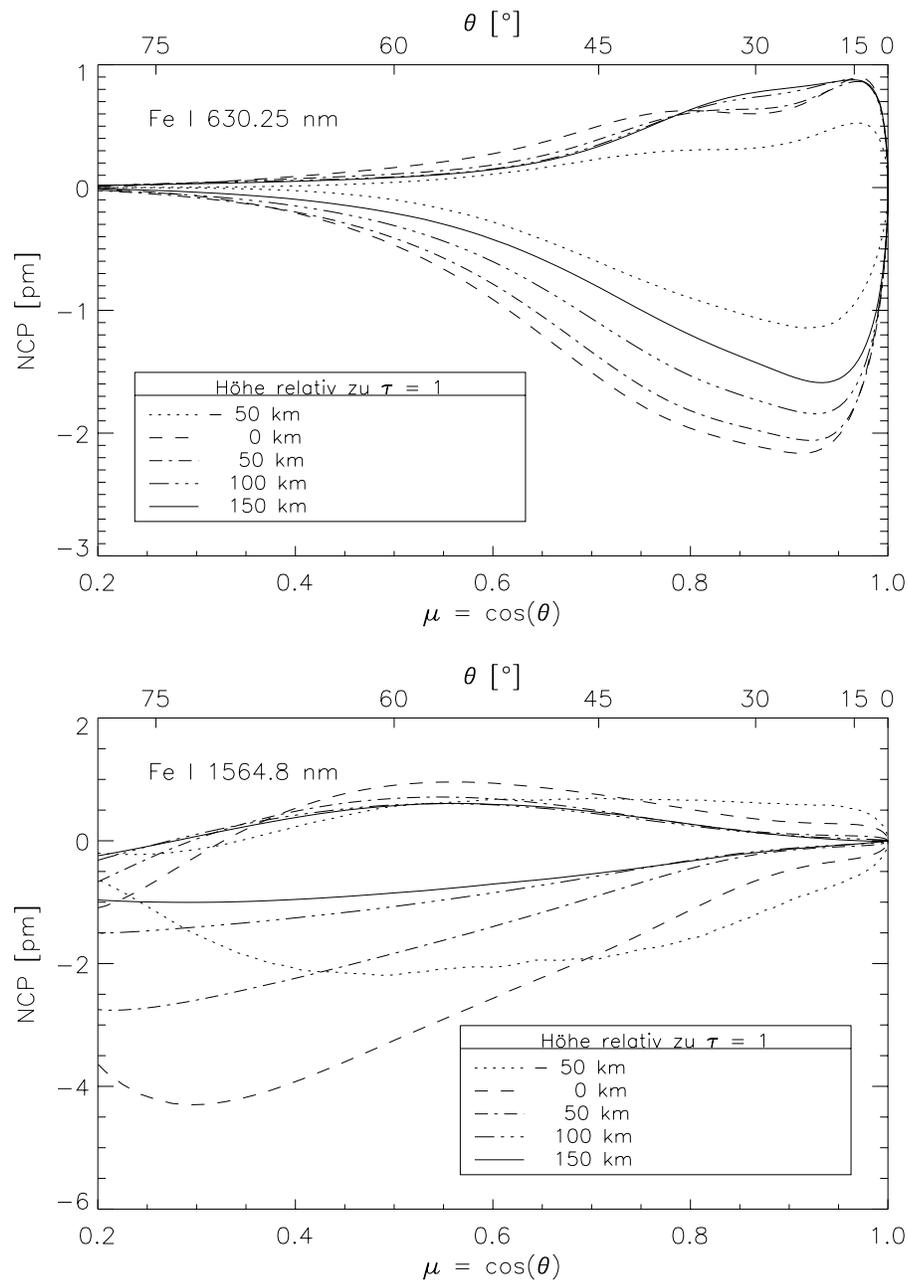


ABBILDUNG 7.14.: Abhängigkeit der NCP von der Lage der magnetischen Flussröhre in der Atmosphäre (2): Positionen unterhalb der optischen Tiefe $\tau = 1$. *Oben*: Fe I 630.25 nm, *unten*: Fe I 1564.8 nm.

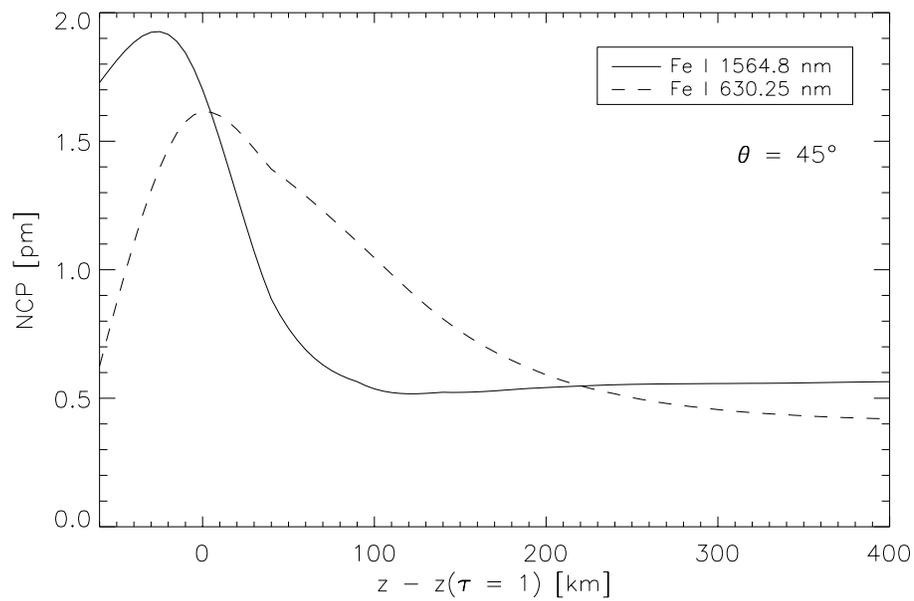


ABBILDUNG 7.15.: NCP der Stokes-V-Profile als Funktion der Lage einer magnetischen Flussröhre in der Atmosphäre für einen heliozentrischen Winkel von $\theta = 45^\circ$ für Fe I 630.25 nm (*gestrichelte Linie*) und Fe I 1564.8 nm (*durchgezogene Linie*).

8. Azimutale Variation der NCP in einem Sonnenfleck

Viel leichter als die Verfolgung eines Sonnenflecks auf seinem langen Weg über die Sonnenscheibe, der für den Beobachter auf der Erde durch Nacht und Wolken nur zum Teil zugänglich ist, ist die Aufnahme einer Karte von Spektren eines Flecks bei einem bestimmten heliozentrischen Winkel. Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, wie die NCP dabei mit dem Azimutwinkel ψ des Sonnenflecks variiert, wenn man Spektren an einer festen radialen Position betrachtet. Abb. 8.1 illustriert die Lage dreier Flussröhren für verschiedene Winkel ψ , mit denen sich auch der Azimutwinkel ϕ und der Inklinationswinkel γ des Magnetfelds für den Beobachter verändert.

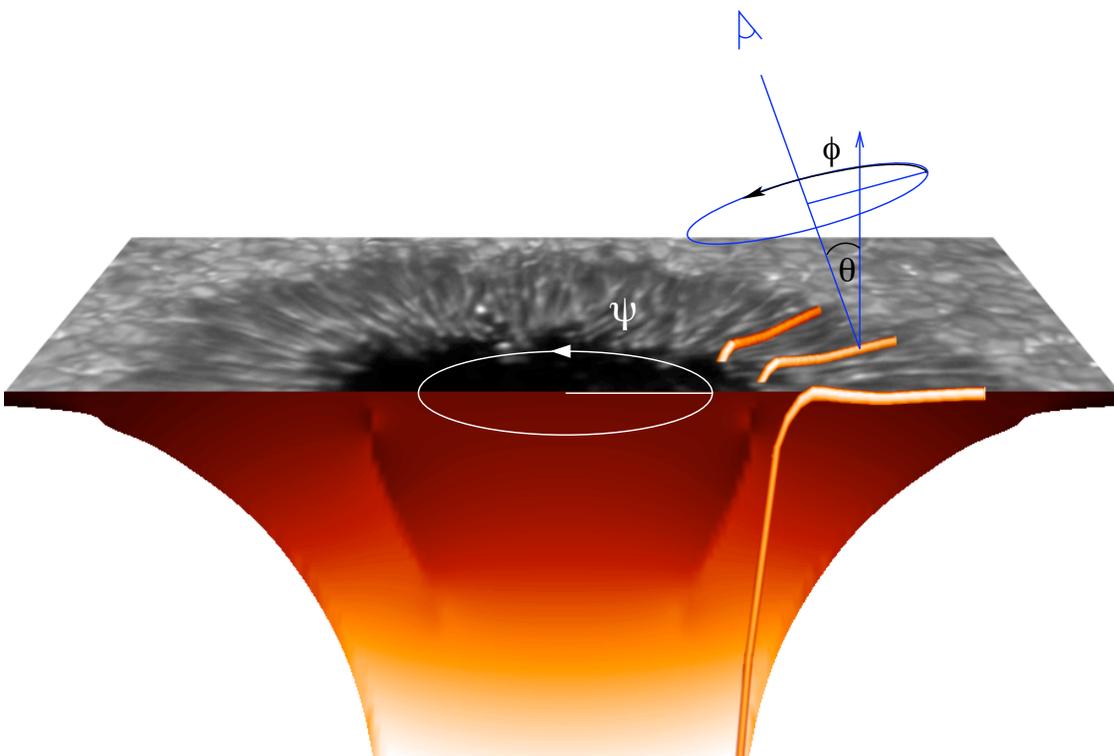


ABBILDUNG 8.1.: Magnetische Flussröhren in der Penumbra. Der Azimutwinkel ϕ und der Inklinationswinkel γ des Magnetfelds für den Beobachter variieren mit der Lage der Flussröhren im Fleck, charakterisiert durch den Fleckwinkel ψ .

In Kap. 8.1 werden wir eine analytische Abschätzung der zu erwartenden Effekte durchführen und daraufhin in Kap. 8.2 die Resultate unserer numerischen Rechnungen vorstellen. Dabei werden wir auf die Bedeutung der anomalen Dispersion beim Strahlungstransport und ihren unterschiedlichen Einfluss auf die NCP der beiden Spektrallinien Fe I 630.25 nm und Fe I 1564.8 nm eingehen. Im darauffolgenden Abschnitt 8.3 präsentieren wir synthetische NCP-Karten unseres Penumbra-Modells, die wir zum Abschluss in Kap. 8.4 mit Beobachtungen vergleichen, die mit dem *Tenerife Infrared Polarimeter* und dem *Advanced Stokes Polarimeter* durchgeführt wurden.

8.1. Analytische Abschätzung verschiedener Beiträge zur NCP

Obleich die Strahlungstransportgleichung für eine Atmosphäre mit magnetischen Flussröhren nicht analytisch gelöst werden kann, lässt sich die berechnete Variation der NCP qualitativ mit Hilfe einer analytischen Betrachtung verstehen, die von Landolfi & Landi Degl'Innocenti (1996) durchgeführt wurde. Das Entscheidende ist dabei die Existenz einer Diskontinuität in der Strömungsgeschwindigkeit und der Richtung des Magnetfelds.

Wir betrachten in Anlehnung an Landolfi & Landi Degl'Innocenti eine statische Milne-Eddington-Atmosphäre, über der sich eine dünne Schicht befindet, in der das Plasma mit einer Sichtliniengeschwindigkeit von $\omega_A^{(s)}$ strömt. $\mathbf{B}^{(s)} \equiv (B_s, \gamma_s, \phi_s)$ sei das Magnetfeld dieser Schicht, $\mathbf{B} \equiv (B, \gamma, \phi)$ das der darunterliegenden Atmosphäre. Der Strahlungstransport durch die Schicht wird durch die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = -\mathbf{K}^{(s)}\mathbf{I} + \mathbf{j}^{(s)} \quad (8.1)$$

beschrieben, deren formale Lösung gegeben ist durch

$$\mathbf{I}(0) = \int_{\tau_s}^0 \mathbf{O}(0, \tau) \mathbf{j}^{(s)} d\tau + \mathbf{O}(0, \tau_s) \mathbf{I}^{(b)}. \quad (8.2)$$

Dabei ist τ_s die optische Dicke der Schicht, \mathbf{O} der Evolutionsoperator (3.38) und $\mathbf{I}^{(b)}$ der Stokes-Vektor des auf die Grenzschicht auftreffenden Lichts. Unter der Annahme, dass die strömende Schicht optisch dünn ist ($\tau_s \ll 1$) lässt sich der Operator \mathbf{O} in eine Potenzreihe entwickeln, und man erhält in erster Ordnung

$$\mathbf{O}(0, t) = e^{\tau \mathbf{K}^{(s)}} \approx 1 + \tau \mathbf{K}^{(s)} \quad (0 \leq \tau \leq \tau_s). \quad (8.3)$$

In niedrigster Ordnung in τ_s erhält man damit für die Netto-Zirkularpolarisation N den Ausdruck

$$N = \tau_s \int [\eta_V^{(s)} I^{(b)} + \rho_U^{(s)} Q^{(b)} - \rho_Q^{(s)} U^{(b)} + \eta_I^{(s)} V^{(b)}] d\lambda, \quad (8.4)$$

wobei der Index (b) die statische Atmosphäre bezeichnet. Unter der vereinfachenden Annahme einer Milne-Eddington-Atmosphäre und einer schwachen Spektrallinie lassen sich die Stokes-Parameter an der Grenzschicht nach Seares (1913) schreiben als

$$\begin{aligned} I^{(b)} &= B_0[(1 + \beta) - \beta \eta_I] & U^{(b)} &= -B_0 \beta \eta_U \\ Q^{(b)} &= -B_0 \beta \eta_Q & V^{(b)} &= -B_0 \beta \eta_V. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Diese Näherung ist zwar hinsichtlich der Amplitude der Stokes-Parameter nicht immer gut erfüllt, beinhaltet jedoch die wichtigen Symmetrieeigenschaften, dass I , Q und U als Funktion der Wellenlänge symmetrisch sind, V dagegen antisymmetrisch ist. Aus (8.4) und (8.5) leiteten Landolfi & Landi Degl'Innocenti (1996) einen geschlossenen Ausdruck für einen sog. NCP-Parameter $v = N/\alpha$ her. Dieser unterscheidet sich nur durch den Faktor der Äquivalentbreite, $\alpha = \int [I_c(\tau = 0) - I(\tau = 0, \lambda)] d\lambda$, von der NCP N selbst, die wir im folgenden betrachten. Unter Ausnutzung der Eigenschaften der Faltung von Voigt- und Faraday-Voigt-Funktionen (A.2) lassen sich drei Beiträge zur NCP isolieren, die durch Diskontinuitäten der Magnetfeldstärke B , der Inklination γ (bei Landolfi & Landi Degl'Innocenti mit ϑ bezeichnet) und des Azimuts ϕ verursacht werden. Neben dem Linienabsorptionskoeffizienten und trigonometrischen Faktoren enthalten die Ausdrücke für den ΔB -Effekt und den $\Delta\gamma$ -Effekt Summen aus den Voigt-Funktionen $H(v, a)$ der einzelnen Zeeman-Komponenten, während der $\Delta\phi$ -Effekt von den entsprechenden Faraday-Voigt-Funktionen abhängt:

ΔB -Effekt:

$$N_{\Delta B} = k \cdot \cos \gamma \left\{ (1 + \cos^2 \gamma) [H(v_{rr}, \hat{a}) - H(v_{bb}, \hat{a})] + \sin^2 \gamma [H(v_{rp}, \hat{a}) + H(v_{pr}, \hat{a}) - H(v_{bp}, \hat{a}) - H(v_{pb}, \hat{a})] \right\}, \quad (8.6)$$

$\Delta\gamma$ -Effekt:

$$N_{\Delta\gamma} = k \cdot \left\{ \left[\cos \gamma_s \sin^2 \gamma - \cos \gamma \sin^2 \gamma_s \right] [H(v_{rp}, \hat{a}) - H(v_{bp}, \hat{a})] + \frac{1}{2} \left[\cos \gamma_s (1 + \cos^2 \gamma) - \cos \gamma (1 + \cos^2 \gamma_s) \right] [H(v_{rb}, \hat{a}) - H(v_{br}, \hat{a})] \right\}, \quad (8.7)$$

$\Delta\phi$ -Effekt:

$$N_{\Delta\phi} = k \cdot \sin^4 \gamma \sin 2(\phi - \phi_s) \times \left[\frac{3}{2} L(v_{pp}, \hat{a}) - L(v_{rp}, \hat{a}) - L(v_{bp}, \hat{a}) + \frac{1}{4} L(v_{rb}, \hat{a}) + \frac{1}{4} L(v_{br}, \hat{a}) \right]. \quad (8.8)$$

Dabei ist $k = \alpha \frac{\kappa_L^{(s)} \tau_s}{4\sqrt{2}\pi}$, $\hat{a} = \sqrt{2}a$ der Dämpfungsterm, $L(v, a) = 2F(v, a)$ mit der Faraday-Voigt-Funktion F und v_{ij} die Wellenlängenverschiebungen durch Doppler- und Zeeman-Effekt (A.2). Der Index p bezeichnet dabei einen spektral unverschobenen Beitrag, die Indizes r und b stehen für einen rot- bzw. blauverschobenen Anteil. Wie in Kapitel 7.2 vermerkt wurde, sind die Verhältnisse von Doppler-Verschiebung und Zeeman-Aufspaltung für die Spektrallinien Fe I 1564.8 nm und Fe I 630.25 nm sehr verschieden, da der erste Effekt linear in der Wellenlänge ist, der zweite dagegen quadratisch. Diese Verhältnisse gehen über die Einträge v_j in die Voigt- und Faraday-Voigt-Funktionen ein und führen dazu, dass die durch Diskontinuitäten in B , γ und ϕ hervorgerufenen Asymmetrien abhängig von der Wellenlänge sehr unterschiedliches Gewicht haben.

Dies sei anhand einer Situation mit typischen Werten für die mittlere Penumbra illustriert. Bei einem heliozentrischen Winkel von $\theta = 10^\circ$, Magnetfeldstärken $B_b = 170$ mT, $B_t = 160$ mT und Inklinationswinkeln $\gamma_b = 60^\circ$, $\gamma_t = 90^\circ$ (b : Hintergrund, t : Flussröhre) erhält man für für Fe I 630.25 nm:

$$N_{\Delta B} = 0.04 \cdot k_1 \quad N_{\Delta\gamma} = 0.22 \cdot k_1 \quad N_{\Delta\phi} = -0.14 \cdot k_1, \quad (8.9)$$

für Fe I 1564.8 nm dagegen:

$$N_{\Delta B} = 1.4 \cdot 10^{-5} \cdot k_2 \quad N_{\Delta \gamma} = 5.2 \cdot 10^{-6} \cdot k_2 \quad N_{\Delta \phi} = 0.6 \cdot k_2. \quad (8.10)$$

Für das hier verwendete Penumbra-Modell und gemittelte Absorptionskoeffizienten ist $k_1/k_2 \approx 1 - 2$. Im Vergleich beider Linien ist damit für die Infrarotlinie der $\Delta\phi$ -Effekt als Quelle der Asymmetrie bei weitem dominierend, während für Fe I 630.25 nm $\Delta\phi$ - und $\Delta\gamma$ -Effekt vom Betrag her überwiegen.

In diesem Zusammenhang muss erwähnt werden, dass die Näherung einer schwachen Spektrallinie nur für Fe I 1564.8 nm zutrifft und im Falle von Fe I 630.25 nm Sättigungseffekte eine wichtige Rolle spielen (siehe Abschnitt 7.5). Des weiteren treten in Wirklichkeit Diskontinuitäten meist in mehr als *einem* Parameter auf, so dass sich ein komplexes Zusammenspiel verschiedener Faktoren ergibt. Trotz der offensichtlichen Vereinfachung lassen sich mit dieser Abschätzung die azimutalen Variationen in der NCP erklären, die wir für ein Penumbra-Modell mit magnetischer Flussröhre berechnen.

8.2. NCP-Variation für ein Penumbra-Modell mit Flussröhre

Wir berechnen für unser Penumbra-Modell mit einer magnetischen Flussröhre Linienprofile bei fester radialer Position r_0 und einem heliozentrischen Winkel θ für verschiedene Fleckwinkel ψ . Wir wählen hier $r_0 = 12000$ km, betrachten also einen Ring in der mittleren Penumbra. Abb. 8.2 zeigt die Variation der NCP als Funktion des Fleckwinkels ψ . Dabei bezeichnet $\psi = 0^\circ$ bzw. 360° die Richtung zur Sonnenmitte.

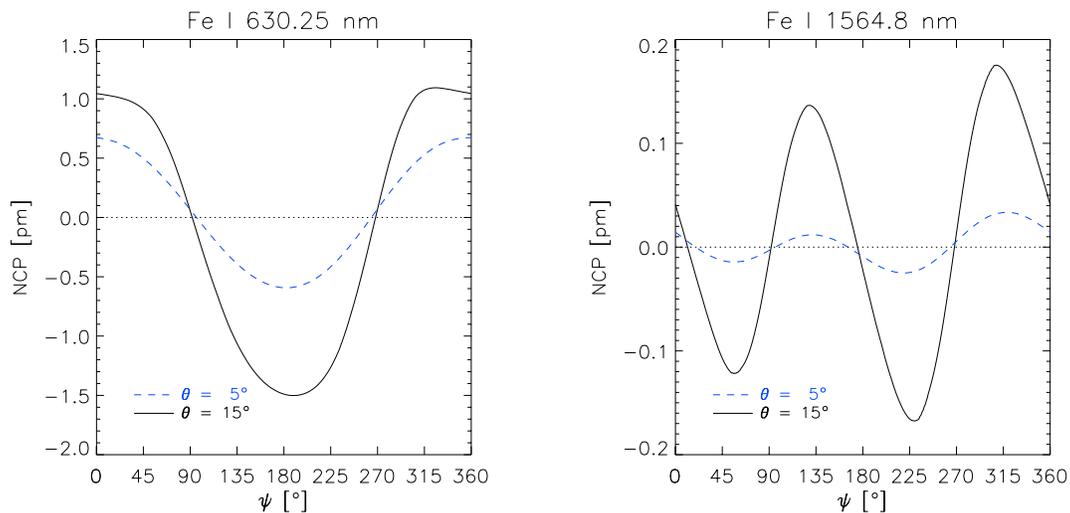


ABBILDUNG 8.2.: Variation der NCP als Funktion des Azimutwinkels ψ im Sonnenfleck für $\theta = 5^\circ$ und $\theta = 15^\circ$. Links: Fe I 630.25 nm, rechts: Fe I 1564.8 nm. $\psi = 0^\circ$ bezeichnet die Richtung zur Sonnenmitte.

Die azimutale Variation der NCP von Fe I 630.25 nm lässt sich mit der analytischen Abschätzung in Abschnitt 8.1 recht leicht verstehen: Entscheidend für die Größe der NCP ist die Diskontinuität in der Sichtliniengeschwindigkeit. Diese ist extremal für $\psi = 0^\circ$, wenn der Beobachter der

Strömung in der Flussröhre entgegenblickt, und für $\psi = 180^\circ$, wenn das Plasma vom Beobachter wegströmt. Die NCP-Verteilung ist fast symmetrisch um die Verbindungslinie Sonnenmitte – Fleckmitte. Das rechte Bild zeigt $N(\psi)$ für die Infrarotlinie. Die NCP verhält sich grundlegend anders: Die Verteilung ist in hohem Maße antisymmetrisch, verschwindet beinahe für $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 180^\circ$ und besitzt je *zwei* Minima und Maxima. Was geht hier vor?

Die Abschätzung der einzelnen Beiträge in Abschnitt 8.1 zeigte, dass für die Linie Fe I 1564.8 nm eine Diskontinuität im Azimutwinkel ϕ großen Einfluss auf die NCP hat. In der Tat variiert die Amplitude $\Delta\phi$ der Diskontinuität beim Übergang in die Flussröhre *antisymmetrisch* als Funktion des Fleckwinkels ψ (siehe Abb. 8.3 *rechts oben*). Dieser Beitrag wird mit der Sichtliniengeschwindigkeit v der Strömung in der Flussröhre gewichtet, deren Verlauf als Funktion von ψ symmetrisch ist (diesen Gewichtungsfaktor erhält man in erster Näherung aus dem Term in eckigen Klammern in (8.8)). Die durch den $\Delta\phi$ -Effekt verursachte NCP lässt sich mit dieser Approximation abschätzen als

$$N \approx A \cdot \sin(2\Delta\phi) \cdot v, \quad (8.11)$$

wobei A ein Skalierungsfaktor ist. Der Verlauf dieser Funktion ist in Abb. 8.3 *rechts unten* dargestellt. Diese einfache Abschätzung berücksichtigt noch nicht die zweite Grenzschicht der Flussröhre. Hier tritt der gleiche Sprung im Azimutwinkel mit umgekehrtem Vorzeichen auf, so dass die Kurve in Abb. 8.3 *rechts unten* um die Achse $\psi = 180^\circ$ gespiegelt wäre. Ein quantitativer Vergleich der berechneten Profile mit den Abschätzungen in Abschnitt 8.1 erscheint wegen der Anzahl der verwendeten Vereinfachungen nicht sinnvoll, qualitativ lässt sich damit jedoch das überraschende Verhalten der Infrarotlinie erklären.

8.2.1. Symmetriebrechung durch magneto-optische Effekte

Eine antisymmetrische Variation der NCP mag zunächst verwunderlich erscheinen, da die durch Sonnenmitte und Fleckmitte verlaufende Linie eine Symmetrieachse des Sonnenflecks ist. Was diese Symmetrie bricht, ist das Magnetfeld. Mathematisch betrachtet ist es der Unterschied zwischen einem Vektor und einem Axialvektor, nämlich der, dass ein Magnetfeld eine Orientierung induziert. Die Situation ist ähnlich zur Präzession eines Elektrons in einem Magnetfeld, dessen Energie von der Präzessions*richtung* abhängt, nur dass hier die Quantisierungsachse selbst (der lokale Magnetfeldvektor) an der Stelle der Diskontinuität je nach Blickrichtung um einen Winkel $\Delta\phi$ in die eine oder andere Richtung kippt.

Vermittelt wird die Antisymmetrie in der NCP durch die antisymmetrischen Einträge in der Absorptionsmatrix. Dies sind die mit ρ bezeichneten Terme in (3.22), die die magneto-optischen Effekte beschreiben. Der Ausdruck (8.4) für die NCP bei einer einfachen Diskontinuität zeigt, dass Produkte aus den symmetrischen Voigt-Funktionen und den antisymmetrischen Faraday-Voigt-Funktionen zur Asymmetrie beitragen. Der Vergleich von ΔB -, $\Delta\gamma$ - und $\Delta\phi$ -Effekt zeigt, dass die antisymmetrischen Faraday-Voigt-Funktionen nur beim $\Delta\phi$ -Effekt auftreten.

Um dies zu überprüfen, wurden die gleichen Profile wie oben noch einmal berechnet, wobei diesmal die ρ -Terme in der Absorptionsmatrix nicht berücksichtigt wurden. Die obere Zeile in Abb. 8.4 zeigt das Ergebnis für die Infrarotlinie: Ohne magneto-optische Effekte wäre $N(\psi)$ symmetrisch bezüglich einer Spiegelung an der Symmetrieachse mit deutlich kleinerer Amplitude. Für Fe I 630.25 nm sind diese Effekte auch vorhanden, verursachen aber nur eine Modulation

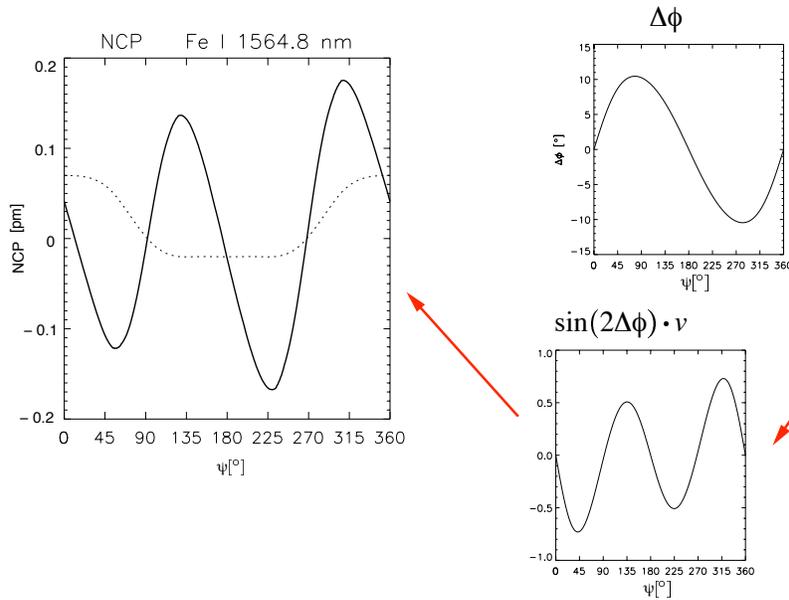


ABBILDUNG 8.3.: Antisymmetrische NCP-Variation für Fe I 1564.8 nm. *Rechts oben*: Diskontinuität $\Delta\phi$ des Azimutwinkels des Magnetfelds beim Eintritt in die Flussröhre als Funktion des Fleckwinkels ψ . *Rechts unten*: Produkt aus $\sin(2\Delta\phi)$ und der Sichtliniengeschwindigkeit. *Links*: Berechnete NCP. Die gestrichelte Linie zeigt den berechneten Verlauf der NCP ohne Berücksichtigung der magneto-optischen Effekte (siehe Kap. 8.2.1).

des stärkeren symmetrischen NCP-Beitrags, der durch den Sprung $\Delta\gamma$ in der Inklination des Magnetfelds zwischen statischem Hintergrund und magnetischer Flussröhre verursacht wird.

Wir stellen damit fest, dass die resultierende NCP eine Überlagerung aus einem *symmetrischen* und einem *antisymmetrischen* Anteil ist, wobei Letzterer durch magneto-optische Effekte bzw. anomale Dispersion in der Atmosphäre hervorgerufen wird.

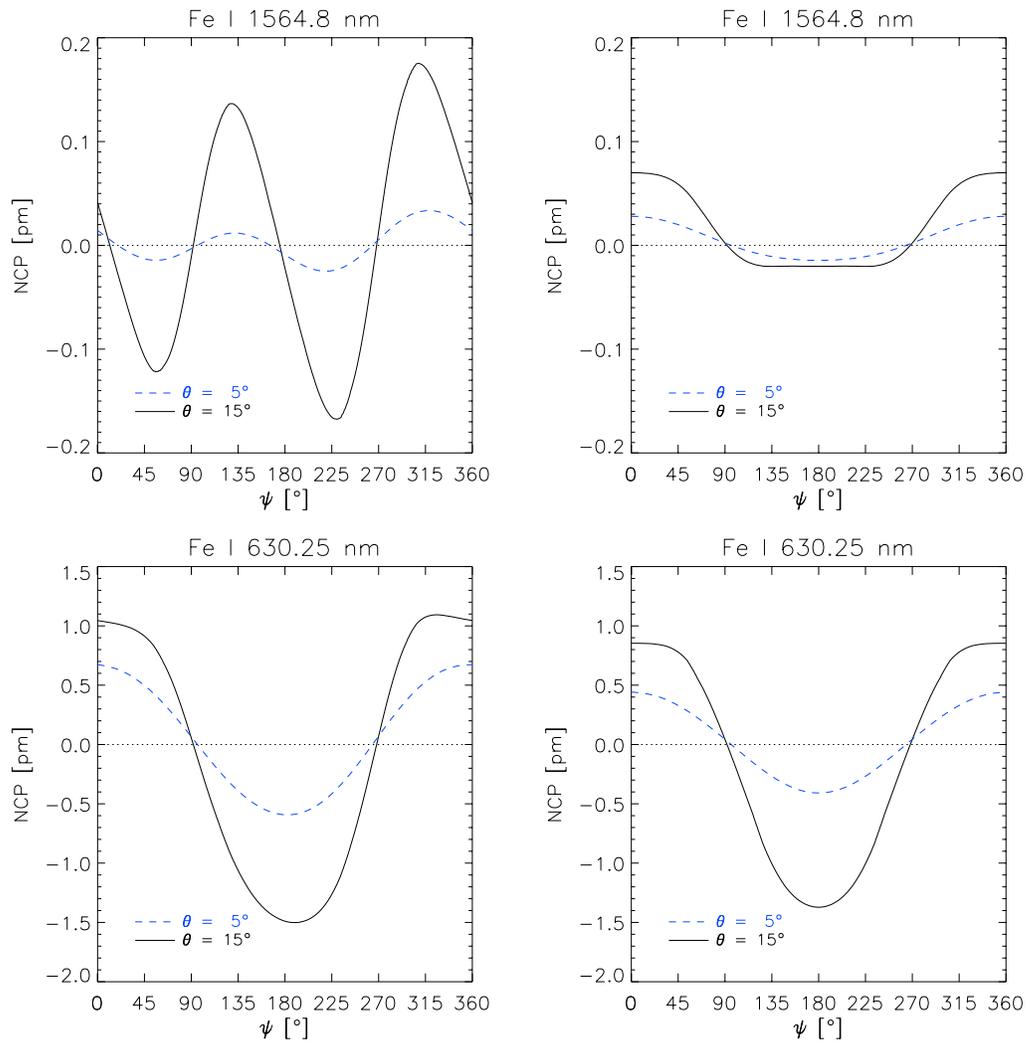


ABBILDUNG 8.4.: Abhängigkeit der NCP vom Fleckwinkel ψ für Fe I 1564.8 nm (*oben*) und Fe I 630.25 nm (*unten*). *Linke Spalte*: mit magneto-optischen Effekten, *rechte Spalte*: ohne magneto-optische Effekte. Die resultierende NCP ist eine Superposition von symmetrischen und antisymmetrischen Beiträgen. Bei der Infrarotlinie dominieren die magneto-optischen Effekte und verursachen einen starken antisymmetrischen Anteil in der NCP-Verteilung. Bei der Linie im sichtbaren Wellenlängenbereich führen die gleichen Effekte nur zu einer asymmetrischen Modulation der symmetrischen Verteilung.

8.2.2. Abhängigkeit der NCP von der Strömungsgeschwindigkeit

Eine Netto-Zirkularpolarisation kann nur entstehen, wenn die betrachtete Atmosphäre Geschwindigkeitsgradienten oder -diskontinuitäten entlang der Sichtlinie aufweist. Die entstehende NCP ist dabei um so größer, je höher die Änderungen in der Geschwindigkeit sind. Um dieses Verhalten zu testen, haben wir die Strömungsgeschwindigkeit der magnetischen Flussröhre in unserem Modell variiert, so dass sie in der mittleren Penumbra statt $|\mathbf{v}| = 12$ km/s nur noch 6 km/s bzw. 3 km/s betrug. Natürlich sind die so produzierten Flussröhren nicht mehr im Gleichgewicht mit der umgebenden Atmosphäre, können aber wohl als numerisches Experiment betrachtet werden. Abb. 8.2.2 zeigt, dass die Signatur der NCP-Verteilungen für die beiden Spektrallinien die gleiche bleibt und die Amplitude wie erwartet mit sinkender Strömungsgeschwindigkeit in der Flussröhre abnimmt.

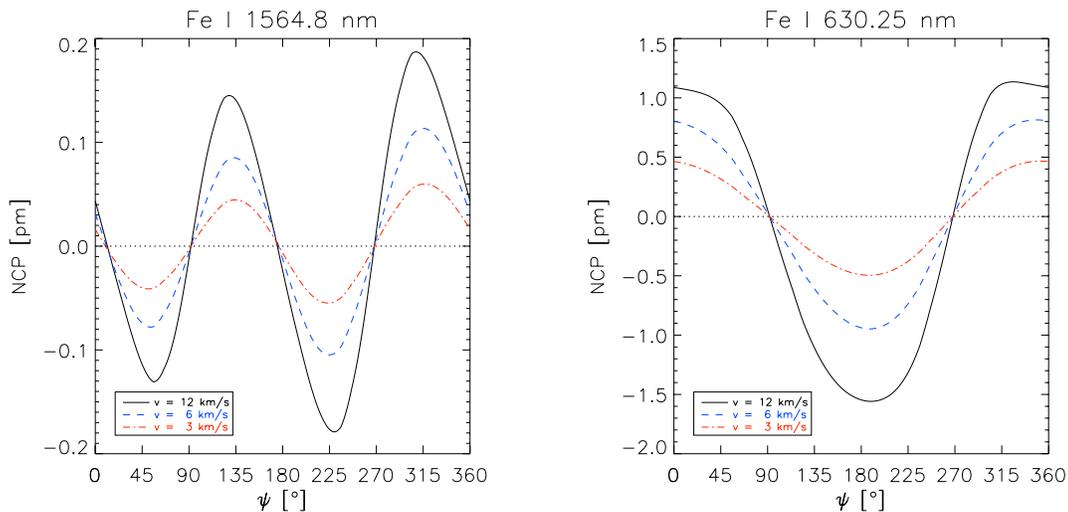


ABBILDUNG 8.5.: Abhängigkeit der NCP von der Strömungsgeschwindigkeit für Fe I 1564.8 nm (*links*) und Fe I 630.25 nm (*rechts*)

8.3. Synthetische NCP-Karten

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm ermöglicht es schließlich, Stokes-Profile für beliebige Punkte eines Sonnenfleckmodells zu berechnen. Die folgende Abbildung 8.6 zeigt die sich ergebenden NCP-Karten für das Penumbra-Modell mit magnetischer Flussröhre von Schlichenmaier et al. (1998). In diesen Rechnungen wurde lediglich die Konfiguration *einer* Flussröhre zu *einem* Zeitpunkt der Simulation verwendet. Die Karten zeigen für drei heliozentrische Winkel ($\theta = 10^\circ, 30^\circ, 45^\circ$) die Ergebnisse der Berechnung der Stokes-Profile für 180 azimuthale Positionen der Flussröhre in der Penumbra in Schritten von $\Delta\psi = 2^\circ$ und an je 28 radialen Positionen zwischen $r = 9500$ km und $r = 16000$ km. Die Umbra ist nicht Teil des hier betrachteten Modells, und da dort bisher keine NCP gemessen worden ist, setzen wir sie in diesem Bereich in Abb. 8.6 auf Null.

Zum qualitativen Vergleich mit Beobachtungen wurden die NCP-Karten durch Anwendung eines gleitenden Mittels leicht geglättet, so dass sie einer räumlichen Auflösung von 700 km ($\approx 1'$) entsprechen, was ungefähr der pixel-begrenzten Auflösung des Tenerife Infrared Polarimeters (ca. $0.8''$) entspricht.

Man erkennt das qualitativ verschiedene Verhalten unserer beiden Spektrallinien: Während die NCP der Linie Fe I 630.25 nm nahezu symmetrisch zur Verbindungslinie Sonnenmitte – Fleckmitte verteilt ist, zeigt die NCP von Fe I 1564.8 nm eine überwiegend antisymmetrische Variation als Funktion des Fleckwinkels ψ . Außerdem erkennt man, dass die NCP zum Rand der Penumbra hin schwächer wird. Dieses Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass nach außen hin die Inklinationsdifferenz $\Delta\gamma$ zwischen Hintergrundmagnetfeld und magnetischer Flussröhre abnimmt. Die schmalen konzentrischen Streifen nahe $r = 9700$ km entstehen dadurch, dass an dieser Stelle der Fußpunkt der simulierten Flussröhre die Photosphäre erreicht, wodurch große Gradienten in der Temperatur und im Magnetfeld verursacht werden. Diese Effekte bedürfen eingehenderer Betrachtung. Wie in Abschnitt 7.5 beschrieben wurde, ist die Amplitude der NCP von Fe I 630.25 nm dabei für alle drei heliozentrischen Winkel in Abb. 8.6 größer als die von Fe I 1564.8 nm und der Betrag der NCP von Fe I 630.25 nm ist auf der Randseite des Sonnenflecks größer als auf der Zentrumsseite.

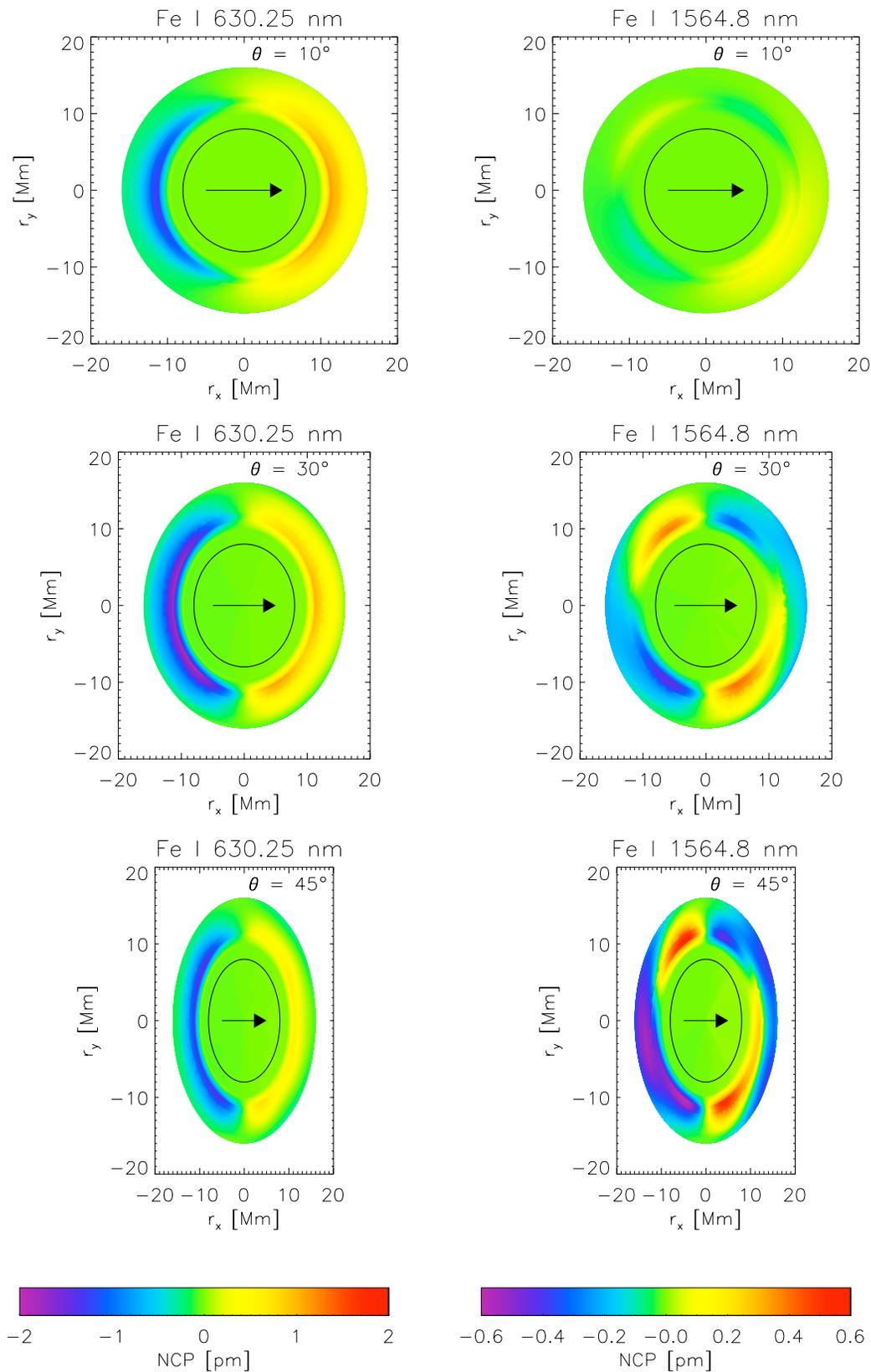


ABBILDUNG 8.6.: Synthetische NCP-Karten eines Sonnenfleck für die Spektrallinien Fe I 630.25 nm (linke Spalte) und Fe I 1564.8 nm (rechte Spalte) bei verschiedenen heliozentrischen Winkeln. *Oben:* $\theta = 10^\circ$, *Mitte:* $\theta = 30^\circ$, *unten:* $\theta = 45^\circ$. Die schwarze Linie markiert den Rand der Umbra, die Pfeile geben die Richtung zur Sonnenmitte an. Der Fußpunkt der Flussröhre dieses Modells erreicht bei $r \approx 9700$ km die Photosphäre.

8.4. Beobachtungen

Die folgenden Abbildungen 8.7 und 8.8 zeigen Karten der gemessenen NCP zweier Sonnenflecken. Die Karten in der Infrarotlinie Fe I 1564.8 nm wurden am 21. und 30. September 1999 von M. Collados mit dem *Tenerife Infrared Polarimeter* am Vakuum-Turm-Teleskop, Teneriffa, aufgenommen. Die Beobachtung in der Linie Fe I 630.25 nm stammt von M. Sigwarth, aufgenommen am 2. Oktober 2000 mit dem *Advanced Stokes Polarimeter* des National Solar Observatory / Sacramento Peak (USA).

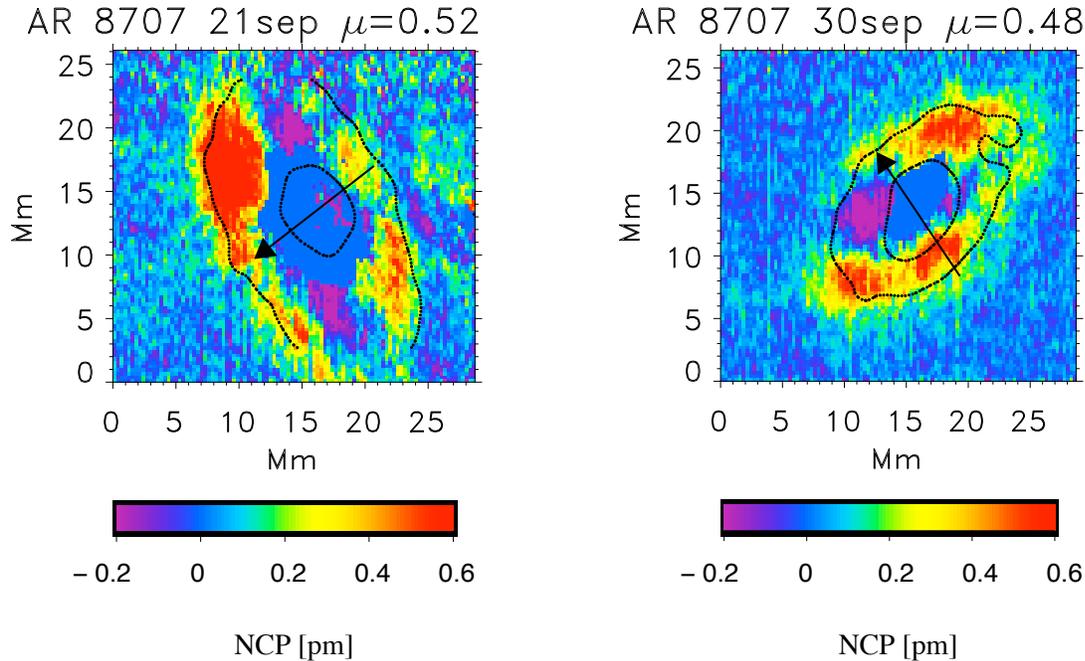


ABBILDUNG 8.7.: NCP-Karten eines Sonnenflecks, aufgenommen am 21. und 30. September 1999 in der Linie Fe I 1564.8 nm mit dem *Tenerife Infrared Polarimeter*. Der Pfeil weist hier jeweils in Richtung *Sonnenrand*, die Konturlinien zeigen die Umrisse von Penumbra und Umbra gemäß der Intensitätskarte der Flecks (Schlichenmaier & Collados 2001).

Die beiden NCP-Karten der Linie Fe I 1564.8 nm in Abb. 8.7 zeigen eine azimutale Verteilung der NCP, die in hohem Maße *antisymmetrisch* relativ zur Verbindungslinie Sonnenmitte – Fleckmitte ist. In allen Karten dieses Flecks, der über einen Zeitraum von mehr als einer Woche beobachtet wurde, liegen die Maxima der NCP auf gegenüberliegenden Seiten des Sonnenflecks und sind gegenüber der Symmetrieachse um etwa 45° gedreht. Zwischen diesen Maxima sind in den meisten Fällen Minima mit umgekehrtem Vorzeichen lokalisiert. Eine genaue Analyse der Daten ist nicht Ziel dieser Arbeit, aber wir erkennen in diesen Beobachtungen genau den Effekt, der in Abschnitt 8.2 prognostiziert wurde: Bei der Linie Fe I 1564.8 nm dominieren magneto-optische Effekte die NCP und führen zu einer antisymmetrischen Variation als Funktion des Fleckwinkels ψ . Die hier vorgestellten, bislang unveröffentlichten Daten werden von Schlichenmaier & Colla-

dos (2001) detailliert beschrieben.

Die Karte der Linie Fe I 630.25 nm in Abb. 8.8 zeigt dagegen eine *symmetrische* Verteilung der NCP relativ zur Verbindungslinie Sonnenmitte – Fleckmitte, was ebenfalls in Einklang mit der Vorhersage in Abschnitt 8.2 steht. Hierbei ist anzumerken, dass in dieser Karte das Vorzeichen der NCP zum Vergleich mit den Rechnungen vertauscht werden muss, da dieser Fleck von entgegengesetzter Polarität war. Man erkennt, dass die Amplitude der NCP auf der Randseite des Sonnenflecks deutlich größer als auf der Zentrumsseite ist. Dieses Ergebnis liefern auch die Rechnungen in Abschnitt 8.2. Am äußeren Rand des Flecks ist auf der Zentrumsseite das Vorzeichen der NCP uneinheitlich, wobei hier eine Rolle spielt, auf welche Weise der Rand der Penumbra aus der Intensitätskarte bestimmt wird. Es handelt sich bei diesen Daten um neue Messungen, deren Auswertung noch bevorsteht.

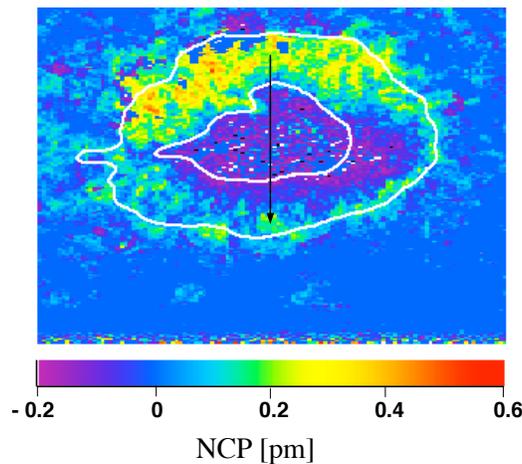


ABBILDUNG 8.8.: NCP-Karte eines Sonnenflecks, aufgenommen in der Linie Fe I 630.25 nm am 2. Oktober 2000 mit dem *Advanced Stokes Polarimeter*. Der Pfeil gibt die Richtung zur Sonnenmitte an, die Konturlinien zeigen die Umrisse von Penumbra und Umbra gemäß der Intensitätskarte der Flecks (C. Beck & M. Sigwarth).

Im Vergleich zu den synthetischen NCP-Karten in Abb. 8.6 fällt auf, dass die gemessene NCP systematisch kleiner ist als die berechnete. Dies ist damit zu erklären, dass bei den hier durchgeführten Rechnungen jeder Sehstrahl die Achse einer Flussröhre durchkreuzt, deren Strömungsgeschwindigkeit zudem sehr hoch ist. Daneben wird es ebenso Sehstrahlen geben, die eine Flussröhre nur streifen. Außerdem kann man nicht annehmen, dass der Füllfaktor magnetischer Flussröhren in der Penumbra Eins ist. Stattdessen wird auch Licht aus Bereichen ohne Flussröhre zu der Strahlung eines Auflösungselements beitragen, dessen Spektrallinien keine NCP aufweisen. In einem nächsten Schritt der numerischen Rechnungen sollen diese Effekte berücksichtigt werden, indem viele Flussröhren in unterschiedlichen Stadien stochastisch in der Penumbra verteilt und ferner für ein Auflösungselement mehrere Sehstrahlen berechnet werden, um daraus eine gemittelte NCP zu erhalten.

9. Ausblick: Inversion von Stokes-Profilen mit neuronalen Netzen

Bei dem Versuch, aus beobachteten Stokes-Profilen Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden physikalischen Parameter der Atmosphäre zu ziehen, ist man mit einem typischen Problem der *Inversion* konfrontiert. Inversionsprobleme gehören in vielen Fällen zur Klasse der sog. „schlecht gestellten Probleme“ (*engl.* ill posed problems), deren Lösung nicht eindeutig ist. Für den Fall von Spektren in der Sonnenatmosphäre bedeutet das, dass mehrere Konfigurationen der atmosphärischen Parameter die gleichen Spektren produzieren können. Martínez Pillet (2000b) zeigt, dass die Inversion von synthetischen Spektren aus einer Flussröhrenatmosphäre mit Hilfe des SIR-Codes (Ruiz Cobo & del Toro Iniesta 1992) nicht in der Lage ist, die Eingangsdaten zu reproduzieren.

Eine aussichtsreiche Methode stellt hier die Inversion mittels *neuronaler Netze* dar, die von Carroll (2000) erstmals auf synthetische Spektren in der Umbra von Sonnenflecken angewendet wurde. Hierbei werden Stokes-Profile anhand ihrer Response-Funktionen¹ klassifiziert und mit den so erhaltenen geschätzten Werten als Startwerten ein Atmosphärenmodell mit Hilfe des Levenberg-Marquardt-Algorithmus (Press et al. 1992) an die beobachteten Profile angepasst. Voraussetzung für eine erfolgreiche Inversion mit dieser Methode ist ein hinreichend großer Satz von Trainingsdaten, der Stokes-Profile für möglichst viele physikalisch sinnvoll erscheinende Atmosphärenmodelle beinhaltet. Im Hinblick auf die Ergebnisse von Kapitel 8 erscheint es erfolgversprechend, bei der Inversion von Stokes-Profilen in Sonnenflecken nicht alle Parameter unabhängig zu variieren, sondern mit Hilfe einfacher geometrischen Annahmen für die Magnetfeldstruktur die Symmetrie des Problems auszunutzen.

In einem ersten Schritt in Richtung eines Inversions-Codes für die Penumbra haben wir etwa 20000 synthetische Spektren berechnet, bei denen für drei verschiedene heliozentrische Winkel die physikalischen Parameter einer magnetischen Flussröhre in einer Hintergrundatmosphäre mit Hilfe des in Kapitel 7.7 beschriebenen Modells variiert wurden. Zusätzlich wurden Spektren für die gleiche Modellatmosphäre ohne magnetische Flussröhre berechnet. Die ersten Ergebnisse zeigen, dass das verwendete neuronale Netz, ein *Multi-Layer Perceptron*, in der Lage ist, Atmosphärenmodelle mit Flussröhre klar von solchen ohne zu unterscheiden (Carroll 2001).

¹Die Response-Funktionen stellen die Ableitungen der Stokes-Profile nach den verschiedenen physikalischen Parametern dar (Ruiz Cobo & del Toro Iniesta 1994).

Anhang

A. Ergänzungen

A.1. Anomaler Zeeman-Effekt: Statistische Gewichte

ΔJ	-1	0	+1
$S_{-1}(M_l, M)$	$(J+M)(J+M-1)$	$(J+M)(J-M+1)$	$(J-M+1)(J-M+2)$
$S_0(M_l, M)$	$J^2 - M^2$	M^2	$(J+1)^2 - M^2$
$S_{+1}(M_l, M)$	$(J-M)(J-M-1)$	$(J-M)(J+M+1)$	$(J+M+1)(J+M+2)$

TABELLE A.1.: Statistische Gewichte der Komponenten eines normalen Zeeman-Triplets (nicht normiert)

A.2. Analytische Abschätzung der NCP: Wellenlängenverschiebungen

Die Ausdrücke für die relativen Wellenlängenverschiebungen, die in der Arbeit von Landolfi & Landi Degl'Innocenti (1996) verwendet werden, sind:

$$\begin{aligned}
 v_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} + g(\Delta\lambda_B^{(s)} - \Delta\lambda_B) \right], \\
 v_{bb} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} - g(\Delta\lambda_B^{(s)} - \Delta\lambda_B) \right], \\
 v_{pp} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \Delta\lambda_A^{(s)}, \\
 v_{rp} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} + g\Delta\lambda_B^{(s)} \right], \\
 v_{bp} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} - g\Delta\lambda_B^{(s)} \right], \\
 v_{pr} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} - g\Delta\lambda_B \right], \\
 v_{pb} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} + g\Delta\lambda_B \right], \\
 v_{rb} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} + g(\Delta\lambda_B^{(s)} + \Delta\lambda_B) \right],
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$v_{\text{br}} = \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\lambda_D} \left[\Delta\lambda_A^{(s)} - g(\Delta\lambda_B^{(s)} + \Delta\lambda_B) \right].$$

Faltung der Voigt-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(v - v_0, a) H(v - v'_0, a) dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H\left(\frac{v_0 - v'_0}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a}\right) \quad (\text{A.2})$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} H(v - v_0, a) L(v - v'_0, a) dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} L\left(\frac{v_0 - v'_0}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a}\right)$$

A.3. Grenzschichten magnetischer Flussröhren

Die Existenz von Diskontinuitäten in physikalischen Parametern wurde im Verlauf dieser Arbeit als gegeben angenommen. Inwiefern ist für magnetische Flussröhren in der solaren Photosphäre die Annahme einer scharfen Grenzschicht gerechtfertigt? In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der Abschätzung der Dicke solcher Grenzschichten von Schüssler (1986) aufgrund verschiedener physikalischer Prozesse genannt.

Thermische Grenzschicht Die Dicke δ_T einer stabilen thermischen Grenzschicht lässt sich abschätzen, indem man die Zeitskalen für Strahlungsdiffusion und konvektive Instabilität gleichsetzt:

$$\tau_{rad} = \frac{\delta_T^2}{\chi_{rad}} = \delta_T^2 \frac{3\rho^2 c_v \kappa_r}{16\sigma T^3} \quad (\text{A.3})$$

(c_v : Wärmekapazität, κ_r : Rosseland-Absorptionskoeffizient, σ : Strahlungskonstante),

$$\tau_{dyn} = \frac{H_p}{c_s} \quad (\text{A.4})$$

(H_p : Druckskalenhöhe, c_s : Schallgeschwindigkeit). Je nach Lage der Grenzschicht in der Atmosphäre erhält man für $\delta_T \approx 3 - 10$ km. Dieser Wert ist klein gegen einen typischen Durchmesser der hier betrachteten penumbralen Flussröhren von etwa 100 km, so dass die Grenzschicht in guter Näherung als ein diskontinuierlicher Übergang zwischen magnetischem und unmagnetischem Plasma angesehen werden kann.

Resistive Grenzschicht Als eine Folge des Gleichgewichts zwischen magnetischer Advektion einerseits und thermischem Strom und Diffusion aufgrund der endlichen elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas andererseits bildet sich eine resistive Grenzschicht der Dicke δ_R aus. Ein Abschätzung für δ_R erhält man durch Gleichsetzen der Diffusionszeitskala $\tau_D = \delta_R^2 \cdot \eta^{-1}$ (η : magnetische Diffusivität) mit der dynamischen Zeitskala der Strömung, $\tau_F = L \cdot U^{-1}$ (L : Längenskala der Strömung, U : Strömungsgeschwindigkeit). Dies liefert

$$\delta_R = \frac{L}{\sqrt{R_m}} \quad (\text{A.5})$$

(R_m : magnetische Reynoldszahl). Ein Einsetzen typischer Werte für die Photosphäre liefert $\delta_R \approx 3 \dots 10$ km, einen Wert von der gleichen Größenordnung wie die Dicke δ_T der thermischen Grenzschicht.

Viskose Grenzschicht Da die molekulare Viskosität des Plasmas in der Photosphäre vergleichsweise klein ist ($\nu \approx 10^3 \dots 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}$), wird die Dicke der viskosen Grenzschicht durch die turbulente Viskosität bestimmt, die mit $\nu_t \approx 2 \cdot 10^9 \text{ cm}^2/\text{s}$ von der gleichen Größenordnung ist wie die turbulente magnetische Diffusivität. Damit ergibt sich, dass die Dicke δ_v der viskosen Grenzschicht mit δ_T und δ_R vergleichbar ist.

B. Überblick über die verwendeten Programme

B.1. Struktur des Programmpakets DIAMAG

Das Diagramm in Abb. B.1 zeigt schematisch die Funktionsweise des verwendeten Strahlungstransportprogramms DIAMAG von U. Grossmann-Doerth. Für „subroutine“ wird im folgenden die Abkürzung SR verwendet.

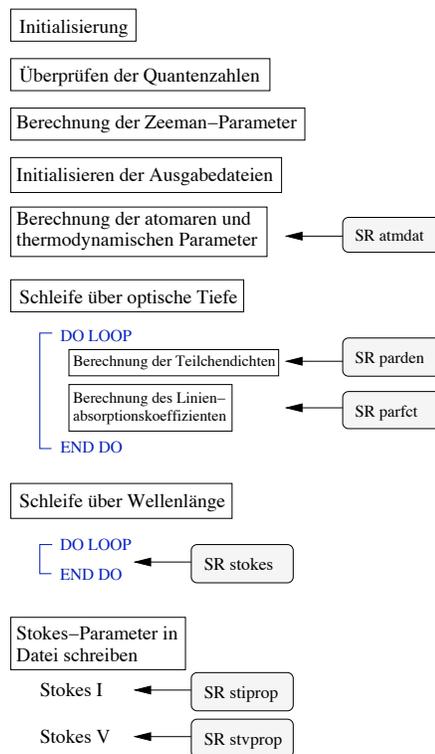


ABBILDUNG B.1.: Struktur des Strahlungstransportprogramms DIAMAG

B.1.1. Kurzbeschreibung der Programme

dmg12.f Hauptprogramm diamag: Berechnung der Stokes-Parameter und Beitragsfunktionen wie in Kapitel (3.4.1) beschrieben.

`msdmg12.f` „Master-Programm“ für `diamag`, das aus einer Datei die Daten einer Spektrallinie einliest. Es enthält die Subroutine `atstr`. Diese initialisiert eine Modellatmosphäre durch Einlesen der Dateien `atma` (Druck, Temperatur) und `atmb` (Magnetfeldstärke und -richtung, Mikro- und Makroturbulenz).

`stok2.f` SR `stokes`: berechnet Stokes-Parameter und optional Beitragsfunktionen mit der DELO-Methode (Kapitel 3.4.1).

`srb2.f` In den verschiedenen UnterROUTINEN werden folgende Größen berechnet:

- SR `parden`: Teilchendichten
- SR `gas`: Gesamtdruck und Partialdrücke
- SR `atmdat`: atomare Parameter
- SR `parfct`: Zustandssummen
- SR `saha`: Ionisationsgrad nach Saha-Gleichung
- SR `kappac`: Kontinuumsopazität
- SR `rkapc`: Kontinuumsopazität als Funktion von T , p und λ an unter Verwendung von SR `parden` und SR `kappac`
- SR `lprof1`: Voigt- und Faraday-Voigt-Profile

Hilfsroutinen Die Dateien `srb1.f`, `matrix.f` und `stprop.f` enthalten Hilfsroutinen zur Inversion und Multiplikation von Matrizen, zur Interpolation und zur Berechnung von Linienparametern.

B.2. Struktur des Programmpakets SPOTMACHINE

Abb. B.2 zeigt schematisch die Funktionsweise der für diese Arbeit erstellten Programme. Dem Strahlungstransportprogramm DIAMAG werden die atmosphärischen Parameter in zwei Dateien (atma_real und atmb_real) übergeben, die außerdem eine Liste der zu verwendenden Punkte in der optischen Tiefe enthalten. write_atmreal ersetzt damit das Vorprogramm msdmg12.f.

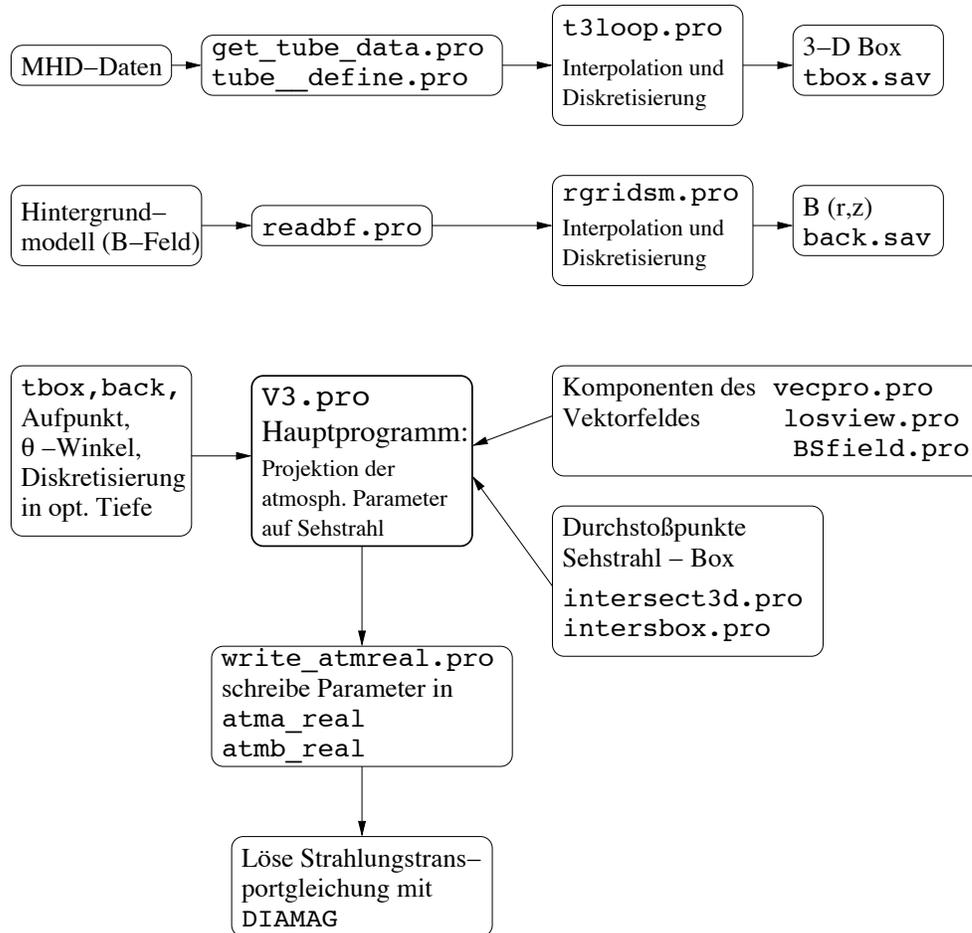


ABBILDUNG B.2.: Programmstruktur der SPOTMACHINE

Literaturverzeichnis

- Alfvén, H. 1942, Arkiv. f. Mat. Astron. Fysik, 29 B, 1
- Auer, L. H. & Heasley, J. N. 1978, A&A, 64, 67
- Beckers, J. M. 1969, A Table of Zeeman Multiplets (Sacramento Peak Observatory, Rep. AFCRL-69-0115)
- Beckers, J. M. & Schröter, E. H. 1969, Sol. Phys., 10, 384
- Bellot Rubio, L. R., Ruiz Cobo, B., & Collados, M. 1998, ApJ, 506, 805
- Biermann, B. 1941, Vierteljahresschrift Astron. Ges., 76, 194
- Brants, J. J. & Zwaan, C. 1982, Sol. Phys., 80, 251
- Carroll, T. A. 2000, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin
- . 2001, *private Mitteilung*
- Collados, M., del Toro Iniesta, J. C., & Vazquez, M. 1988, A&A, 195, 315
- Collados, M., Martínez Pillet, V., Ruiz Cobo, B., del Toro Iniesta, J. C., & Vazquez, M. 1994, A&A, 291, 622
- Delaunay, B. 1934, Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk, 7, 793
- Evershed, J. 1909, MNRAS, 69, 454
- Fabricius, J. 1611, De Maculis in Sole Observatis (Wittenbergae)
- Gantmacher, F. R. 1959, The Theory of Matrices, Vol. 2 (New York)
- Grossmann-Doerth, U. 1994, A&A, 285, 1012
- Hale, G. E. 1908a, ApJ, 28, 315
- . 1908b, ApJ, 28, 100
- Hale, G. E. & Nicholson, S. B. 1938, Magnetic observations of sunspots, 1917-1924 (Carnegie Institution of Washington, Washington, D.C.)
- Herzberg, G. 1944, Atomic Spectra and Atomic Structure (Dover, New York)

- Illing, R. M. E., Landman, D. A., & Mickey, D. L. 1974a, A&A, 35, 327
- . 1974b, A&A, 37, 97
- . 1975, A&A, 41, 183
- Jahn, K. 1992, in Sunspots: Theory and Observations (NATO ASIC Proc. 375), 139
- Jahn, K. & Schmidt, H. U. 1994, A&A, 290, 295
- Kemp, J. C. 1970, ApJ, 162, 169
- Kopp, G. & Rabin, D. 1992, Sol. Phys., 141, 253
- Kröner, D. 1997, Numerical Schemes for Conservation Laws (Wiley & Teubner, Chichester/Stuttgart)
- Landi Degl’Innocenti, E. & Landi Degl’Innocenti, M. 1972, Sol. Phys., 27, 319
- . 1981, Il Nuovo Cimento B, 62, 1
- Landolfi, M. & Landi Degl’Innocenti, E. 1996, Sol. Phys., 164, 191
- Lites, B. W., Skumanich, A., & Scharmer, G. B. 1990, ApJ, 355, 329
- Maltby, P. 1964, Astrophysica Norvegica, 8, 205
- Martínez Pillet, V. 2000a, *private Mitteilung*
- . 2000b, A&A, 361, 734
- Mihalas, D. 1978, Stellar Atmospheres, 2nd edn. (W. H. Freeman and Co., San Francisco)
- Muller, R. 1973, Sol. Phys., 32, 409
- Poincaré. 1892, Théorie Mathématique de la Lumière (Paris)
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing (University Press, Cambridge)
- Rees, D. 1987, in Numerical Radiative Transfer, ed. W. Kalkofen (University Press, Cambridge), 213
- Rees, D. E., Durrant, C. J., & Murphy, G. A. 1989, ApJ, 339, 1093
- Ruiz Cobo, B. & del Toro Iniesta, J. C. 1992, ApJ, 398, 375
- . 1994, A&A, 283, 129
- Rutten, R. 1999, Radiative Transfer in Stellar Atmospheres (lecture notes Utrecht Univ., 6th WWW edition)
- Scheiner, C. 1611, Rosa Ursina (Bracciano)

- Schlichenmaier, R. 1997, Dissertation, Ludwigs-Maximilians-Universität München
- Schlichenmaier, R., Bruls, J. H. M. J., & Schüssler, M. 1999, A&A, 349, 961
- Schlichenmaier, R. & Collados, M. 2001, A&A, *in Vorbereitung*
- Schlichenmaier, R., Jahn, K., & Schmidt, H. U. 1998, A&A, 337, 897
- Schmidt, H. U. 1991, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 62, 249
- Schüssler, M. 1986, in Small Scale Magnetic Flux Concentrations in the Solar Photosphere, ed. W. Deinzer (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen), 103
- Seares, F. H. 1913, ApJ, 38, 99
- Sigwarth, M. 1999, Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
- Solanki, S. K. 1987, Dissertation No. 8309, ETH Zürich
- Solanki, S. K. & Montavon, C. A. P. 1993, A&A, 275, 283
- Solanki, S. K. & Pahlke, K. D. 1988, A&A, 201, 143
- St. John, C. E. 1913a, ApJ, 37, 322
- . 1913b, ApJ, 38, 341
- Steiner, O. 2000, Sol. Phys., 196, 245
- Stift, M. J. 1999, in Solar Polarization, ASSL Vol. 243 (Kluwer, Dordrecht), 241
- Stift, M. J. 2000, *private Mitteilung*
- Stix, M. 1989, The Sun (Springer, Berlin)
- Stokes, G. G. 1852, Trans. Cambridge Phil. Soc., 9, 399
- Sütterlin, P. 2001, A&A, *im Druck*
- Trujillo-Bueno, J. 1998, in Radiative Transfer and Inversion Codes, ed. C. Briand (Obs. Paris, Meudon), 27
- Zeeman, P. 1897a, Phil. Mag., 43, 226
- . 1897b, Phil. Mag., 44, 55
- . 1897c, Phil. Mag., 44, 255

Danksagung

Mein Dank für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit gilt gleichermaßen Dr. Rolf Schlichenmaier, Dr. Oskar Steiner und Prof. Dr. Michael Stix. Es war mir eine große Freude, mit ihnen zusammenzuarbeiten und mir stets ihrer bereitwilligen Unterstützung sicher zu sein.

Insbesondere gebührt Dr. R. Schlichenmaier Dank für die Idee zu dieser Arbeit, Prof. M. Stix für seine große physikalische Intuition, seinen Überblick und die Unterstützung der Teilnahme an der *XII Canary Islands Winter School* und Dr. O. Steiner für seine analytischen Magnetopausen-Rechnungen und den unermüdlichen Arbeitseinsatz beim Erforschen, Zählen und Beschreiben von Granulen (eine andere Geschichte).

Dr. U. Grossmann-Doerth stellte freundlicherweise das von ihm entwickelte Strahlungstransportprogramm DIAMAG zur Verfügung, das die Grundlage der hier vorgenommenen Rechnungen bildete. Ein Dank auch an die MitarbeiterInnen des Kiepenheuer-Instituts für die freundliche und freundschaftliche Atmosphäre, der wichtigsten nicht-stellaren während dieser Arbeit. Das KIS ist immer mehr gewesen als ein Arbeitsplatz.

Dr. Jo Bruls stand mit Rat und Tat bei Fragen zum Strahlungstransport zur Seite, Dr. Peter Caligari ermöglichte das hervorragende Funktionieren des Rechnernetzes und Dipl. Phys. Thorsten Carroll (AIP Potsdam) die Zusammenarbeit bei der Stokes-Inversion mit neuronalen Netzen. Der erweiterten Besetzung des „Spielzimmers“ gilt Dank für zahlreiche Gespräche diesseits und jenseits der Physik und Christian Beck und Markus Roth für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Nicht vergessen werden dürfen alle Freunde, die dafür gesorgt haben, dass die Zeit aus noch viel mehr bestand als Wissenschaft, insbesondere Sadik Hafizović, der sich nicht nur bei vielen Touren auf zwei Rädern stets mit großer Geduld die aktuellen Gewinne und Verluste angehört hat.

Ganz besonders möchte ich meinen Eltern und meiner Schwester für ihre Unterstützung und Ermutigung danken. Ohne sie wäre vieles unmöglich und alles weniger schön gewesen.

Bei der Studienstiftung des deutschen Volkes bedanke ich mich für die freundliche Unterstützung meines Studiums.

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen wurden, sind durch die Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht.

Daniel Müller, Freiburg im August 2001