Izpit iz Matematike 2

2. februar 2010

1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Dokaži, da je množica $M = \{X \in \mathbb{R}^{3,3};\ AX = X^T A\}$ vektorski podprostor v prostoru realnih matrik $\mathbb{R}^{3,3}$ in zapiši kakšno njegovo bazo.

2. Določi vse lastne vektorje in lastne vrednosti operatorja $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, podanega s predpisom
$$A(p)(x) = x\,p'(x) + \int_0^1 t^2\,p(t)\,dt.$$
Ali je matrika, ki pripada operatorju v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[x]$, diagonalizabilna?

3. Na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ vseh realnih polinomov stopnje največ 2 je definiran skalarni produkt s predpisom
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$
   (a) Dokaži, da je z zgornjim predpisom res podan skalarni produkt in poišči kakšno ortonormirano bazo glede na ta skalarni produkt.

   (b) Linearen operator $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je podan s predpisom
   $$(Ap)(x) = x(x-1)p''(x) + (2x-1)p'(x).$$
   Ali je operator A sebi adjungiran?

   (c) Dokaži, da je s predpisom
   $$f(p) = p(x+1) + p(x-1) - 2p(x)$$
   definiran linearen funkcional $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ in poišči tak polinom $q \in \mathbb{R}_2[x]$, da bo veljalo $f(p) = \langle p, q\rangle$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

4. Na ploskvi z enačbo $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y,z) = 2x + 7y^2 + 7z^3$.