

## Examen du 15 Mai 2007

**Exercice 1 :** Un arrêt de bus est desservi toutes les 15 minutes entre 8h et 10h (le bus passe donc à 8h, 8h15, 8h30, etc...)

1. Un usager arrive à l'arrêt à un instant aléatoire uniformément réparti entre 8h et 8h30. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de minutes écoulées depuis 8h jusqu'au moment de l'arrivée de l'usager à l'arrêt du bus.
  - (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire  $X$ .
  - (b) Calculer la probabilité que l'usager attende le bus moins de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.
2. Pour un deuxième usager, on appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de minutes écoulées depuis 8h jusqu'au moment de l'arrivée de l'usager à l'arrêt du bus et dont la densité est donnée par  $g(t) = a(30 - t)^2 \mathbf{1}_{[0,30]}$  où  $\mathbf{1}_{[0,30]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 30]$ .
  - (a) Déterminer  $a$  pour que l'on ait une loi de probabilité.
  - (b) Calculer la probabilité pour que le deuxième usager attende moins de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.

**Exercice 2 :** Le nombre de clients d'un magasin suit chaque samedi une loi normale de moyenne 350 et d'écart-type 30. Calculer la probabilité pour qu'il y ait un samedi donné :

1. Plus de 400 clients.
2. Moins de 300 clients.
3. Un nombre de clients compris entre 320 et 380.

**Exercice 3 :** La probabilité pour qu'un chien soit porteur d'une certaine bactérie est 0,34. On considère un échantillon de 1000 chiens. Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de chiens porteurs de la bactérie dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Donner son espérance, sa variance.
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de  $X$ . Donner ses paramètres.
3. Quelle est la probabilité que le nombre d'animaux porteurs de la bactérie soit supérieur à 350 ?

**Exercice 4 :**

1. Sur un échantillon de 20 pièces fabriquées par une machine, 4 sont défectueuses. Trouver un intervalle de confiance au risque 5% de la proportion réelle de pièces défectueuses fabriquées par la machine.
2. Reprendre la question précédente avec 60 pièces défectueuses sur 300. (On donnera de façon précise la loi utilisée).

**Exercice 5 :** On tire au hasard dans une population (très grande), un échantillon de 100 sujets et l'on mesure la glycémie de chacun d'entre eux. On obtient pour cet échantillon, une moyenne  $\bar{x} = 92,2 \text{mg}/100\text{ml}$  et une variance  $S^2 = 51,4$ .

1. A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, donner un estimateur sans biais de la moyenne  $\mu$  et un estimateur sans biais de la variance  $S^2$  de la glycémie de la population.
2. On suppose que la variable aléatoire  $\bar{X}$ , qui a tout échantillon de taille 100 associe la glycémie moyenne de cet échantillon suit une loi normale.
  - (a) Quels sont les paramètres de cette loi normale ?
  - (b) Déterminer un intervalle de confiance au risque 1% de la glycémie moyenne  $\mu$  de la population.
  - (c) Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon pour connaître avec le niveau de confiance 95% la glycémie moyenne dans la population à  $1 \text{mg}/100\text{ml}$  près.