Jörg MEYER, Hameln

Tangenten und Tangentialebenen aus algebraischer Sicht

Fassung vom 1. 10. 2019.

Inhalt

1 Im Zweidimensionalen

1.1 Vorbemerkung

Ein Punkt X hat die Form $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, und eine Gerade g mit $a\cdot x+b\cdot y+c=0$ wird mit $g=[a:b:c]$ bezeichnet. X liegt genau dann auf g, wenn $g\cdot X=0$ ist.

Die Differenz zweier Punkte entspricht einem Verschiebungsvektor und hat 0 als dritte Komponente.

1.2 Beispiele

Die <u>Parabel</u> mit $y=x^2$ lässt sich auch darstellen durch

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

Die <u>Ellipse</u> / <u>Hyperbel</u> mit $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ lässt sich auch darstellen durch

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2\cdot b^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

1.3 Allgemeine Quadriken im Zweidimensionalen

Für alle Punkte X auf einer zweidimensionalen Quadrik gilt $\boxed{X^t\cdot M\cdot X=0}$ mit einer symmetrischen Matrix M, die die Quadrik charakterisiert. Die Matrix M wird als invertierbar vorausgesetzt (sonst würde die Quadrik zerfallen).

1.4 Tangenten

Es sei $P=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Punkt auf der Quadrik; es gelte also $P^t \cdot M \cdot P = 0$.

$P^t \cdot M$ ist ein Zeilentripel und stellt die <u>Tangente</u> in P an die Quadrik dar, denn $P^t \cdot M$ hat mit der Quadrik nur den Punkt P gemeinsam: Wäre Q ein weiterer gemeinsamer Punkt, so müsste $Q^t \cdot M \cdot Q = 0$ und $P^t \cdot M \cdot Q = 0$ gelten, also für beliebige λ und μ auch $(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)^t \cdot M \cdot Q = 0$, andererseits aber auch $P^t \cdot M \cdot (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = 0$, was sich wegen der Symmetrie von M auch als $(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)^t \cdot M \cdot P = 0$ schreibt. Zusammen gilt daher $(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)^t \cdot M \cdot (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = 0$, und damit wäre die gesamte Gerade durch P und Q Teil der Quadrik. Das ist nur in dem uninteressanten Fall möglich, dass die Quadrik zu zwei Geraden ausgeartet ist.
Diese Begründung zeigt, dass die Tangente in P keinen von P verschiedenen Punkt mit der Quadrik gemeinsam haben kann. Da eine Gerade eine Quadrik in höchstens zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Stellen schneidet, kann die Tangente zu P die Quadrik ohnehin nicht noch einmal in einem von P verschiedenen Punkt schneiden.

1.5 Beispiele

Die <u>Parabel</u>tangente in $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} t & t^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left[-2 \cdot t : 1 : t^2\right]$,

hat also die Gleichung $-2 \cdot t \cdot x + y + t^2 = 0$ bzw. $y = 2 \cdot t \cdot x - t^2$.

Die Ellipsen-/Hyperbeltangente in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \cdot b^2 \end{pmatrix} = \left[b^2 \cdot x_0 : \pm a^2 \cdot y_0 : -a^2 \cdot b^2 \right], \text{ hat}$$

also die Gleichung $\frac{x \cdot x_0}{a^2} \pm \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$.

1.6 Parameterformen

Bei der Parabel ist $P^t \cdot M = \begin{pmatrix} t & t^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left[-2 \cdot t : 1 : t^2 \right]$ die

Tangente in $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen $-2 \cdot t \cdot x + y + t^2 = 0$ ist eine Parameterform

gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t - t \\ 2 \cdot t \cdot x - t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beim Kreis ist

$$P^t \cdot M = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left[x_0 : y_0 : -1 \right] = \left[\frac{x_0}{y_0} : 1 : -\frac{1}{y_0} \right] \text{ die}$$

Tangente in $P=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen $x\cdot\frac{x_0}{y_0}+y-\frac{1}{y_0}=0$ ist eine Parameterdarstellung gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -x\cdot\frac{x_0}{y_0}+\frac{1}{y_0} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{x-x_0}{y_0}\cdot\begin{pmatrix} y_0 \\ -x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.7 Allgemeine Parameterform der Tangente

Allgemein ist $P^t\cdot M=[\alpha:\beta:\gamma]$ die Tangente in $P=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen

$y=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot x-\frac{\gamma}{\beta}$ (ist $\beta=0$, löse man nach x auf)und wegen $y_0=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot x_0-\frac{\gamma}{\beta}$ (denn P liegt auf der Tangente) ist eine Parameterdarstellung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -\frac{\alpha}{\beta}\cdot x-\frac{\gamma}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}+(x-x_0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha/\beta \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}+(x-x_0)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot M\cdot P$$

Bemerkung: Für alle P gilt die Gleichung $P^t\cdot M\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot M\cdot P=0$.

Bei der Parabel ist $M=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ und daher

$$M\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Beim Kreis ist $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ und daher

$$M\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1.8 Polaren

Liegt P nicht auf, sondern außerhalb der Quadrik, so hat $P^t\cdot M$ eine andere Bedeutung: Die beiden Tangenten von P an die Quadrik haben die Berührpunkte B_1 und B_2, und diese die Tangenten $B_1^t\cdot M$ und $B_2^t\cdot M$; damit gelten die Gleichungen $B_1^t\cdot M\cdot P=0$ und $B_2^t\cdot M\cdot P=0$ bzw. $P^t\cdot M\cdot B_1=0$ und $P^t\cdot M\cdot B_2=0$. Demnach liegen die beiden Berührpunkte B_1 und B_2 auf der Geraden $P^t\cdot M$. Diese Gerade ist die Polare zu P.

Liegen P und Q auf der Geraden g, gilt also $g\cdot P=0=g\cdot Q$, und liegen P und Q außerhalb der Quadrik, so schneiden sich die Polaren von P und Q für $\det(M)\neq 0$ in $M^{-1}\cdot g^t$, denn dieser Punkt liegt auf $P^t\cdot M$ wegen $P^t\cdot M\cdot M^{-1}\cdot g^t=(g\cdot P)^t=0$ (für die Polare von Q argumentiert man analog).

Wandert also P auf g, drehen sich seine Polaren um $M^{-1}\cdot g^t$, dem Pol von g.

Damit hat man die Zuordnung $\boxed{g\mapsto M^{-1}\cdot g^t}$ für Geraden außerhalb der Quadrik, deren Umkehrung $\boxed{P\mapsto P^t\cdot M}$ schon oben für Punkte P außerhalb der Quadrik erklärt wurde. Diese Zuordnungen lassen sich jedoch unabhängig von der Lage vornehmen. Allerdings dürfen die Geraden nicht durch den Ursprung gehen, und die Pole dürfen nicht mit dem Ursprung identisch sein.

Liegt P auf g, so liegt der Pol $M^{-1}\cdot g^t$ von g auf der Polaren $P^t\cdot M$ von P,

denn aus $g\cdot P=0$ folgt $P^t\cdot M\cdot M^{-1}\cdot g^t=(g\cdot P)^t=0$.

Nun ja, das alles weiß natürlich jeder. Interessanter sind die Verhältnisse …

2 Im Dreidimensionalen

2.1 Vorbemerkung

Im Dreidimensionalen ist $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$ ein Punkt, und die Ebene ε zu

$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$ wird mit $\varepsilon=[a:b:c:d]$ bezeichnet.

P liegt in E genau dann, wenn $\varepsilon\cdot P=0$ ist.

2.2 Beispiele

Das hyperbolische Paraboloid (Sattelfläche) hat die Gleichung $z=x\cdot y$ bzw.

$(x\quad y\quad z\quad 1)\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=0$ mit dem allgemeinen Punkt

$\begin{pmatrix}c\\d\\c\cdot d\\1\end{pmatrix}$.

Die Kugel hat die Gleichung $x^2+y^2+z^2-1=0$ bzw.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$$ mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \cos\lambda\cdot\cos\beta \\ \sin\lambda\cdot\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$.

Das einschalige Rotationshyperboloid (Kühlturmfläche) hat die Gleichung $x^2+y^2-z^2=1$ bzw. $\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$ mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \pm\cos\lambda\cdot\cosh\beta \\ \pm\sin\lambda\cdot\cosh\beta \\ \sinh\beta \end{pmatrix}$.

Das Rotationsparaboloid hat die Gleichung $z=x^2+y^2$ bzw.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0\,.$$

2.3 Allgemeine Quadriken im Dreidimensionalen

Für alle Punkte $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ auf einer zweidimensionalen Quadrik gilt

$\boxed{X^t \cdot M \cdot X = 0}$ mit einer symmetrischen Matrix M, die die Quadrik charakterisiert. M wird wieder als invertierbar vorausgesetzt.

2.4 Tangentialebenen

Auch hier ist $P^t \cdot M$ vermutlich die Gleichung der <u>Tangentialebene</u> zu P. Man kann jedoch nicht wie im Zweidimensionalen argumentieren, da (wie etwa beim hyperbolischen Paraboloid oder beim einschaligen Hyperboloid) Tangenten vollständig in der Quadrik enthalten sein können.

Es sei P in der Fläche, also $P^t \cdot M \cdot P = 0$. Eine Gerade g durch P hat den allgemeinen Punkt $X = P + \lambda \cdot (Q - P)$.

Sie hat mit der Quadrik einen doppelten (zu $\lambda = 0$ gehörigen) Schnittpunkt, wenn die Schnittgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left(P + \lambda \cdot (Q-P)\right)^t \cdot M \cdot \left(P + \lambda \cdot (Q-P)\right) \\ &= \underbrace{P^t \cdot M \cdot P}_{0} + \lambda \cdot P^t \cdot M \cdot (Q-P) + \lambda \cdot (Q-P)^t \cdot M \cdot P + \lambda^2 \cdot (Q-P)^t \cdot M \cdot (Q-P) \\ &= \lambda \cdot \left(P^t \cdot M \cdot Q - \underbrace{P^t \cdot M \cdot P}_{0} + Q^t \cdot M \cdot P - \underbrace{P^t \cdot M \cdot P}_{0} + \lambda \cdot (Q-P)^t \cdot M \cdot (Q-P) \right) \\ &= \lambda \cdot \left(P^t \cdot M \cdot Q + Q^t \cdot M \cdot P + \lambda \cdot (Q-P)^t \cdot M \cdot (Q-P) \right) \end{aligned}$$

die doppelte Nullstelle $\lambda = 0$ hat, wenn also

$0 = P^t \cdot M \cdot Q + Q^t \cdot M \cdot P = P^t \cdot M \cdot Q + \left(P^t \cdot M \cdot Q\right)^t$ bzw. $P^t \cdot M \cdot Q = 0$ ist. Der

Punkt Q liegt also (zusammen mit P) in der Ebene $P^t \cdot M$, die somit tatsächlich die Tangentialebene darstellt.

2.5 Beispiele und Parameterformen

Die Kugel hat die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$. Es sei

$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\beta \\ \sin\lambda \cdot \cos\beta \\ \sin\beta \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Kugel. Dann ist die Tangentialebene durch $[x_0 : y_0 : z_0 : -1]$ gegeben bzw. durch $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z = 1$. Die Parameterform ergibt sich für $z_0 \neq 0$ zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{x_0}{z_0} \cdot x - \frac{y_0}{z_0} \cdot y + \frac{1}{z_0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - x_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x_0}{z_0} \\ 0 \end{pmatrix} + (y - y_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y_0}{z_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\beta \\ \sin\lambda \cdot \cos\beta \\ \sin\beta \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} \tan\beta \\ 0 \\ -\cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tan\beta \\ -\sin\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das <u>einschalige Hyperboloid</u> hat die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und daher

in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cosh\beta \\ \sin\alpha \cdot \cosh\beta \\ \sinh\beta \\ 1 \end{pmatrix}$ die Tangentialebene $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y - z_0 \cdot z = 1$. Die

Parameterform ergibt sich für $z_0 \neq 0$ zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x_0}{z_0} \cdot x + \frac{y_0}{z_0} \cdot y - \frac{1}{z_0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - x_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x_0}{z_0} \\ 0 \end{pmatrix} + (y - y_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y_0}{z_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \pm\cos\alpha \cdot \cosh\beta \\ \pm\sin\alpha \cdot \cosh\beta \\ \sinh\beta \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} \pm\tanh\beta \\ 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\tanh\beta \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das <u>hyperbolische Paraboloid</u> hat die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1}$.

Es sei $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_o \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ c \cdot d \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Fläche. Dann ist die Tangentialebene durch

$[d : c : -1 : -c \cdot d]$ gegeben bzw. durch $z = x \cdot d + y \cdot c - c \cdot d$.

Die Parameterdarstellung ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x\cdot d+y\cdot c-c\cdot d \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \\ c\cdot d \\ 1 \end{pmatrix}+(x-c)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}+(y-d)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.6 Allgemeine Parameterform der Tangentialebene

Allgemein sei $M^t \cdot P=[\alpha:\beta:\gamma:\delta]$ und etwa $\alpha\neq 0$. Dann ist $x=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot y-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot z-\frac{\delta}{\alpha}$, und die Parameterform der Tangentialebene zum Punkt $P_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha}\cdot y-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot z-\frac{\delta}{\alpha} \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}+(y-y_0)\cdot\begin{pmatrix} -\beta/\alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+(z-z_0)\cdot\begin{pmatrix} -\gamma/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.7 Polarebenen

Liegt P nicht auf der Quadrik, sondern außerhalb, kann man Tangentialebenen an die Quadrik konstruieren. Ist B ein Berührpunkt und $B^t \cdot M$ die zugehörige Tangentialebene, so liegt P darauf; es gilt also $B^t \cdot M\cdot P=0$ bzw. $P^t \cdot M\cdot B=0$. Die Berührpunkte B liegen somit in der Ebene $P^t \cdot M$, der Polarebene zu P.

Bewegt sich P auf einer Ebene ε, gilt also $\varepsilon\cdot P=0$, so gehen alle Polarebenen $P^t \cdot M$ durch den Punkt $M^{-1}\cdot\varepsilon^t$ wegen $P^t \cdot M\cdot M^{-1}\cdot\varepsilon^t=(\varepsilon\cdot P)^t=0$.

Damit hat man die zueinander inversen Zuordnungen $P \mapsto P^t \cdot M$ und $\varepsilon \mapsto M^{-1} \cdot \varepsilon^t$.

Die Ebenen dürfen nicht durch den Ursprung gehen, und die Punkte müssen vom Ursprung verschieden sein.

2.8 Geraden in der Quadrik

Welche Geraden liegen ganz in der Quadrik? Es sei P in der Quadrik. Eine Gerade g durch P hat den allgemeinen Punkt $X = P + \lambda \cdot (Q - P)$. Sie liegt ganz in der Quadrik, wenn die Schnittgleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \left(P + \lambda \cdot (Q - P)\right)^t \cdot M \cdot \left(P + \lambda \cdot (Q - P)\right) \\
&= \lambda \cdot \left(P^t \cdot M \cdot Q + Q^t \cdot M \cdot P + \lambda \cdot (Q - P)^t \cdot M \cdot (Q - P)\right) \\
&= \lambda \cdot \left(P^t \cdot M \cdot Q + \left(P^t \cdot M \cdot Q\right)^t + \lambda \cdot \left(Q^t \cdot M \cdot Q - Q^t \cdot M \cdot P - P^t \cdot M \cdot Q\right)\right) \\
&= \lambda \cdot \left(P^t \cdot M \cdot Q + \left(P^t \cdot M \cdot Q\right)^t + \lambda \cdot \left(Q^t \cdot M \cdot Q - \left(P^t \cdot M \cdot Q\right)^t - P^t \cdot M \cdot Q\right)\right)
\end{aligned}$$

für alle Werte von λ erfüllt ist, wenn also Q in der Quadrik liegt und wenn Q in der Tangentialebene zu P liegt.

Dies ergibt sich auch aus der oben dargestellten Begründung, dass im Zweidimensionalen $P^t \cdot M$ Tangente zu P ist.

Beim <u>hyperbolischen Paraboloid</u> ist die Tangentialebene zu $P=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch $X=P+\sigma\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die beiden durch $X=P+\sigma\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X=P+\tau\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegebenen Geraden liegen vollständig in der Quadrik.

Beim <u>einschaligen Hyperboloid</u> mit $x^2+y^2-z^2=1$ ist die Tangentialebene zu $P=\begin{pmatrix} \pm\cos\alpha\cdot\cosh\beta \\ \pm\sin\alpha\cdot\cosh\beta \\ \sinh\beta \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$X=\begin{pmatrix} \pm\cos\alpha\cdot\cosh\beta \\ \pm\sin\alpha\cdot\cosh\beta \\ \sinh\beta \\ 1 \end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix} \pm\tanh\beta \\ 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\tanh\beta \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Geraden mit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen im Allgemeinen *nicht* in der Fläche.

Der Punkt $\begin{pmatrix} x_0 + \lambda \cdot z_0 \\ y_0 + \mu \cdot z_0 \\ z_0 + \lambda \cdot x_0 + \mu \cdot y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt genau dann in der Fläche, wenn

$$\lambda^2 \cdot z_0^2 + \mu^2 \cdot z_0^2 = \left(\lambda \cdot x_0 + \mu \cdot y_0\right)^2,$$

wenn also das Verhältnis $v = \frac{\lambda}{\mu}$ die quadratische Gleichung

$$v^2 \cdot z_0^2 + z_0^2 = \left(v \cdot x_0 + y_0\right)^2$$

mit den Lösungen $v = \frac{x_0 \cdot y_0 \pm z_0}{y_0^2 - 1}$ erfüllt. Somit gibt es zu jedem Flächenpunkt zwei ganz in der Fläche verlaufende Geraden. Diese sind gegeben durch

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_0 \cdot y_0 \pm z_0}{y_0^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$