Rapport de Jury – Oral de Mathématiques II

Session 2016–2017

Laurent Ménard et Arvind Singh

1 Déroulement de l'épreuve

La formule de cet oral est inchangée depuis maintenant plusieurs années. Chaque candidat dispose de 30 minutes pour préparer un exercice de probabilité et un exercice d'analyse. Il est ensuite interrogé par un examinateur sur ces deux exercices pendant 30 minutes. Les candidats peuvent éventuellement être interrompus pendant leur présentation pour préciser certains points ou pour corriger une erreur qui risque de se propager aux questions suivantes.

Si le candidat a traité entièrement les exercices proposés et qu'il reste du temps d'interrogation, l'examinateur peut donner un exercice supplémentaire non préparé, souvent plus difficile. À l'inverse, si un exercice n'est pas ou peu abordé par un candidat, l'examinateur donne quelques indications et peut aider à sa résolution. Dans le cas où le candidat n'arrive pas à traiter un exercice, l'examinateur peut également en proposer un autre plus facile afin d'affiner sa perception du niveau du candidat. Dans tous les cas, l'oral dure la totalité des 30 minutes.

Le fait de recevoir de l'aide ou des indications, voir un exercice supplémentaire n'est pas nécessairement précurseur d'une mauvaise note et le jury apprécie particulièrement les candidats réactifs et faisant preuve d'initiative. De même, se tromper dans une formule durant l'oral (par exemple dans l'espérance ou la densité d'une variable aléatoire classique) n'est pas dramatique, à condition que le candidat s'aperçoive de ses incohérences (par exemple une probabilité plus grande que 1, une espérance négative pour une variable positive, etc.).

2 Niveau des candidats

Le niveau des candidats est assez hétérogène. Une petite partie des candidats a obtenu une note inférieure à la moyenne. Ces candidats nous paraissent avoir de sérieuses lacunes et ne comprennent en général pas bien certains concepts du programme.

Une majorité des candidats a obtenu une note entre 10 et 14. Ces candidats maîtrisent en général bien le cours et les notions de base du programme, mais manquent parfois de recul ou de technique. Les notions et raisonnements abstraits posent en général problème. Nous estimons cependant que ces candidats ont les moyens de s'épanouir dans un cursus de mathématiques appliquées.

Les candidats ayant obtenu plus de 15 sont excellents et n'auront pas de problèmes à suivre un cursus exigeant en mathématiques. Le seul regret du jury est la diminution du nombre de tels candidats par rapport aux années précédentes.

3 Commentaires divers et sujets types

Probabilités

- Certains candidats mélangent variables aléatoires continues et discrètes.
- Trop de confusions entre événements indépendants et événements incompatibles.
- Mélange entre événements et probabilités : $P(A+B), P(A) \cup P(B) \dots$
- La plupart des candidats connaissent les formules pour les espérances et variances des lois classiques (binomiale, de Poisson, géométrique...), mais peu sont capables de les redémontrer.
- Les exercices de dénombrement sont très mal réussis en général.

Analyse

- Les candidats ont tous de grandes difficultés à manipuler les epsilons.
- L'inégalité triangulaire est malmenée par un certain nombre de candidats...
- Les équivalents sont manipulés de manière approximative, voir fausse (la composition d'équivalents sans précaution est fréquente ainsi que le passage à l'exponentielle). Encore plus problématique, certains candidats ne voient pas le lien entre limites, équivalents et développements limités !
- On observe une obsession du « critère de Riemann ». Ce n'est pas une solution miracle à toutes les questions sur les convergences de séries et d'intégrales !
- Un certain nombre de candidats ne pensent pas à prendre la valeur absolue de la fonction à intégrer pour montrer la convergence d'une intégrale impropre.

Planche 1

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $Z = X + Y$. Justifier que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(Z = n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = n - i).$$

2. On lance un dé équilibré à six faces jusqu'à l'obtention d'un 6. Soit S_1 le nombre de lancers nécessaires. Donner la loi de S_1.
3. On lance maintenant ce dé jusqu'à l'obtention d'un deuxième 6. Soit S_2 le nombre total de lancers effectués. En utilisant la question 1, donner la loi de S_2.
4. Retrouver directement la loi de S_2 en utilisant un argument de dénombrement. En déduire de même la loi de S_k, nombre de lancers nécessaires pour obtenir k fois le nombre 6.
5. Calculer l'espérance et la variance de S_k en fonction de k.

Exercice 2 Soit $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une fonction continue avec $f(0) = 0$ et telle que

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \quad \text{pour tout } (x, y) \in [0, 1]^2.$$

On pose $x_0 \in [0, 1]$ et on définit par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que la suite (x_n) croissante (indication : utiliser l'inégalité avec $y = 0$).
2. Montrer que la suite $y_n = x_{n+1} - x_n$ est également croissante.
3. En déduire que la suite (y_n) est une suite constante.
4. Conclure que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.
5. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(0) = 0$?

Planche 2

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Un urne contient initialement une boule rouge et une boule bleue. On réalise une suite de tirages selon le protocole suivant : à chaque instant n, on tire une boule dans l'urne, on regarde sa couleur puis on la remet en rajoutant en plus dans l'urne une boule de la même couleur que celle juste tirée. On note R_n (resp. B_n) le nombre de boules rouges (resp. bleues) après le n-ième tirage. On part donc de $R_0 = B_0 = 1$.

1. Calculer la loi de du couple (R_1, B_1) puis du couple (R_2, B_2).
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par R_n (resp. B_n) ? Donner une relation liant R_n et B_n et n.
3. En procédant par récurrence, montrer que pour tout n, la variable aléatoire R_n suit une loi uniforme.
4. On note T_R le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule rouge. Calculer $P(T_R \geq k)$. Que vaut l'espérance de T_R ? On note de même T_B le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue. Les variables T_R et T_B sont elles indépendantes ?

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} dx$$

1. Trouver un réel $a > 0$ tel que pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin(x)| \geq a$.
2. En déduire qu'il existe $b, c > 0$ tel que $\frac{b}{(n+1)^\alpha} \leq u_n \leq \frac{c}{n^\alpha}$.
3. Pour quels valeurs de α l'intégrale $\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ est-elle convergente ?
4. Même question pour l'intégrale $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$