Ist $q_U : V \longrightarrow U$ irgendeine lineare Abbildung mit $\langle x - q_U(x), y\rangle = 0$ für $x \in V$ und $y \in U$, so hat man insbesondere $\langle p_U(x) - q_U(x), y\rangle = 0$ für $x \in V$ und $y \in U$. Da sich das Skalarprodukt von $V$ zu einem Skalarprodukt auf $U$ beschränkt, gilt notwendig $p_U(x) - q_U(x) = 0$ für $x \in V$ und damit $p_U = q_U$. □

Ist nun $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis eines euklidischen bzw. unitären $\mathbb{K}$-Vektorraums, so kann man zunächst $x_1$ normieren, also den Vektor $e_1 = |x_1|^{-1} \cdot x_1$ betrachten. Sodann kann man gemäß Lemma 4 die Projektion $p_1$ von $V$ auf den Untervektorraum $U_1 = \mathbb{K}e_1$ bilden. Der Vektor $e_2' = x_2 - p_1(x_2)$ ist dann orthogonal zu $e_1$, und $e_1$ bildet zusammen mit $|e_2'|^{-1} \cdot e_2'$ ein Orthonormalsystem $e_1, e_2$. Fährt man in dieser Weise fort, so kann man die Basis $x_1, \ldots, x_n$ orthonormalisieren, d. h. insgesamt in eine Orthonormalbasis überführen. Wir wollen dieses Resultat hier noch genauer formulieren und beweisen.

**Satz 5.** *Sei $\Phi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, und sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von $V$. Dann existieren eindeutig Vektoren $e_1, \ldots, e_n \in V$, so dass gilt:*

(i) *$e_1, \ldots, e_n$ ist eine Orthonormalbasis von $V$.*

(ii) *$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{K}e_i = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{K}x_i$ für $k = 1, \ldots, n$.*

(iii) *Für die Basiswechselmatrix $A_k = A_{\mathrm{id}, E_k, X_k}$ mit $E_k = (e_1, \ldots, e_k)$ und $X_k = (x_1, \ldots, x_k)$ gilt $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$.*[1]

*Genauer lassen sich die Vektoren $e_k$ für $k = 1, \ldots, n$ in induktiver Weise wie folgt konstruieren:*

$$e_k = |x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j\rangle e_j|^{-1} \cdot (x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j\rangle e_j).$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Existenzaussage und verwenden dabei Induktion nach $n$. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Sei also $n > 0$, und sei $e_1, \ldots, e_{n-1}$ eine Orthonormalbasis von $U_{n-1} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{K}x_i$, welche die gewünschten Eigenschaften besitzt. Man hat dann $x_n \notin U_{n-1} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{K}e_i$, so dass $x_n - p_{n-1}(x_n)$ von Null verschieden ist; $p_{n-1}: V \longrightarrow U_{n-1}$ sei die Projektion gemäß Lemma 4. Dann ist

$$e_n = |x_n - p_{n-1}(x_n)|^{-1} \cdot (x_n - p_{n-1}(x_n))$$

wohldefiniert, und es folgt mit Bemerkung 2 sowie Lemma 4, dass $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von $V$ bilden. Weiter besteht gemäß Definition von $e_n$ eine Gleichung des Typs

$$e_n = \alpha \cdot x_n + y$$

mit einer Konstanten $\alpha > 0$ und einem Vektor $y \in U_{n-1}$. Hieraus ergibt sich

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

und es folgt $\det A_n = \alpha \cdot \det A_{n-1} > 0$ wegen $\alpha, \det A_{n-1} > 0$.

[1] Gemäß unserer Konvention schließt $\det A_k > 0$ die Bedingung $\det A_k \in \mathbb{R}$ mit ein.