

KEDVENC FELADATAIM

1. Mi a sorozat következő eleme?

a.)  ...

b.) 1000, 22, 20, 13, 12, 11, ...

c.) 31, 41, 59, 26, 53, 58, ...

2. Tegyük fel, hogy sci-fi filmrendező vagy. A forgatókönyvben szerepel egy mindent elpusztító ágyúgolyó, amely bármin keresztül és sebességváltozás nélkül halad tovább; valamint egy lerombolhatatlan várfal, amit semmi sem tud áttörni. A film csúcspontján a mindent elpusztító ágyúgolyóval meglövik a lerombolhatatlan várfalat. Ezt hogyan rendeznéd meg?

3. András és Béla sakkoznak. Az ábrán a játszma aktuális állása látható. Mi volt az utolsó lépés? Tudnak egyáltalán sakkozni?



4. *Ezt a feladatot nem matematikai szépsége, hanem valós életbeni szerepe miatt szeretem:*

Zsákmányát szeretné igazságosan elosztani n rabló. A probléma az, hogy egyrészt ehhez nincs megfelelő mérőműszerük (pl. mérleg aranypor esetén), másrészt az "érték" szubjektív dolog. Hogyan lehetséges az elosztás úgy, hogy minden rabló azt higgye, hogy ő a zsákmány legalább $1/n$ -ed részét megkapta? (Feltesszük, hogy a zsákmány tetszőlegesen osztható, és hogy a rablók véleménye egy konkrét zsákmányhányadról az osztozkodás végéig nem változik.)

5. A Zsákbamaczka TV-s vetélkedő nyertese 3 ajtó közül választhat. A szabályok szerint egyik ajtó mögött autó várja, a másik kettő mögött vigaszdíj. A játékos választ egy ajtót. Ekkor a műsorvezető a papírjába néz, és kinyit egy másik ajtót, amely vigaszdíjat rejtett; továbbá felkínálja a játékosnak, hogy most utoljára még megváltoztathatja döntését. Érdemes-e változtatnia?

6. *Egy kis számtech:*

Mi a hiba az alábbi C programban?

```
void main()
{
    int a,b,c,*p,*q;
    p=&a;
    q=&b;
    *p=6;
    *q=3;
    c=*p/*q;
}
```

7. *Egy kis fizika:*

Egy vízszintesen rögzített lemezbe hegyesszögű háromszöget meghatározó 3 lyukat fúrunk. Mindhárom

lyukon átfűzünk 1-1 madzagot, melyeket a lemez fölött egy közös pontba összekötünk. A lemez alatti madzagvégekre pedig 1-1 egyenlő tömegű testet kötünk. Milyen nevezetes matematikai állítás következik az egyensúlyi helyzet vizsgálatából?

8. Igazoljuk, hogy $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

$$a, b, c \geq 0 \implies \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$$

9. Hozzuk zárt alakra geometriai bizonyítással az $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ összeget!

10. a.) Adott egy szakasz és egy vele párhuzamos, őt nem tartalmazó egyenes. Harmadoljuk meg csak vonalzó használatával a szakaszt!

b.) Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Állítsunk a pontból merőlegest az egyenesre minél kevesebb körzőzéssel!

11. \mathcal{C} gondolt 2 számra. Egyiket megsúgja \mathcal{A} -nak, a másikat megsúgja \mathcal{B} -nek. Ezután mindkettőjüknek elmondja, hogy mindkét szám 1 és 100 közötti egész, valamint egyik kétszerese a másiknak. Ezután a következő párbeszéd zajlik le \mathcal{A} és \mathcal{B} között:

\mathcal{A} : – Nem tudom a számodat.

\mathcal{B} : – Nem tudom a számodat.

\mathcal{A} : – Nem tudom a számodat.

\mathcal{B} : – Tudom már, a te számod $a(z)$...

Mit mondott \mathcal{B} ? Tudjuk-e, hogy mi az ő száma?

12. Délben a kör alakú városfal 12 óra napi ellenőrző útjára indul. Mindenki saját őrhelyéről indul az óramutató járásával megegyező vagy ellentétes irányba, és akkora állandó sebességgel halad, hogy 1 óra alatt tenne meg egy kört. Azonban ha két ór találkozik, akkor (“abban a pillanatban”) mindketten megfordulnak, és változatlan sebességgel haladnak tovább. Igazoljuk, hogy éjfélkor minden ór ugyanott lesz, ahonnan délben indult!

13. *Elérkeztünk kedvenc feladatomhoz:*

a.) Egy faluban 100 házaspár él. A férfiak okosak, továbbá a feleségükön kívüli összes nőről tudják, hogy hűtlenek-e vagy sem. A faluban tilos beszélni a nőkről és a hűtlenségről. Azonban ha egy férj rájön arra, hogy felesége megcsalta, akkor a következő hajnali 6 órakor a folyóba dobja őt a többi 99 férfi szeme láttára. Az eddigi tényeket a falu lakói is tudják. Egy napon vándor érkezik, és mindenki tudomására hozza, hogy van hűtlen nő a faluban. A vándor érkezése utáni első 99 hajnalon nem történik semmi rendkívüli, azonban a 100. hajnalon minden férfi beledobja a feleségét a folyóba. Hogyan derült fény az asszonyok hűtlenségére?

b.) Mi a vándor szerepe? Hiszen minden férfi minden nap lát 99 hűtlen asszonyt, így a vándor kijelentése a férfiak számára semmitmondó.

14. Tíz gonosz kalóz osztozkodik a zsákmányolt 100 talléron. Van közöttük egy mindannyiuk által ismert kegyetlenségi sorrend. Az ismert Kalóz Törvénykönyv alapján osztozkodnak. Eszerint először a legkegyetlenebb tesz javaslatot a zsákmány (melynek oszthatatlan egysége 1 tallér) szétosztására. Ezután szavaznak (a javaslattevő is), és ha legalább 50%-uk elfogadja az ajánlatot, akkor az alapján osztják szét a pénzt; ha nem, akkor megölik a javaslattevőt, és a második legkegyetlenebb lesz a javaslattevő, az életben maradtak ismét szavaznak, és így tovább. A kalózok “fontossági sorrendje” (melyről tudják, hogy mindannyiuk ez alapján dönt):

- túlélés
- minél több pénz szerzése
- minél több hulla.

Mi fog történni?

15. Igazoljuk, hogy minden $x \geq 2$ számra $\Pi(x) \geq \lfloor \ln x \rfloor$, ahol $\Pi(x)$ az x -nél nemnagyobb prímek száma, $\lfloor a \rfloor$ pedig az a szám (alsó) egészrésze.

16. Egy síkon általános helyzetű egyenes utak (azaz semelyik 2 nem párhuzamos, és minden metszéspontban 2 út találkozik) mentén egy-egy autó halad közös állandó sebességgel. Igazoljuk, hogy ha van két autó, amelyek minden más autóval találkoznak a megfelelő útkereszteződésekben, akkor bármely autó bármely másikkal is találkozik.