2.

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

(a) Yhdysjanan puolittavan suoran L pisteille z pätee

$$|z-a| = |z-b|.$$

Tällöin suoran L pisteille saadaan

$$|f(z)| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = 1, \quad z \in L.$$

Suora L kuvautuu yksikköympyrälle
(Vain pistettä 1 ei saavuteta, voidaan torm jatkaa $f(\infty) = 1$)

(b) Olkoon $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ polku siten, että sen kuva on L, $\gamma(\mathbb{R}) = L$. Piste etenee tasaisesti suoraa pitkin $|\gamma'(t)| = 1$ (voi olla mikä tahansa vakio).

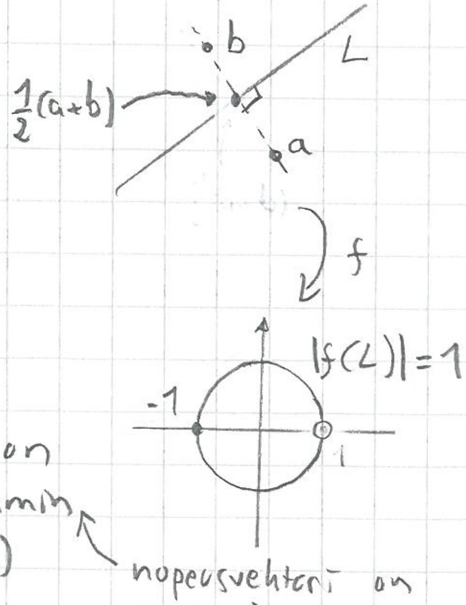
Suoran kuva $f \circ \gamma(t)$. Ketjusäännöllä saadaan nopeusvektorin kuva

$$(f \circ \gamma(t))' = (f' \circ \gamma(t)) \cdot \gamma'(t))$$

$$f'(z) = \frac{1}{z-b} - \frac{z-a}{(z-b)^2} = \frac{a-b}{(z-b)^2}$$

$$|(f \circ \gamma(t))'| = |f' \circ \gamma(t)||\gamma'(t)|$$

$$= \frac{|a-b|}{\underbrace{|z-b|^2}_{\substack{=|z-a| \\ z \in L}}} \quad ; \ |a-b| \text{ on vakio.}$$

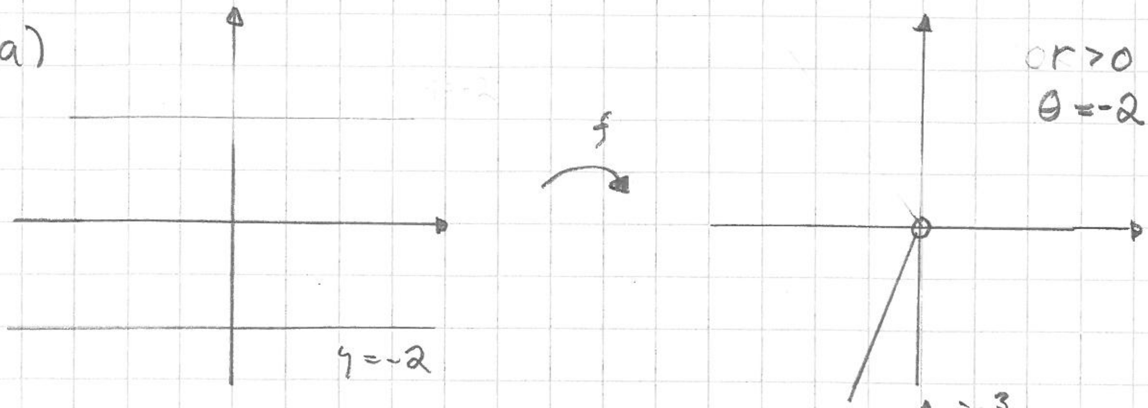


Eli mitä kauempana piste $z \in L$ on pisteistä a, b, niin sitä hitaammin edetään ympyrällä. Pisteen $-1 = f(\frac{1}{2}(a+b))$ ympäristössä edetään nopeudella ≈ 4 ja pisteen $1 = f(\infty)$ ympäristössä nopeudella ≈ 0.

nopeusvektori on pienempi.

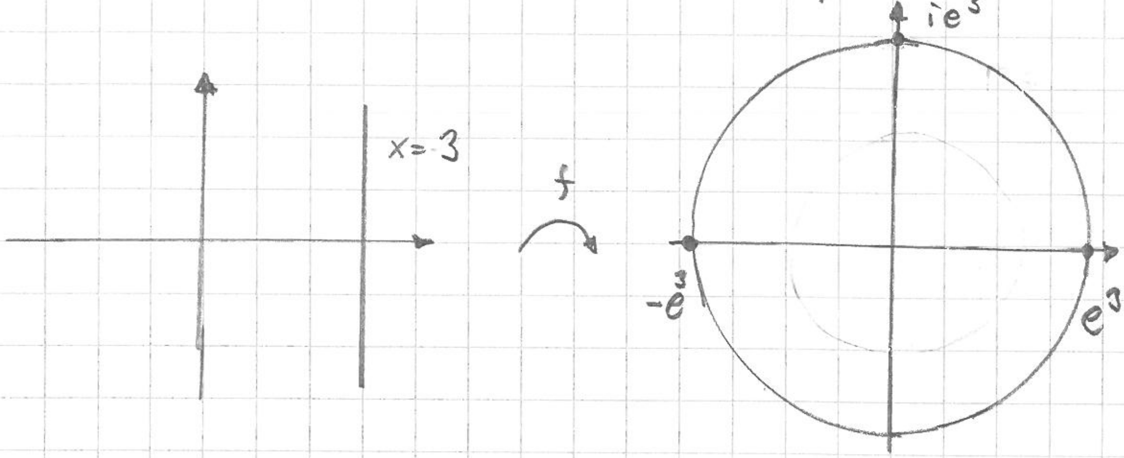
3. $f(z) = f(x+iy) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x}_{r}(\cos \underbrace{y}_{\theta} + i \sin y)$

(a)



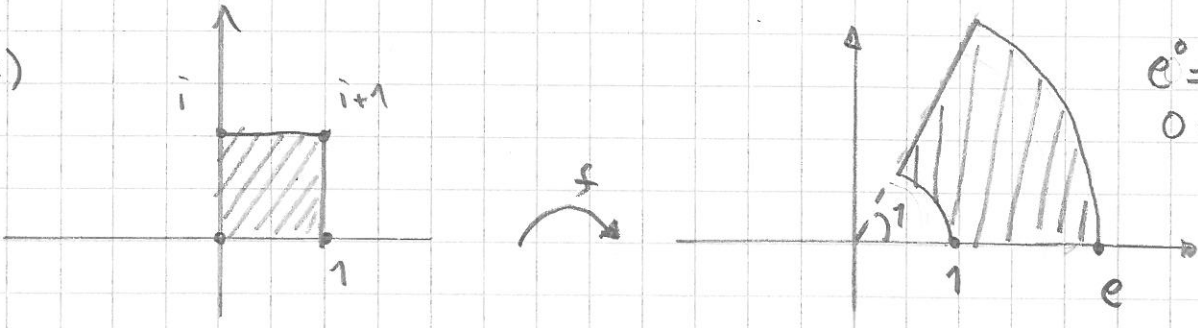
$r > 0$
$\theta = -2$

(b)



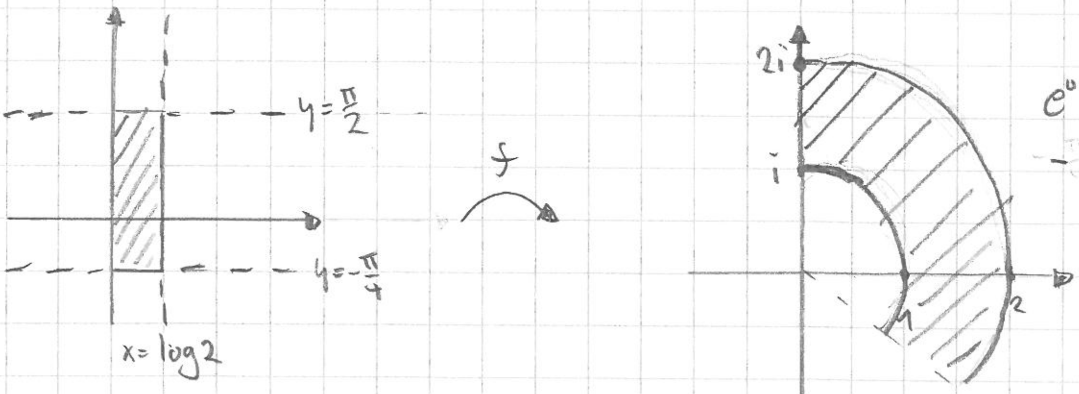
$r = e^3$
$\theta \in \mathbb{R}$

(c)



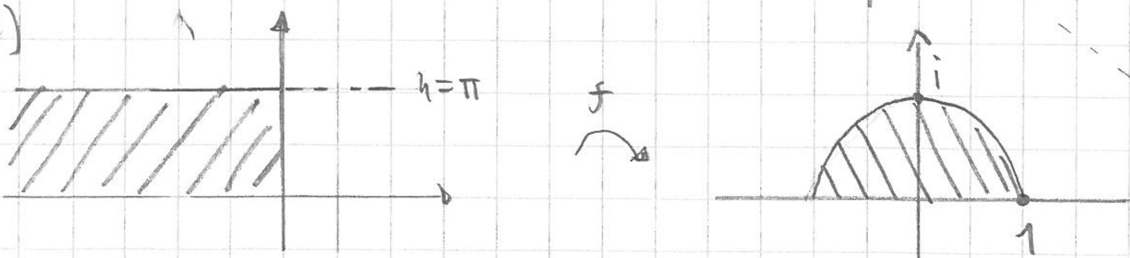
$e^0 = 1 \le r \le e$
$0 \le \theta \le 1$

(d)



$e^0 = 1 \le r \le 2 = e^{\log 2}$
$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(e)



$r \le e^0 = 1$
$0 \le \theta \le \pi$