Pisteet ja viivat

Jos uv on viiva, niin pisteet u ja v ovat viivan uv päätepisteet (endpoints) ja
u ja v ovat vierekkäisiä eli vieruspisteitä (neighbours, adjacent points).

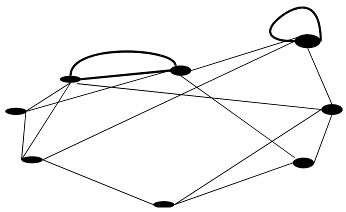
Piste on irtopiste (isolated point) jos sillä ei ole vieruspisteitä.

Viivat e_1 ja e_2 ovat vierekkäiset, jos niillä on yhteinen päätepiste.

Multigraafi

Multigraafi: Kahden pisteen välillä sallitaan yhtä useampi viiva ja viivan päätepisteet voivat olla samat

Multigraafissa muotoa uu olevia viivoja
Useita viivoja kahden eri pisteen välillä.
Jokainen graafi on myös multigraafi.



Graafin 2. määrittely

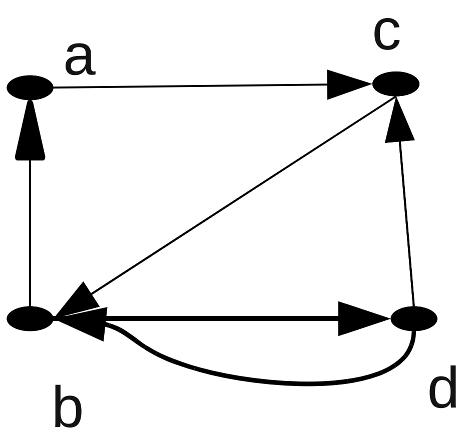
Toinen määrittely:
Graafi $\Leftrightarrow$ Yksinkertainen graafi (=Simple graph)
Multigraafi$\Leftrightarrow$ Graafi

Suunnattu graafi

Suunnattu graafi (Directed graph, Digraph) $D = (V, E)$ on järjestetty pari, missä V on äärellinen joukko ja $E \subseteq V \times V$. Lisäksi aina kun $(u, v) \in E$, on $u \neq v$.

Suunnatussa graafissa on viiva $uv \neq vu$, kun u ja v ovat eri pisteet.

Esimerkki suunnatusta graafista



Väritys ja etäisyys

Funktio $\alpha : V_G \to K$ on pisteiden väritys (vertex colouring)joukon K väreillä.

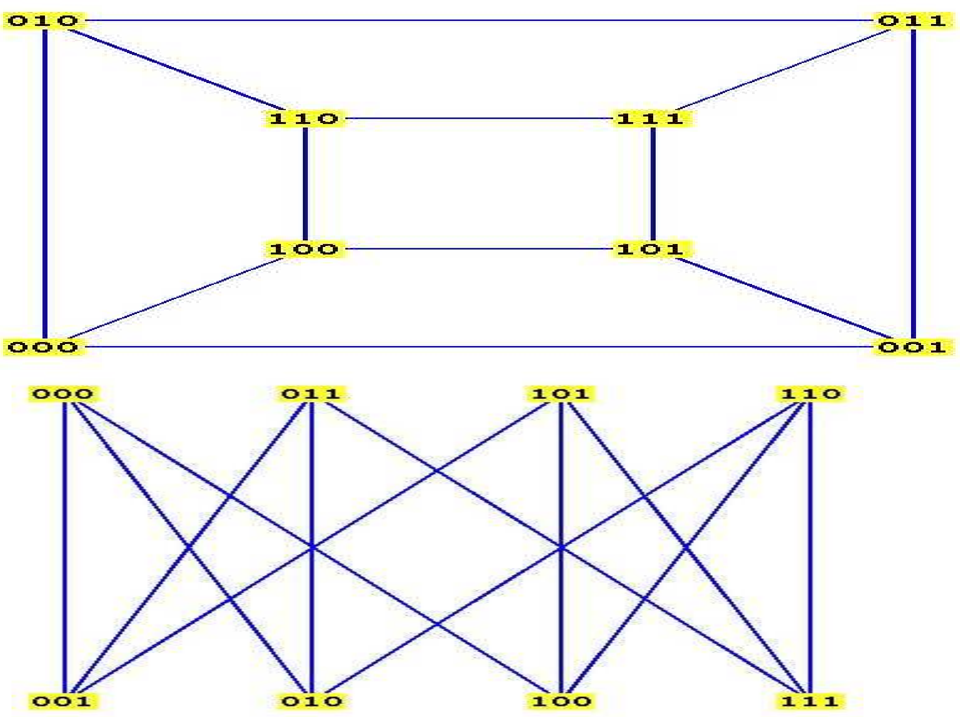
Funktio $\alpha : E_G \to K$ on viivojen väritys (edge colouring) joukon K väreillä. Yleensä $K = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Jos $K \subseteq \mathbb{R}$, niin α:aa kutsutaan myös paino- tai etäisyysfunktioksi.

Graafien isomorfia

Kaksi graafia G ja H ovat isomorfiset, merkitään $G \cong H$, jos on olemassa bijektio $\alpha : V_G \to V_H$, jolle $uv \in E_G$ jos ja vain jos $\alpha(u)\alpha(v) \in E_H$ aina kun $u, v \in V_G$.
Siis G ja H ovat pisteiden nimeämistä vaille yksinkäsitteisiä.

Esimerkki



Lukumääriä

Graafien ja ei-isomorfisten graafien lukumääriä:

Pisteitä	1	2	3	4	5	6	7	9
Graafeja	1	2	8	64	1 024	32 768	2 097 152	2^{36}
Ei-isomorfisia	1	2	4	11	34	156	1 044	27 668

9 / 30

Vieruspistematriisi

Graafi esitetään tietokoneessa useimmiten matriisin avulla.
Graafin $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vieruspistematriisi (adjacency matrix)on $n \times n$ matriisi $M = (M_{ij})$, missä n on G:n pisteiden lukumäärä ja

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i v_j \notin E, \\ 1 & v_i v_j \in E. \end{cases}$$

Vieruspistematriisi on aina symmetrinen.

Lause 9.1. Kaksi graafia ovat isomorfisia täsmälleen silloin kun niillä on yhteinen vieruspistematriisi. Kahdella isomorfisella graafilla on täsmälleen samat vieruspistematriisit.

10 / 30

Graafin aste

Graafin $G = (V, E)$ pisteen v naapurusto (neighbourhood) on joukko

$$N_G(v) = \{u \in V | vu \in E\}$$

Pisteen v aste (degree) graafissa G $deg_G(v)$ (lyhyemmin $deg(v)$) on v:n naapuruston pisteiden lukumäärä.

$$deg_G(v) = |N_G(v)|.$$

Irtopiste: $deg_G(v) = 0$
lehti, loppupiste (leaf, endpoint): $deg_G(v) = 1$

Handshaking lemma

Lause 9.2.(Euler 1736, Handshaking lemma):
Jokaiselle graafille $G = (V, E)$ on

$$\sum_{v \in G} deg_G(v) = 2|E|$$

eli G:n pisteiden asteiden summa on kaksi kertaa G:n viivojen lukumäärä. Lisäksi parittoman asteen omaavien pisteiden lukumäärä on aina parillinen

Tod. ...

Graafityyppejä

Graafi on nollagraafi, jos se ei sisällä yhtään pistettä.
Graafi on triviaali (trivial), jos se sisältää korkeintaan yhden pisteen.

Graafi $G = K_V$ on täydellinen graafi pistejoukossa V, jos se sisältää kaikki mahdolliset viivat eli jokainen piste on kaikkien muiden pisteiden vieruspiste.

Kaikki täydelliset n pistettä sisältävät graafit ovat isomorfisia. Niitä merkitään K_n:llä.
Selvästi

$$|E_{K_n}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$|E_G| \leq \frac{n(n-1)}{2} \text{ aina kun } G \text{ on } n\text{:n pisteen graafi}, n \geq 1.$$

Graafin komplementti

Graafin G komplementti (complement)on graafi $\overline{G}$, missä
$V_{\overline{G}} = V_G$ ja $E_{\overline{G}} = \{e \in E(V) | e \notin E_G\}$.

Täydellisten graafien komplementteja $\overline{K}_n$ kutsutaan erillisiksi graafeiksi (discrete graphs).

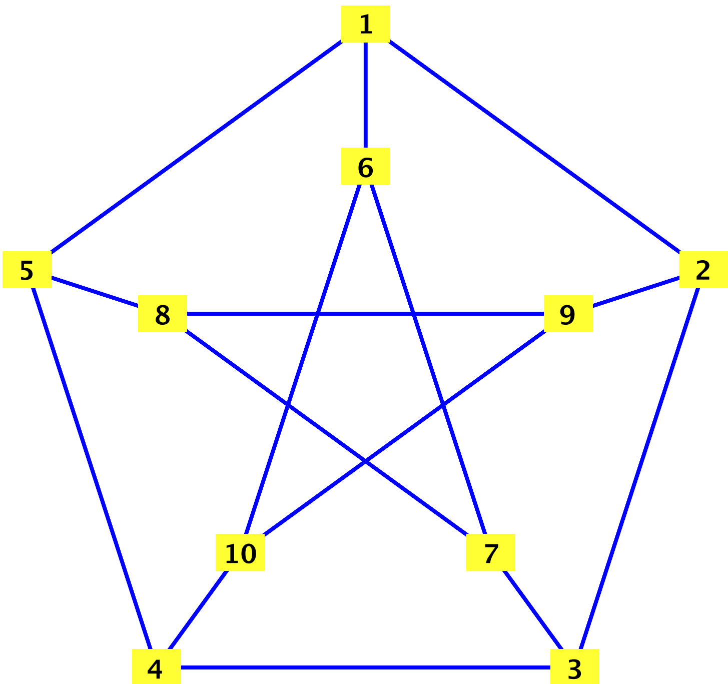
Säännöllinen graafi

Graafi on säännöllinen (regular), jos jokaisella graafin pisteellä on sama aste.

Jos tämä aste on r, niin graafia kutsutaan r-säännölliseksi (r-regular).

Erillinen graafi on 0-säännöllinen.
K_n on $n-1$-säännöllinen.

Petersenin graafi



Petersenin graafi on 3-säännöllinen.

Kaksijakoinen graafi

Kaksijakoinen(bipartite) graafi $G = (V, E)$:

pistejoukolla V on sellainen ositus X, Y, että
jokaisen viivan $uv \in E$ toinen päätepiste on joukon X ja toinen päätepiste joukon Y piste.

Silloin (X, Y) on graafin G kaksijako (bipartition of G) ja G on (X, Y)-kaksijakoinen ((X, Y)-bipartite).

Kaksijakoiset graafit 2

Kaksijakoinen graafi $G = (V, E)$ on täydellinen (m, k)-kaksijakoinen graafi (complete (m, k)-bipartite graph), jos

$|X| = m$, $|Y| = k$ ja $uv \in E$ aina kun $u \in X$ ja $v \in Y$.

Kaikki täydelliset (m, k)-kaksijakoiset graafit ovat isomorfisia keskenään. Merkitään niitä $K_{m,k}$:lla

Graafi on täydellinen kaksijakoinen graafi, jos se on täydellinen (m, k)-kaksijakoinen graafi jollain luvuilla m, k.
Graafi $K_{1,n}$ on tähti (star).

Määritelmiä

Määritelmä.

Graafi $H = (V_H, E_H)$ on graafin $G = (V_G, E_G)$ aligraafi (subgraph), jos $V_H \subseteq V_G$ ja $E_H \subseteq E_G$.
Silloin merkitään $H \subseteq G$.

Jos $H \subseteq G$ ja $V_H = V_G$, niin H on G:n virittävä aligraafi (spanning subgraph).

Viivojen osajoukko $F \subseteq E_G$ muodostaa yksikäsitteisen graafin G virittävän aligraafin

$$G[F] = (V_G, F).$$

Indusoitu aligraafi

Jos $H \subseteq G$ ja $E_H = E_G \cap E(V_H)$ (eli H sisältää kaikki G:n viivat, joiden molemmat päätepisteet ovat V_H:n pisteitä), niin H on pistejoukon V_H indusoima G:n aligraafi (induced subgraph).

Pistejoukolla $A \subseteq V_G$ on olemassa yksikäsitteinen G:stä indusoitu aligraafi

$$G[A] = (A, E_G \cap E(A)).$$

Polut

Sovelluksissa usein oleellista:
Pisteiden läpikäyminen (esimerkiksi etsintäalgoritmit)
Pisteiden välinen etäisyys (esimerkiksi sähköpostin kulkemien solmukoneiden lukumäärä)

Kulku

Olkoot $e_i = u_i u_{i+1} \in E_G$ graafin G viivoja aina kun $i = 1, 2, \ldots, k$.

Viivat e_i ja e_{i+1} ovat vierekkäisiä, sillä niillä on yhteinen päätepiste u_{i+1}.

Jono $W = e_1 e_2 \cdots e_k$ on k:n pituinen **kulku** (walk) pisteestä u_1 pisteeseen u_{k+1}

Kulusta käytetään myös merkintöjä

$$W : u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k \to u_{k+1},$$

ja $W : u_1 - u_2 - \cdots - u_{k+1}$ sekä $W : u_1 \xrightarrow{k} u_{k+1}$.

$u_1 \xrightarrow{*} u_{k+1}$: On olemassa kulku pisteestä u_1 pisteeseen u_{k+1}.

$W : u_1 \xrightarrow{*} u_{k+1}$ tarkoittaa aina tiettyä kulkua $W = e_1 e_2 \cdots e_k$.

Kulun W pituutta merkitään $|W|$:llä.

Polku ja piiri

Kulku $W = e_1 e_2 \cdots e_k$ ($e_i = u_i u_{i+1}$) on
a)**suljettu** (closed), jos $u_1 = u_{k+1}$,

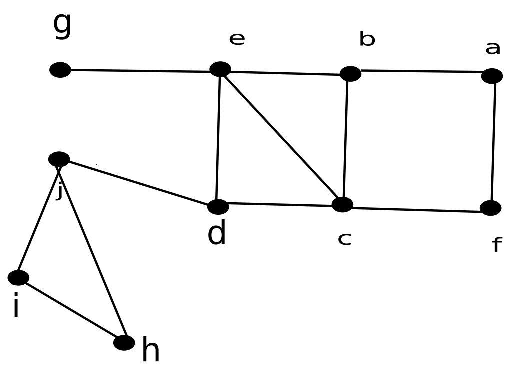
b)**polku** (path), jos $u_i \neq u_j$ aina kun $i \neq j$,

c) **reitti** (trail),jos $e_i \neq e_j$ aina kun $i \neq j$,

d) **piiri** (cycle), jos $u_1 = u_{k+1}$ ja muulloin $u_i \neq u_j$ aina kun $i \neq j$,

e)**triviaali polku** (trivial path), jos $|W| = 0$.

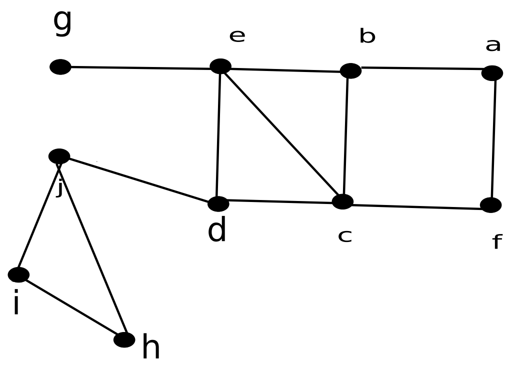
Esimerkki kuluista



Kulku, joka ei ole reitti:
$g \to e \to d \to c \to b \to e \to d$

Kulku, joka ei ole polku:
$g \to e \to d \to c \to b \to e \to c$

Esimerkki jatkoa:



Polkuja $b \xrightarrow{*} d$:
$b \to e \to d, b \to e \to c \to d$
$b \to c \to d, b \to c \to e \to d$
$b \to a \to f \to c \to d$ ja $b \to a \to f \to c \to e \to d.$

Piiri:
$b \to a \to f \to c \to b$
$b \to a \to f \to c \to e \to d \to c \to b$ ei ole piiri

27 / 30

Käsitteitä

Kulun $W : u = u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{k+1} = v$ käänteiskulku (inverse of W) on kulku

$$W^{-1} : v = u_{k+1} \to u_k \to \cdots \to u_1 = u.$$

Piste u on kulun P päätepiste (end of P), jos P alkaa tai päättyy pisteeseen u.

Polut P ja Q ovat erilliset (disjoint), jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä (eikä siis myöskään yhteisiä viivoja) ja riippumattomat (independent), jos vain niiden päätepisteet ovat samat.

28 / 30

Käsitteitä 2

Polun P käänteispolku P^{-1} on polku.
Kahden polun yhdiste ei välttämättä ole polku.

Graafi (tai aligraafi) P_k on graafi joka muodostuu $k-1$:sen pituisesta polusta ($k-1$ viivaa, k pistettä).

Graafi (tai aligraafi) C_k on k:n pituinen piiri.

Jos k on parillinen, niin polkua P_k (piiriä C_k) kutsutaan parilliseksi poluksi (parilliseksi piiriksi).

Jos k on pariton, niin P_k (vastaavasti C_k) on pariton polku (piiri).

29 / 30

Lause 9.3.

Lause 9.3. Aina kun $W : u \overset{*}{\to} v$ on kulku ja $u \neq v$, niin on olemassa polku $P : u \overset{*}{\to} v$, joka on saatu W:stä poistamalla siitä pisteitä ja viivoja.

Tod. ...

30 / 30