Todennäköisyyslaskenta: Liitteet

Sisällys

1.1. Joukko-opin peruskäsitteet

Tässä kappaleessa esitellään *naiivin* **joukko-opin peruskäsitteet joukko** ja sen **alkiot**, **joukkoon kuuluminen**, **perusjoukko**, **tyhjä joukko** sekä **osajoukko**.

Joukkojen määritteleminen

Joukko on joukon **alkioiksi** kutsuttujen *olioiden kokoelma*. Sanomme, että joukko on **hyvin määritelty**, jos *jokaisesta oliosta voidaan sanoa onko se joukon alkio vai ei*. Joukko on siis hyvin määritelty, jos *sen alkiot tunnetaan*. On syytä huomata, että joukkoja määriteltäessä on aina syytä spesifioida **perusjoukko**, jonka alkioita kaikkien tarkasteltavien olioiden on oltava.

Merkitsemme *joukkoja* tavallisesti isoilla kirjaimilla

$$A, B, C, \ldots, X, \ldots$$

ja joukon alkiota pienillä kirjaimilla

$$a, b, c, \ldots, x, \ldots$$

Jos joukko on **äärellinen**, se voidaan määritellä luettelemalla sen alkiot. Jos äärellisen joukon X alkiot ovat

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

niin merkitsemme

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Esimerkki 1. Joukko ja sen alkiot.

Rahanheiton tulosvaihtoehdot ovat kruuna ja klaava. Siten voimme määritellä rahanheiton tulosvaihtoehtojen joukon S kirjoittamalla

$$S = \{\text{Kruuna}, \text{Klaava}\}$$

Joukko määritellään usein **kuvailemalla sen alkioiden ominaisuudet**. Alkioiden ominaisuudet määrittelevä lause kirjoitetaan tavallisesti lainausmerkkien väliin:

A = ”Joukon A alkioiden ominaisuudet määrittelevä lause”

Esimerkki 2. Joukkojen määritteleminen.

Määritellään seuraavat joukot:

A = ”Teknilliseen korkeakouluun vuonna 2005 hyväksyttyjen uusien opiskelijoiden joukko”

B = ”Lottoarvonnan tulosvaihtoehtojen joukko”

C = ”Yhtälön $\sin(x) = 0$ ratkaisujen joukko, kun x on reaaliluku”

D = ”Yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisujen joukko, kun x on kompleksiluku”

Matematiikassa joukko määritellään tavallisesti antamalla **looginen ehto**, jonka sen alkioiden on toteutettava. Jos A on niiden *perusjoukon* S alkioiden x joukko, jotka *toteuttavat ehdon* $P(x)$ eli joille *lause* $P(x)$ *on tosi*, niin kirjoitamme

$$A = \{x \in S \mid P(x)\}$$

Esimerkki 3. Joukon määritteleminen ehtolauseen avulla.

Olkoon A niiden reaalilukuparien (x, y) joukko, jotka toteuttavat ehdon

$$x^2 + y^2 = 1$$

Joukko A on siis origokeskisen yksikkösäteisen ympyrän kehän pisteiden joukko tasossa. Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

jossa $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko.

Joukon ja sen alkioiden suhde on **joukko-opin perusrelaatio**. Jos *x on joukon A alkio* eli *x* **kuuluu** *joukkoon A*, niin merkitsemme

$$x \in A$$

Jos *x ei ole joukon A alkio* eli *x* **ei kuulu** *joukkoon A*, niin merkitsemme

$$x \notin A$$

Esimerkki 4. Relaatio *kuulua joukkoon*.

Olkoon

$$A = \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

jossa $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko. Esimerkiksi lukupari

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \in A$$

koska

$$\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

Sen sijaan lukupari

$$(1,1) \notin A$$

koska

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

Numeroituvat joukot

Jos joukon alkiot *voidaan järjestää jonoon*, sanomme joukkoa **numeroituvaksi**. *Äärelliset* joukot ovat aina numeroituvia. *Äärettömiä* numeroituvia joukkoja sanotaan **numeroituvasti äärettömiksi**.

Esimerkki 1. Luonnollisten lukujen, kokonaislukujen ja rationaalilukujen joukot.

Voidaan osoittaa, että sekä *luonnollisten lukujen* joukko

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

kokonaislukujen joukko

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

että *rationaalilukujen* joukko

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \,\middle|\, q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

ovat *numeroituvasti äärettömiä* ja siis *yhtä mahtavia*, millä tarkoitetaan sitä, että joukkojen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ välille voidaan määritellä kääntäen yksikäsitteiset kuvaukset eli *bijektiot*; lisätietoja bijektiivisistä kuvauksista: ks. tämän liitteen kappaletta **Funktiot**.

Monet numeroituvasti äärettömät joukot voidaan määritellä *luettelemalla* niiden alkioiden muodostamasta jonosta *muutama ensimmäisen alkio*.

Esimerkki 2. Lukujoukkojen määritteleminen.

$\{1, 3, 5, \ldots\}$ = *Parittomien* positiivisten kokonaislukujen joukko

$= \{k \in \mathbb{N} \mid k = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$

$\{2, 4, 6, \ldots\}$ = *Parillisten* positiivisten kokonaislukujen joukko

$= \{k \in \mathbb{N} \mid k = 2n+2, n \in \mathbb{N}\}$

Ylinumeroituvat joukot

Jos joukko on *ääretön* ja sen alkioita *ei voida järjestää jonoon*, sanomme joukkoa **ylinumeroituvaksi**.

Esimerkki 1. Reaalilukujen ja kompleksilukujen joukot.

Voidaan osoittaa, että *reaalilukujen* joukko

$$\mathbb{R}$$

ja *kompleksilukujen* joukko

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}$$

ovat *ylinumeroituvia*. Joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat *yhtä mahtavia* ja lisäksi *aidosti mahtavampia* kuin luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$.

Joukkojen samuus

Joukot ovat **samat**, jos niillä on samat alkiot. Siten joukot A ja B ovat samat, jos jokaiselle oliolle s pätee:

$$s \in A \Leftrightarrow s \in B$$

Merkitsemme sitä, että joukot A ja B ovat samat seuraavasti:

$$A = B$$

Esimerkki 1. Joukkojen samuus.

Olkoon A yhtälön

$$x^2 = 4$$

ratkaisujen joukko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 4 \right\}$$

Olkoon

$$B = \{-2, +2\}$$

Tällöin

$$A = B$$

Osajoukko

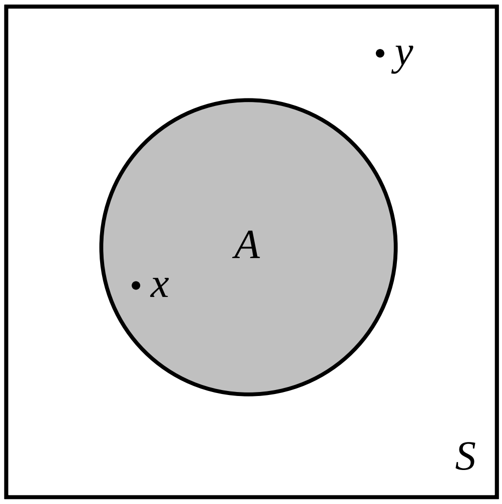
Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja. Jos jokainen joukon B alkio on myös joukon A alkio eli

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

niin joukko B on joukon A **osajoukko** ja merkitsemme

$$B \subset A$$

Venn-diagrammit



Joukko-opin käsitteitä ja operaatioita voidaan havainnollistaa ns. **Venn-diagrammien** avulla.

Venn-diagrammin konstruointi:

(i) Kuvataan perusjoukkoa *suorakaiteella*.

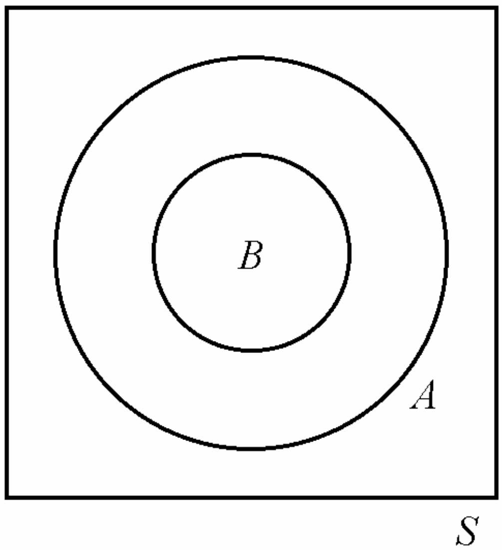
(ii) Kuvataan perusjoukon osajoukkoja *suorakaiteen osa-alueilla*.

Ylemmässä kuvassa oikealla havainnollistetaan sitä, että joukko A on perusjoukon S osajoukko. Lisäksi kuvassa havainnollistetaan sitä, että perusjoukon S alkio x *kuuluu* joukkoon A:

$$x \in A$$

ja perusjoukon S alkio y *ei kuulu* joukkoon A:

$$y \notin A$$



Alemmassa kuvassa oikealla havainnollistetaan sitä, että joukko B on joukon A osajoukko:

$$B \subset A$$

Esimerkki 1. Parillisten positiivisten kokonaislukujen muodostama joukko.

Joukko

$$C = \{k \in \mathbb{N} \mid k = 2n + 2 \, , n \in \mathbb{N}\}$$

on parillisten positiivisten kokonaislukujen muodostama joukko. Olkoon

$$D = \{2, 4, 1024, 2^{100}\}$$

Tällöin

$$D \subset C$$

Tyhjä joukko

Joukko on **tyhjä**, jos siinä ei ole yhtään alkiota. Merkitsemme tyhjää joukkoa symbolilla

$$\varnothing$$

Tyhjä joukko on kaikkien joukkojen osajoukko. Siis, jos A on perusjoukon S mielivaltainen osajoukko, niin

$$\varnothing \subset A$$

Perusjoukko

Kuten edellä kohdassa **Joukkojen määritteleminen** todettiin, *joukkoja on sekaannusten ja väärinkäsitysten välttämiseksi aina syytä tarkastella jonkin hyvin määritellyn* **perusjoukon** *osajoukkoina*. Merkitsemme perusjoukkoa usein kirjaimella S.

Esimerkki 1. Perusjoukon eksplisiittisen tai implisiittisen määrittelemisen tärkeys.

Jos kirjoitetaan

$$A = \{x \mid x^2 = -1\}$$

niin joukko A ei ole hyvin määritelty, koska emme tunne perusjoukkoa. Jos sen sijaan kirjoitamme

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$$

jossa $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko, niin tiedämme, että

$$B = \varnothing$$

ja jos kirjoitamme

$$C = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1\}$$

jossa $\mathbb{C}$ on kompleksilukujen joukko, niin tiedämme, että

$$B = \{+i, -i\}$$

jossa

$$i = \sqrt{-1}$$

Ongelmat joukon käsitteen naiivissa määritelmässä

Tässä esityksessä joukko on määritelty *kokoelmana joukon alkioiksi sanottuja olioita*. Tämä **naiivin joukko-opin** määritelmä joukolle *ei ole* matemaattisesti täsmällinen, koska se on *kehämääritelmä*:

Kokoelma ~ Joukko

Joukon käsitteen epätäsmällisestä määrittelemisestä seuraa se, että *naiivissa joukko-opissa* on mahdollista määritellä joukkoja, joilla on *ristiriitaisia* ominaisuuksia; ks. seuraavaa kappaletta.

Naiivin joukko-opin paradoksit

Naiivissa joukko-opissa voidaan johtaa useita erilaisia *paradokseja*. Kaikki naiivin joukko-opin paradoksit perustuvat siihen, että naiivissa joukko-opissa voidaan *määritellä* joukkoja, joilla on *ristiriitaisia ominaisuuksia*. Tämä merkitsee sitä, että naiivi joukko-oppi suhtautuu *liian vapaamielisesti* joukkojen määrittelemiseen.

Esimerkki 1. Russellin paradoksi.

Joukot eivät ole yleensä itsensä alkioita. Olkoon Z kaikkien niiden joukkojen joukko, jotka eivät ole itsensä alkiota:

$$Z = \left\{ X \mid X \notin X \right\}$$

Kysymys: Onko joukko Z itsensä alkio vai ei?

Kysymykseen voidaan antaa kaksi vastausta, joihin kumpaankin sisältyy *ristiriita*:

(i) Jos Z *on* joukon Z alkio, Z *ei kuulu* joukkoon Z joukon Z määritelmän mukaan.

(ii) Jos Z *ei ole* joukon Z alkio, Z *kuuluu* joukkoon Z joukon Z määritelmän mukaan.

Joukon Z määritelmästä johdettua *ristiriitaa* kutsutaan **Russellin paradoksiksi**.

Joukko-opin paradoksit *vältetään*, jos ristiriitaisilla ominaisuuksilla varustettujen joukkojen määritteleminen *estetään*. Ristiriitaisilla ominaisuuksilla varustettujen joukkojen määritteleminen voidaan estää esittämällä joukko-oppi sopivalla tavalla *aksiomaattisena järjestelmänä*.

Koska naiivi joukko-oppi kuitenkin riittää perustaksi kaikissa joukko-opin *tavanomaisissa sovelluksissa*, tässä esityksessä ei käytetä aksiomaattista esitystapaa.

1.2. Joukko-opin perusoperaatiot

Olkoot joukot A ja B perusjoukon S *osajoukkoja*.

Tarkastelemme tässä kappaleessa seuraavien joukoista A ja B *johdettujen* perusjoukon S osajoukkojen määrittelemistä:

(i) Joukon A **komplementtijoukko**.

(ii) Joukkojen A ja B **unioni** eli **yhdiste**.

(iii) Joukkojen A ja B **leikkaus**.

(iv) Joukkojen A ja B **erotus**.

(v) Joukkojen A ja B **symmetrinen erotus**.

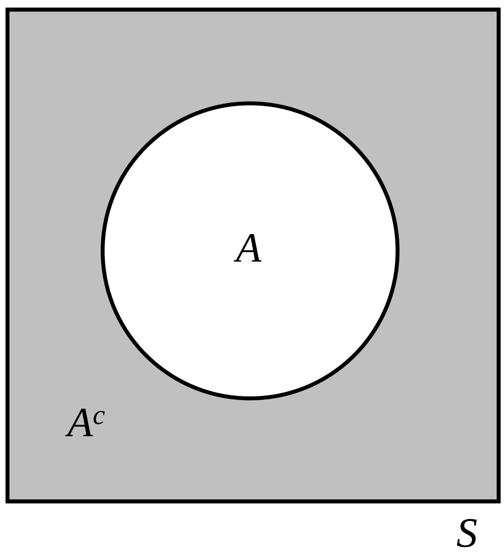
Komplementtijoukko

Olkoon joukko A perusjoukon S osajoukko.

Joukon A **komplementti** A^c on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *eivät kuulu* joukkoon A:

$$A^c = \left\{ x \in S \mid x \notin A \right\}$$

Ks. kuvaa oikealla.



Esimerkki 1.

Olkoon

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ja

$$A = \{1, 3, 6\}$$

Tällöin

$$A^c = \{2, 4, 5\}$$

Lause 1.

$$(A^c)^c = A$$

Todistus:

$$x \in (A^c)^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A^c \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$$

■

Yhdiste

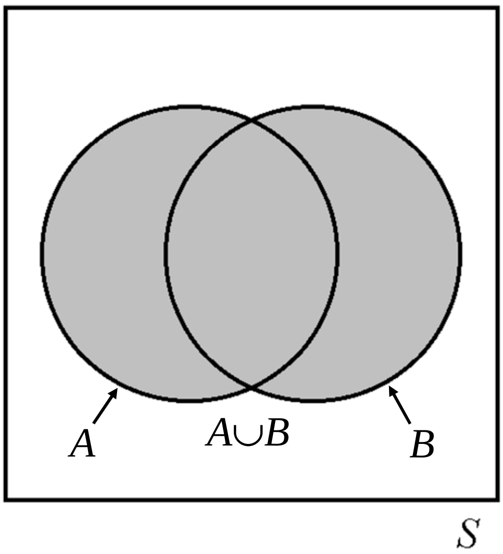
Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja.

Joukkojen A ja B **unioni** eli **yhdiste** $A \cup B$ on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A *tai* joukkoon B:

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$$

Ks. kuvaa oikealla.

Huomaa, että sana *tai* tarkoittaa tässä sitä, että perusjoukon S alkio x saa kuulua joukkoon A *tai* joukkoon B *tai molempiin*.



Esimerkki 2.

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

ja

$$B = \{2, 3\}$$

Tällöin

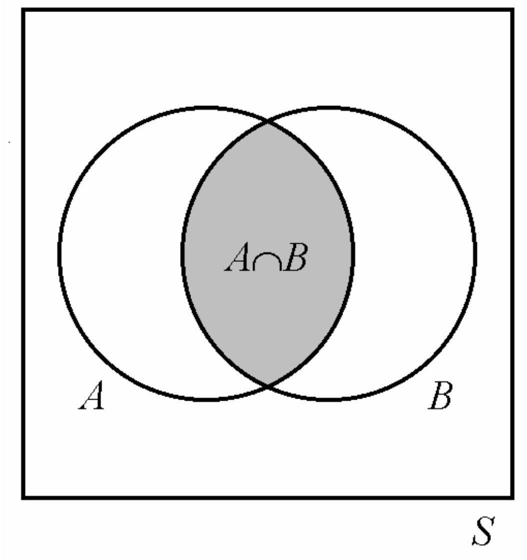
$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

Leikkaus

Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja.

Joukkojen A ja B **leikkaus** $A \cap B$ on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A *ja* joukkoon B:

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$$



Ks. kuvaa oikealla.

Esimerkki 3.

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

ja

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Tällöin

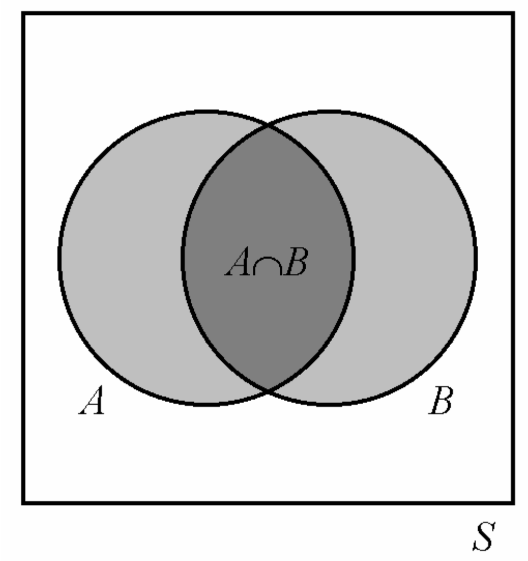
$$A\cap B = \{2\}$$

De Morganin lait

De Morganin lakien mukaan *yhdiste* voidaan määritellä leikkauksen ja komplementin avulla ja *leikkaus* voidaan määritellä yhdisteen ja komplementin avulla. Tämä merkitsee sitä, että toinen operaatioista yhdiste ja leikkaus on joukko-opin operaationa *redundantti*.

Lause 2.

$$A\cup B = (A^c\cap B^c)^c$$



Todistus:

$$\begin{aligned}
& x\in (A^c \cap B^c)^c && \Leftrightarrow \\
& x\notin A^c \cap B^c && \Leftrightarrow \\
& x\notin A^c \ tai \ x\notin B^c && \Leftrightarrow \\
& x\in A \ tai \ x\in B && \Leftrightarrow \\
& x\in A\cup B &&
\end{aligned}$$

■

Lause 3.

$$A\cap B = (A^c\cup B^c)^c$$

Todistus:

$$\begin{aligned}
& x\in (A^c \cup B^c)^c && \Leftrightarrow \\
& x\notin A^c \cup B^c && \Leftrightarrow \\
& x\notin A^c \ ja \ x\notin B^c && \Leftrightarrow \\
& x\in A \ ja \ x\in B && \Leftrightarrow \\
& x\in A\cap B &&
\end{aligned}$$

■

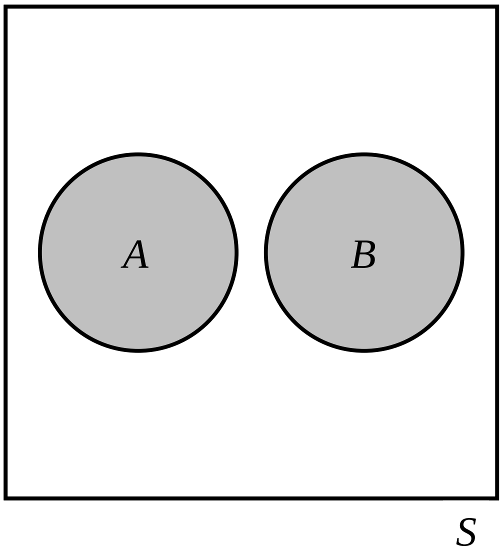
Pistevieraat joukot

Jos

$$A\cap B = \varnothing$$

niin sanomme, että joukot A ja B ovat **pistevieraita**. Pistevierailla joukoilla *ei ole* yhteisiä alkioita.

Ks. kuvaa oikealla.



Esimerkki 1.

Olkoon

$$A = \{1, 3\}$$

ja

$$B = \{2, 4\}$$

Tällöin

$$A \cap B = \varnothing$$

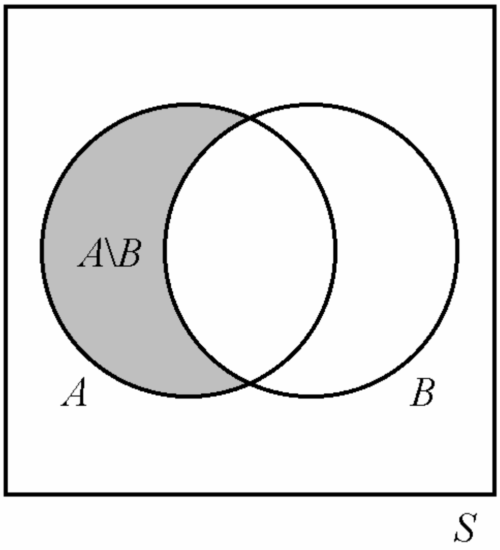
Erotus

Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja.

Joukkojen A ja B **erotus** $A\backslash B$ on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A, *mutta eivät kuulu* joukkoon B:

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

Ks. kuvaa oikealla.



Esimerkki 1.

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

ja

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Tällöin

$$A\backslash B = \{1\}$$

ja

$$B\backslash A = \{3, 4\}$$

Erotus voidaan määritellä leikkauksen ja komplementin avulla;

Lause 4.

$$A\backslash B = A \cap B^c$$

Todistus:

$$x \in A \setminus B \quad \Leftrightarrow$$

$$x \in A \text{ ja } x \notin B \quad \Leftrightarrow$$

$$x \in A \text{ ja } x \in B^c \quad \Leftrightarrow$$

$$x \in A \cap B^c$$

■

Lauseesta 1 seuraa, että erotus on joukko-opin operaationa *redundantti*. Toisaalta *komplementti* voidaan määritellä erotuksen avulla:

Lause 5.

$$A^c = S \setminus A$$

Todistus:

$$x \in A^c \quad \Leftrightarrow \quad x \in S \text{ ja } x \notin A \quad \Leftrightarrow \quad x \in S \setminus A$$

■

Yhdiste pistevieraiden joukkojen yhdisteenä

Joukkojen A ja B *yhdiste*

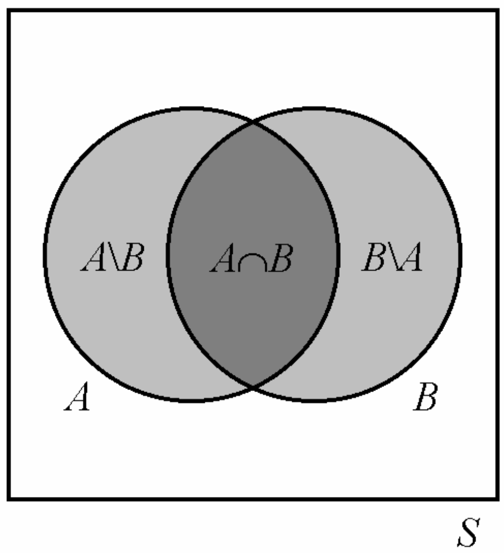
$$A \cup B$$

voidaan esittää *pareittain pistevieraiden joukkojen*

$$A \setminus B\,,\ B \setminus A\,,\ A \cap B$$

yhdisteenä:

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (B \setminus A) \\ &= B \cup (A \setminus B) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

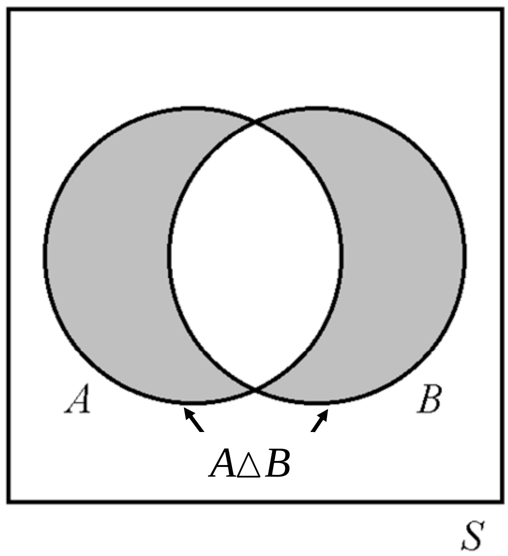


Symmetrinen erotus

Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja.

Joukkojen A ja B **symmetrinen erotus** $A \triangle B$ on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka kuuluvat *joko* joukkoon A *tai* joukkoon B, *mutta eivät kuulu molempiin*:

$$A \triangle B = \{x \in S \mid \textit{joko } x \in A \textit{ tai } x \in B, \\ \textit{mutta } x \notin A \cap B\}$$



Esimerkki 1.

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

ja

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Tällöin

$$A \triangle B = \{1, 3, 4\}$$

Symmetrinen erotus voidaan määritellä usealla eri tavalla muiden joukko-opin operaatioiden avulla. Siten symmetrinen erotus on joukko-opin operaationa *redundantti*.

Lause 6.

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Todistus:

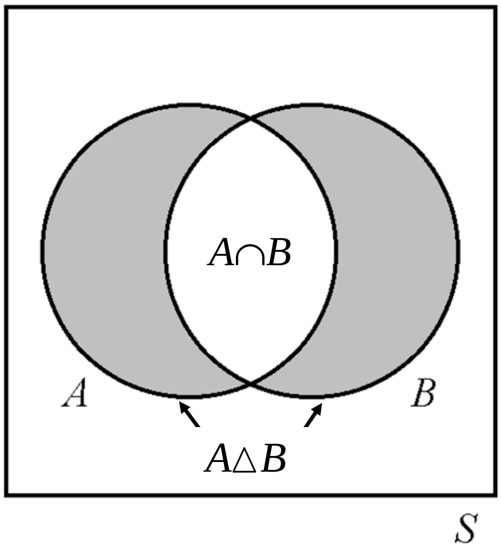
$x \in A \triangle B \Leftrightarrow$

$x \in A \text{ tai } x \in B, \text{ mutta } x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

$x \in A \cup B, \text{ mutta } x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

■



Lause 7.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Perustelu:

$x \in A \triangle B \Leftrightarrow$

$x \in A \text{ tai } x \in B, \text{ mutta } x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

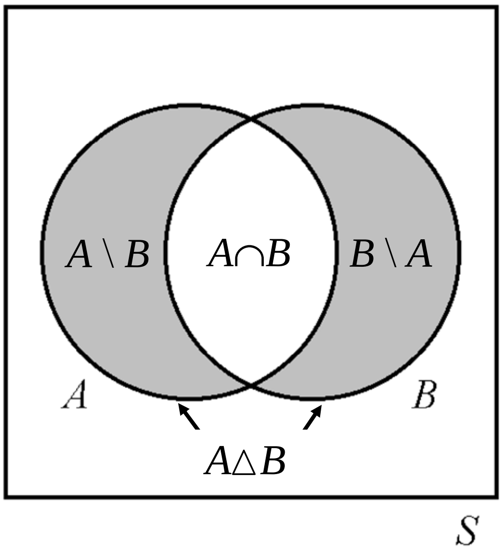
$x \in A, \text{ mutta } x \notin B \text{ tai}$

$\quad x \in B, \text{ mutta } x \notin A \Leftrightarrow$

$x \in A \setminus B \text{ tai } x \in B \setminus A \Leftrightarrow$

$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

■



1.3. Joukko-opin laskusäännöt

Tähän kappaleeseen on koottu tärkeimmät **osajoukkorelaation ominaisuudet** sekä tärkeimmät **laskusäännöt joukko-opin perusoperaatioille**.

Osajoukko-relaatio ja joukko-opin operaatiot

(1) $A \subset A$

(2) $A \subset B$ ja $B \subset A \;\Rightarrow\; A = B$

(3) $A \subset B$ ja $B \subset C \;\Rightarrow\; A \subset C$

(4a) $A \subset (A \cup B)$

(4b) $B \subset (A \cup B)$

(5a) $(A \cap B) \subset A$

(5b) $(A \cap B) \subset B$

(6) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

(7a) $(A \setminus B) \subset A$

(7b) $(B \setminus A) \subset B$

(8) $(A \triangle B) \subset (A \cup B)$

(9a) $(A \setminus B) \subset (A \triangle B)$

(9b) $(B \setminus A) \subset (A \triangle B)$

(10) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

(11) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

(12) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

(13) $A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$

(14) $A \subset B \Rightarrow A \cup (B \setminus A) = B$

(15) $A \subset B \Rightarrow (A \triangle B) = B \setminus A$

Joukkojen algebran laskusäännöt

Idempotenttisuus

(1a) $A \cup A = A$

(1b) $A \cap A = A$

Assosiatiivisuus

(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Kommutatiivisuus

(3a) $A \cup B = B \cup A$

(3b) $A \cap B = B \cap A$

Distributiivisuus

(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identiteetti-lait

(5a) $A \cup \varnothing = A$

(5b) $A \cap S = A$, jossa A on *perusjoukon* S osajoukko

(6a) $A \cup S = S$, jossa A on *perusjoukon* S osajoukko

(6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Komplementti-lait

(7a) $A \cup A^c = S$, jossa A on *perusjoukon* S osajoukko

(7b) $A \cap A^c = \varnothing$

(8a) $(A^c)^c = A$

(8b) $S^c = \varnothing$ ja $\varnothing^c = S$, jossa S on *perusjoukko*

De Morganin lait

(9a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(9b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1.4. Funktiot

Tässä kappaleessa tarkastellaan **funktion** ja **käänteisfunktion** käsitteitä sekä **funktioiden yhdistämistä**.

Funktio

Olkoon f *sääntö*, joka *liittää jokaiseen* joukon A alkioon *yksikäsitteisen* joukon B alkion. Tällöin sanomme, että f on **funktio** eli **kuvaus** joukosta A joukkoon B.

Jos f on funktio joukosta A joukkoon B, niin merkitsemme

$$f : A \to B$$

tai

$$A \xrightarrow{f} B$$

Kuva

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Jos f *liittää* joukon A alkioon a joukon B alkion b, merkitsemme

$$f(a) = b$$

tai

$$a \xrightarrow{f} f(a) = b$$

ja sanomme, että funktio f *kuvaa* joukon A alkion a joukon B alkiolle b. Kutsumme alkiota

$$f(a) = b \in B$$

alkion $a \in A$ **kuvaksi** kuvauksessa f. Siinä tapauksessa, että A ja B ovat *lukujoukkoja*, sanomme tavallisesti, että funktio f saa **arvon**

$$f(a) = b$$

pisteessä a.

Funktion määrittelyalue ja arvoalue

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Tällöin joukkoa A sanotaan funktion f **määrittelyalueeksi** ja niiden joukon B alkioiden joukkoa, jotka ovat jonkin määrittelyalueen A alkion *kuvia* kuvauksessa f, sanotaan funktion f **arvoalueeksi**.

Funktion $f : A \to B$ *arvoalue* $f(A)$ voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f(A) = \{b \in B \mid \text{On olemassa } a \in A \text{ siten, että } f(a) = b\}$$

Funktion f: $A \to B$ arvoalue $f(A)$ on aina joukon B *osajoukko*:

$$f(A) \subset B$$

Funktioiden samuus

Olkoot f ja g kaksi funktiota, joilla on sama *määrittelyalue*. Funktiot f ja g ovat **samat**, jos ne saavat samat *arvot*. Jos funktioiden f ja g määrittelyalueena on joukko A, niin funktiot f ja g ovat *samat*, jos

$$f(a) = g(a)$$

kaikille $a \in A$. Jos funktiot f ja g ovat samat, kirjoitetaan

$$f = g$$

Surjektio, injektio, bijektio

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Funktio f on **surjektio**, jos joukon B *jokainen* alkio on jonkin joukon A alkion kuva eli funktion f *arvoalueena* on *koko* joukko B. Siten funktio $f : A \to B$ on *surjektio*, jos

$$f(A) = B$$

Tällöin sanimme, että funktio *f kuvaa joukon A joukolle B.*

Funktio f on **injektio**, jos yksikään joukon B alkio *ei ole* kahden tai useamman joukon A alkion kuva. Siten funktio $f : A \to B$ on *injektio*, jos

$$f(a) = f(a') \;\Rightarrow\; a = a'$$

tai yhtäpitävästi

$$a \neq a' \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(a')$$

Funktio f on **bijektio** eli *kääntäen yksikäsitteinen kuvaus*, jos se on *surjektio* ja *injektio* eli seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

(i) $f(A) = B$

(ii) $f(a) = f(a') \;\Rightarrow\; a = a'$

tai yhtäpitävästi:

$$a \neq a' \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(a')$$

Identtinen funktio

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon A:

$$f : A \to A$$

Funktio f on **identtinen funktio** tai **-kuvaus** joukossa A, jos se kuvaa joukon A *jokaisen* alkion *itselleen*. Siten funktio $f : A \to A$ on *identtinen funktio* joukossa A, jos

$$f(a) = a$$

kaikille $a \in A$. Identtistä funktiota joukossa A merkitään usein seuraavasti:

$$1_A$$

Vakiofunktio

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Funktio f on **vakiofunktio** tai **-kuvaus**, jos se kuvaa joukon A *jokaisen* alkion *samalle* joukon B alkiolle. Siten funktio $f : A \to B$ on *vakiofunktio*, jos on olemassa $b \in B$ niin, että

$$f(a) = b$$

kaikille $a \in A$.

Yhdistetty funktio

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

ja g funktio joukosta B joukkoon C:

$$g : B \to C$$

Kuvaus f liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon B alkion b:

$$a \in A \Rightarrow f(a) = b \in B$$

Kuvaus g liittää *jokaiseen* joukon B alkioon b *yksikäsitteisen* joukon C alkion c:

$$b \in B \Rightarrow g(b) = c \in C$$

Soveltamalla kuvauksia f ja g peräkkäin saadaan *sääntö*, joka liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon C alkion c.

Jos siis $a \in A$, niin

$$f(a) = b \in B$$

Soveltamalla kuvausta g joukon B alkioon $f(a) = b$ saadaan jokin joukon C alkio c:

$$g(f(a)) = g(b) = c \in C$$

Tätä *kuvausten yhdistämistä* voidaan kuvata seuraavalla kaaviolla:

$$a \xrightarrow{f} f(a) = b \xrightarrow{g} g(f(a)) = g(b) = c$$

Jos siis $a \in A$, niin

$$f(a) = b \in B$$

ja

$$g(f(a)) = g(b) = c \in C$$

Määritellään funktioiden f ja g **yhdistetty funktio**

$$(g \circ f) : A \to C$$

kaavalla

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Yhdistetyn funktion ominaisuuksia

Olkoon $f : A \to B$ jokin funktio ja olkoon

$$1_A : A \to A$$

identtinen funktio joukossa A ja

$$1_B : B \to B$$

identtinen funktio joukossa B. Tällöin pätee:

$$f \circ 1_A = f$$
$$1_B \circ f = f$$

Olkoot f: $A \to B$, g: $B \to C$ ja h: $C \to D$ funktioita. Voimme *yhdisttää* funktiot f, g ja h seuraavilla tavoilla:

(i) Muodostetaan *ensin* yhdistetty funktio $g \circ f$ ja *sitten* yhdistetty funktio $h \circ (g \circ f)$.

(ii) Muodostetaan *ensin* yhdistetty funktio $h \circ g$ ja *sitten* yhdistetty funktio $(h \circ g) \circ f$.

Näin muodostetut yhdistetyt funktiot ovat *samat*:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Käänteisfunktio

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Joukon A alkio a on joukon B alkion b **käänteisalkio** kuvauksessa f, jos

$$f(a) = b$$

Joukon B alkiolla voi olla useita käänteisalkioita, mutta toisaalta kaikilla joukon B alkiolla ei ole välttämättä yhtään käänteisalkiota. Sen sijaan, jos funktio f on *surjektio*, niin joukon B *jokaisella* alkiolla on käänteisalkio. Edelleen, jos joukon B alkiolla on käänteisalkio ja funktio f on *injektio*, käänteisalkio on *yksikäsitteinen*.

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Joukon B *osajoukon* D **alkukuva** kuvauksessa f on niiden joukon A alkioiden a joukko, jotka f *kuvaa* joukolle D. Jos siis $f : A \to B$ ja $D \subset B$, niin joukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ kuvauksessa f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) = b \in D\}$$

Joukon B osajoukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ on joukon A *osajoukko*:

$$f^{-1}(D) \subset A$$

Huomaa, että joukon B osajoukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ voi olla *tyhjä*.

Joukon B *alkion* b **alkukuva** kuvauksessa f on niiden joukon A alkioiden a joukko, jotka f *kuvaa* alkiolle b. Jos siis $f : A \to B$ ja $b \in B$, niin alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ kuvauksessa f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Joukon B alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ on joukon A osajoukko:

$$f^{-1}(b) \subset A$$

Huomaa, että joukon B alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ voi koostua *yhdestä* tai *useammasta* joukon A alkiosta tai voi olla *tyhjä*.

Jos funktio f on **bijektio**, joukon B *jokaisen* alkion b alkukuva $f^{-1}(b)$ koostuu *täsmälleen yhdestä joukon A alkiosta a*. Tällöin *jokaiseen* joukon B alkioon b voidaan liittää *yksikäsitteinen käänteisalkio*

$$f^{-1}(b) = a$$

Olkoon siis funktio f *bijektio* joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Sääntö, joka liittää *jokaiseen* joukon B alkioon b *yksikäsitteisen käänteisalkion*

$$f^{-1}(b) = a$$

määrittelee funktion f **käänteisfunktion** f^{-1} joukosta B joukkoon A:

$$f^{-1} : B \to A$$

Käänteisfunktion ominaisuuksia

Oletetaan, että funktio

$$f : A \to B$$

on *bijektio*, jolloin sillä on *käänteisfunktio*

$$f^{-1} : B \to A$$

Tällöin *yhdistetty funktio* $(f^{-1} \circ f)$ on *identtinen funktio* joukossa A ja *yhdistetty funktio* $(f \circ f^{-1})$ on *identtinen funktio* joukossa B:

$$(f^{-1} \circ f) = 1_A$$
$$(f \circ f^{-1}) = 1_B$$

Olkoot

$$f : A \to B$$

ja

$$g : B \to A$$

Oletetaan, että *yhdistetty funktio*

$$(g \circ f): A \to A$$

on *identtinen funktio* joukossa A ja *yhdistetty funktio*

$$(f \circ g): B \to B$$

on *identtinen funktio* joukossa B. Tällöin g on funktion f *käänteisfunktio*: $g = f^{-1}$.

1.5. Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Tarkastelemme tässä kappaleessa **karteesisen tulon** määrittelemistä sekä **funktion kuvaajan** esittämistä karteesisen tulon määrittelemässä **tulojoukossa**.

Järjestetty pari

Sanomme, että *kaksikko*

$$(a, b)$$

on olioiden a ja b **järjestetty pari**, jossa

a = parin 1. alkio

b = parin 2. alkio

Järjestetyt parit (a, b) ja (c, d) ovat *samat*, jos

$$a = c \text{ ja } b = d$$

Karteesinen tulo

Olkoot A ja B joukkoja. Joukkojen A ja B **tulojoukko** eli **karteesinen tulo** $A\times B$ muodostuu kaikista järjestetyistä pareista

$$(a, b)$$

joissa

$$a \in A \text{ ja } b \in B$$

joten

$$A\times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Funktion kuvaaja

Olkoon f *funktio* joukosta A joukkoon B:

$$f: A \to B$$

Funktion f **kuvaaja** f^* on kaikkien niiden *järjestettyjen parien* (a, b) joukko, joissa $a \in A$ ja $b = f(a)$, joten

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

Siten funktion f *kuvaaja* f^* on tulojoukon $A\times B$ *osajoukko*:

$$f^* \subset A\times B$$

Funktion kuvaajan ominaisuudet

Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

Tällöin funktion f *kuvaajalla*

$$f^{*} = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

on seuraavat ominaisuudet:

(i) Jos $a \in A$ ja $f(a) = b$, niin järjestetty pari $(a, b) \in f^{*}$.

(ii) Jokainen $a \in A$ voi olla ensimmäisenä alkiona *täsmälleen yhdessä* joukkoon f^{*} kuuluvassa järjestetyssä parissa:

Jos $(a, b) \in f^{*}$ ja $(a, c) \in f^{*}$, niin $b = c$.

Kääntäen: Olkoon f^{*} joukkojen A ja B *karteesisen tulon*

$$A{\times}B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

osajoukko:

$$f^{*} \subset A{\times}B$$

Oletetaan lisäksi, että joukolla f^{*} on seuraavat ominaisuudet:

(i) Jos $a \in A$, niin *on olemassa* $b \in B$ siten, että järjestetty pari $(a, b) \in f^{*}$.

(ii) Jokainen $a \in A$ voi olla ensimmäisenä alkiona *täsmälleen yhdessä* joukkoon f^{*} kuuluvassa järjestetyssä parissa:

Jos $(a, b) \in f^{*}$ ja $(a, c) \in f^{*}$, niin $b = c$.

Siten f^{*} määrittelee *säännön*, joka liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon B alkion b:

- Ominaisuus (i) takaa sen, että *jokaiseen* joukon A alkioon a liittyy *jokin* joukon B alkio b.
- Ominaisuus (ii) takaa sen, että joukon A alkioon a liittyvä joukon B alkio b on *yksikäsitteinen*.

Tämä merkitsee sitä, että f^{*} määrittelee *funktion* f joukosta A joukkoon B.

Edellä esitetystä seuraa, että jokaista funktiota

$$f : A \to B$$

vastaa kääntäen yksikäsitteisesti karteesisen tulon $A{\times}B$ osajoukko f^{*}, joka toteuttaa ehdot

(i) Jos $a \in A$, niin *on olemassa* $b \in B$ siten, että järjestetty pari $(a, b) \in f^{*}$.

(ii) Jos $(a, b) \in f^{*}$ ja $(a, c) \in f^{*}$, niin $b = c$.

Siten funktiot ja ehdot (i) ja (ii) toteuttavat karteesisten tulojen osajoukot voidaan *samaistaa*, joten ***funktiota* ja *sen kuvaajaa* ei tarvitse normaalisti erottaa toisistaan**.

Funktiot voidaan siis määritellä myös seuraavalla tavalla (vrt. tätä määritelmää kappaleessa **Funktiot** annettuun määritelmään):

Karteesisen tulon

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

osajoukko f määrittelee **funktion** joukosta A joukkoon B, jos *jokainen* $a \in A$ on ensimmäisenä alkiona *täsmälleen yhdessä* joukkoon f kuuluvassa järjestetyssä parissa.

Yleistetty karteesinen tulo

Olkoot

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

joukkoja ja

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

niiden alkioita siten, että

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$$

Kutsutaan alkioiden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ järjestettyä jonoa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

n-tuppeliksi (tai *n:iköksi*).

Joukkojen

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

karteesinen tulo

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

on kaikkien joukkojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alkioiden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *n-tuppeleiden* eli järjestettyjen jonojen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

muodostama joukko:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

1.6. Joukko-opin perusoperaatioiden yleistykset

Tarkastelemme tässä kappaleessa joukko-opin **perusoperaatioiden yhdiste ja leikkaus yleistämistä** useamman kuin kahden (äärettömän monen) joukon tapaukseen. Määrittelemme lisäksi käsitteet **joukkoperhe**, **potenssijoukko** eli joukon kaikkien osajoukkojen perhe eli sekä joukon **ositus**.

Joukkoperheet

Kutsutaan *joukkojen kokoelmaa* eli joukkoa, jonka alkiot ovat joukkoja **joukko-perheeksi**. Joukkoperhe on siis *joukko*, jonka *alkiot* ovat *joukkoja*.

Potenssijoukot

Olkoon joukko A perusjoukon S osajoukko. Joukon A *kaikkien* osajoukkojen muodostamaa joukko-perhettä kutsutaan joukon A **potenssijoukoksi**. Merkitään joukon A potenssijoukkoa seuraavasti:

$$2^A$$

Joukon A potenssijoukko 2^A voidaan määritellä formaalisti seuraavalla tavalla:

$$2^A = \{C \mid C \subset A\}$$

Esimerkki 1.

Olkoon

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Tällöin joukon A potenssijoukko on

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Siten joukon A potenssijoukko 2^A on joukkoperhe, jonka alkioina ovat:

(i)	Tyhjä joukko:	$\varnothing$
(ii)	Kaikki joukon A yhden alkion osajoukot:	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$
(iii)	Kaikki joukon A kahden alkion osajoukot:	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
(iv)	Joukko A itse:	$\{1, 2, 3\}$

Jos joukko A on *äärellinen* ja siinä on

$$n = n(A)$$

alkiota, niin joukon A potenssijoukossa 2^A on

$$2^n$$

alkiota; ks. lukua **Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka**.

Indeksoidut joukkoperheet

Olkoon $\mathcal{A}$ jokin *joukkoperhe* eli joukkojen kokoelma ja olkoon I jokin joukko. **Indeksoidulla joukkoperheellä**

$$\{A_i\}_{i\in I}$$

tarkoitetaan funktiota

$$f : I \to \mathcal{A}$$

jossa joukkoa I kutsutaan **indeksijoukoksi**, joukon I alkiota i kutsutaan **indeksiksi** ja joukkoa

$$A_i \in \mathcal{A}$$

kutsutaan **indeksoiduksi joukoksi**.

Esimerkki 2.

Olkoon indeksijoukkona I *äärellinen joukko* $\{1, 2, \ldots, n\}$ (n ensimmäistä positiivista kokonaislukua). Tällöin

$$\{A_i\}_{i\in I} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

on indeksoitu joukkoperhe.

Esimerkki 3.

Olkoon indeksijoukkona I *luonnollisten lukujen joukko* $\mathbb{N}$.

Tällöin

$$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

on indeksoitu joukkoperhe.

Yleistetyt joukko-operaatiot

Olkoon

$$\{A_i\}_{i\in I}$$

indeksoitu joukkoperhe.

Joukkojen A_i, $i \in I$ **yhdiste**

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

on niiden alkioiden x joukko, jotka kuuluvat *ainakin yhteen* joukoista A_i, $i \in I$:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } i \in I \text{ siten, että } x \in A_i\}$$

Joukkojen A_i, $i \in I$ **leikkaus**

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

on niiden alkioiden x joukko, jotka kuuluvat *jokaiseen* joukoista A_i, $i \in I$:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i \in I\}$$

Jos indeksijoukkona I on *luonnollisten lukujen joukko* $\mathbb{N}$, niin joukkojen A_i, $i \in \mathbb{N}$ *yhdiste* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } A_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots \text{ siten, että } x \in A_i\}$$

ja joukkojen A_i, $i \in \mathbb{N}$ *leikkaus* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

Jos indeksijoukkona I on *äärellinen joukko* $\{1, 2, \ldots, n\}$, niin joukkojen A_i, $i \in I$ *yhdiste* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ siten, että } x \in A_i\}$$

ja joukkojen A_i, $i \in I$ *leikkaus* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Yleistetyt distribuutiolait

Olkoon

$$\{A_i\}_{i\in I}$$

indeksoitu joukkoperhe ja olkoon B mielivaltainen joukko. Tällöin

$$B\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$$

ja

$$B\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$$

Yleistetyt De Morganin lait

Olkoon

$$\{A_i\}_{i\in I}$$

indeksoitu joukkoperhe. Tällöin

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c=\bigcap_{i\in I} A_i^c$$

ja

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c=\bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Ositukset

Olkoon A perusjoukon S osajoukko ja olkoot

$$B_i,\ i\in I$$

joukon A *epätyhjiä* osajoukkoja:

$$B_i\neq\varnothing,\ i\in I$$

Joukot B_i,, $i\in I$ muodostavat joukon A **osituksen**, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

(i) Joukko A saadaan joukkojen B_i, $i\in I$ *yhdisteenä*:

$$\bigcup_{i\in I} B_i=A$$

(ii) Joukot B_i, $i\in I$ ovat *pareittain pistevieraita*:

$$B_i\cap B_j=\varnothing,\ \text{jos } i\neq j$$

1.7. Boolen algebrat

Tässä kappaleessa tarkastellaan **Boolen algebroita**. Boolen algebran aksioomat muodostavat perustan joukko-opin aksiomaattiselle käsittelylle ja joukko-opin peruslaskusäännöt voidaan todistaa Boolen algebran aksioomista.

Boolen algebran aksioomat

Olkoon S joukko ja jokin $\mathfrak{F}$ joukon S osajoukkojen muodostama *perhe* eli

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \subset S$$

Joukkoperhe $\mathfrak{F}$ on **Boolen algebra**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

(ii) Jos joukko A on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio, niin myös sen *komplementti* A^c on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$$

(iii) Jos joukot A ja B ovat joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkioita, niin myös niiden *yhdiste* $A \cup B$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A \in \mathfrak{F}\,,\ B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$$

Boolen algebroiden ominaisuudet

Lause 1.

Olkoon $\mathfrak{F}$ jokin perusjoukon S osajoukoille määritelty *Boolen algebra* ja oletetaan, että

$$A \in \mathfrak{F}\,,\ B \in \mathfrak{F}$$

Tällöin

(a) $S \in \mathfrak{F}$

(b) $A \cap B \in \mathfrak{F}$

(c) $A \setminus B \in \mathfrak{F}$

(d) $B \setminus A \in \mathfrak{F}$

Todistus:

Olkoon $\mathfrak{F}$ jokin perusjoukon S osajoukoille määritelty Boolen algebra ja oletetaan, että

$$A \in \mathfrak{F}\,,\ B \in \mathfrak{F}$$

Huomaa, että *Boolen algebran aksioomista* seuraa, että

$$\varnothing \in \mathfrak{F}\,,\ A^c \in \mathfrak{F}\,,\ B^c \in \mathfrak{F}\,,\ A \cup B \in \mathfrak{F}$$

(a) Osoitetaan, että

$$S \in \mathfrak{F}$$

Todetaan ensin, että

$$S = \varnothing^c$$

Boolen algebran aksiooman (i) mukaan

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$$\varnothing \in \mathfrak{F} \Rightarrow \varnothing^c = S \in \mathfrak{F}$$

(b) Osoitetaan, että

$$A \cap B \in \mathfrak{F}$$

Todetaan ensin, että *De Morganin lain* mukaan

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$$A \in \mathfrak{F}\,,\, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}\,,\, B^c \in \mathfrak{F}$$

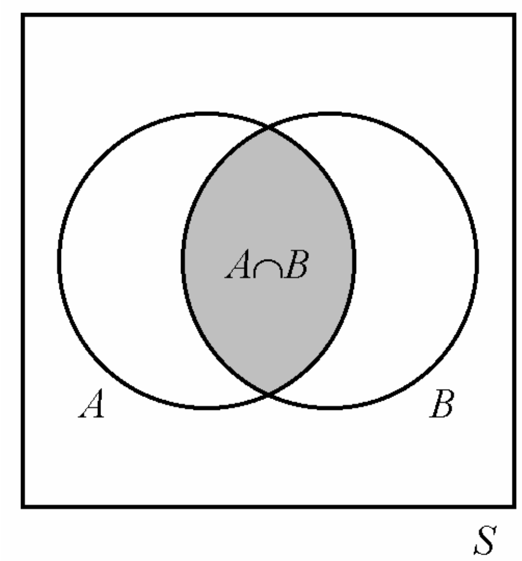
Boolen algebran aksiooman (iii) mukaan

$$A^c \in \mathfrak{F}\,,\, B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathfrak{F}$$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$$A^c \cup B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathfrak{F}$$

Ks. kuvaa oikealla.



(c) Osoitetaan, että

$$A \setminus B \in \mathfrak{F}$$

Todetaan ensin, että

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

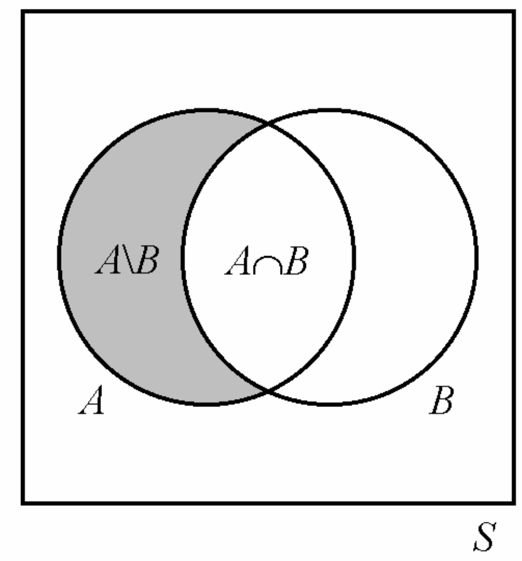
Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$$B \in \mathfrak{F} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{F}$$

Kohdan (b) mukaan

$$A \in \mathfrak{F}\,,\, B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B^c = A \setminus B \in \mathfrak{F}$$

Ks. kuvaa oikealla.



(d) Sen osoittaminen, että

$$B \setminus A \in \mathfrak{F}$$

tapahtuu samalla tavalla kuin (c)-kohdan todistus. ■

Boolen algebran aksioomista ja lauseesta 1 seuraa, että Boolen algebrat ovat **suljettuja** tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen, kun operaatioita tehdään *äärellinen määrä*. Tällä tarkoitetaan siitä, että *äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie Boolen algebran ulkopuolelle*:

Jos Boolen algebran $\mathfrak{F}$ joukkoihin sovelletaan *äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti*, *yhdiste*, *leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolen algebraan $\mathfrak{F}$.

Esimerkki 1. Boolen algebra.

Olkoon S mielivaltainen joukko ja olkoon

$$A \subset S$$

mielivaltainen joukon S osajoukko. Tällöin joukkoperhe

$$\mathfrak{F} = \{\varnothing, A, A^c, S\}$$

muodostaa Boolen algebran joukossa S, koska

(i) $\varnothing \in \mathfrak{F}$

(ii) $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{F}$

(iii) $B \in \mathfrak{F}, C \in \mathfrak{F} \Rightarrow B \cup C \in \mathfrak{F}$

jossa B ja C voivat olla mitkä tahansa kaksi joukoista

$$\varnothing, A, A^c, S$$

1.8. σ-algebrat

Tässä kappaleessa tarkastellaan **σ-algebroita**. σ-algebran aksioomat muodostavat *laajennuksen* Boolen algebran aksioomille ja niitä tarvitaan tilanteissa, joissa halutaan operoida samanaikaisesti numeroituvasti äärettömän monella joukolla.

σ-algebran aksioomat

Olkoon S joukko ja jokin $\mathfrak{F}$ joukon S osajoukkojen muodostama *perhe* eli

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \subset S$$

Joukkoperhe $\mathfrak{F}$ on **σ-algebra**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

(ii) Jos joukko A on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio, niin myös sen *komplementti* A^c on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$$

(iii) Jos joukot $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ovat joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkioita, niin myös niiden *yhdiste* $\cup A_i$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

σ-algebroiden ominaisuudet

Jos joukkoperhe $\mathfrak{F}$ toteuttaa *σ-algebran aksioomat*, niin se toteuttaa *Boolen algebran aksioomat*. Siten **kaikki Boolen algebroiden laskusäännöt pätevät σ-algebroille**. Erityisesti siis kappaleessa **Boolen algebrat** esitettyä lausetta 1 vastaava lause pätee myös σ-algebroille:

Lause 1.

Olkoon $\mathfrak{F}$ jokin perusjoukon S osajoukoille määritelty *σ-algebra* ja oletetaan, että

$$A \in \mathfrak{F}\,,\ B \in \mathfrak{F}$$

Tällöin:

(a) $S \in \mathfrak{F}$

(b) $A \cap B \in \mathfrak{F}$

(c) $A \setminus B \in \mathfrak{F}$

(d) $B \setminus A \in \mathfrak{F}$

Lauseen 1 kohta (b) voidaan laajentaa koskemaan *numeroituvaa* määrää σ-algebran joukkoja:

Lause 2.

Olkoon $\mathfrak{F}$ jokin perusjoukon S osajoukoille määritelty σ-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$$

Tällöin joukkojen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *leikkaus* $\cap A_i$ on σ-algebran $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

Todistus:

Olkoon $\mathfrak{F}$ jokin perusjoukon S osajoukoille määritelty σ-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$$

Todetaan ensin, että *De Morganin lain yleistyksen* mukaan

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c$$

σ-algebran aksiooman (ii) mukaan

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots \in \mathfrak{F}$$

σ-algebran aksiooman (iii) mukaan

$$A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathfrak{F}$$

σ-algebran aksiooman (ii) mukaan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

■

σ-algebran aksioomista ja lauseista 1 ja 2 seuraa, että σ-algebrat ovat **suljettuja** tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen, kun operaatioita tehdään *korkeintaan numeroituva määrä*.

Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie σ-algebran ulkopuolelle*:

Jos siis σ-algebran $\mathfrak{F}$ joukkoihin sovelletaan *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti*, *yhdiste*, *leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen σ-algebraan $\mathfrak{F}$.

2. Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

2.1. Verkot

2.2. Puut

2.3. Puutodennäköisyydet

2.4. Puut ja todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt

Liitteessä 2 esitellään **verkkoteorian peruskäsitteet** sellaisessa laajuudessa, että voimme määritellä **puumaiset verkot** eli **puut**. Liitteen varsinaisena päätavoitteena on näyttää **miten todennäköisyys-laskennan sääntöjä voidaan havainnollistaa puumaisten verkkojen avulla**.

Avainsanat:

Alkupiste, Epäyhtenäisyys, Erotustapahtuma, Erotustapahtuman todennäköisyys, Kokonaistodennäköisyyden kaava, Komplementti, Komplementtitapahtuman todennäköisyys, Leikkaus, Loppupiste, Piste, Puu, Puudiagrammi, Puutodennäköisyys, Reitti, Riippumattomuus, Silmukka, Särmä, Toisensa poissulkevuus, Tulosääntö, Tulosääntö riippumattomille tapahtumille, Unioni, Verkko, Verkkodiagrammi, Yhdiste, Yhteenlaskusääntö, Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille, Yhtenäisyys, Yleinen tulosääntö, Yleinen yhteenlaskusääntö

2.1. Verkot

Verkkoteoria on hyödyllinen sovelletun matematiikan osa-alue, jolla on sovelluksia esimerkiksi *logiikassa*, *operaatiotutkimuksessa*, *peli*- ja *päätösteoriassa* sekä **todennäköisyyslaskennassa**.

Tässä kappaleessa tarkastellaan **verkkoteorian** peruskäsitteitä.

Verkon määritelmä

Verkko eli **graafi** muodostuu **pisteiden** joukosta *V*, **särmien** joukosta *A* ja **insidenssikuvauksesta**

$$\Delta : A \to V \times V$$

jossa

$$V \neq \varnothing \,,\; A \neq \varnothing \,,\; A \cap V = \varnothing$$

Insidenssikuvaus Δ kertoo mitkä verkon pisteistä ovat särmien *yhdistämiä*.

Olkoon

$$a \in A$$
$$v, w \in V$$

ja

$$\Delta(a) = (v, w)$$

Tällöin sanomme, että :

v = särmän *a* = (*v*, *w*) **alkupiste**

w = särmän *a* = (*v*, *w*) **loppupiste**

Jos piste *v* ei ole yhdenkään särmän alkupiste tai loppupiste, sanomme, että piste *v* on **eristetty**.

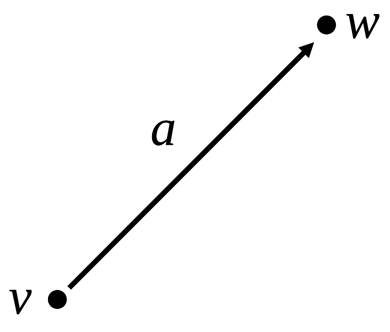
Verkkoja tarkastellaan tässä esityksessä *suunnattuina verkkoina*, millä tarkoitetaan sitä, että verkon jokaisella särmällä on *suunta*, joka osoittaa särmän *alkupisteestä* särmän *loppupisteeseen*.

Verkkodiagrammi on verkon *graafinen esitys*. Verkkodiagrammi voidaan konstruoida seuraavalla tavalla:

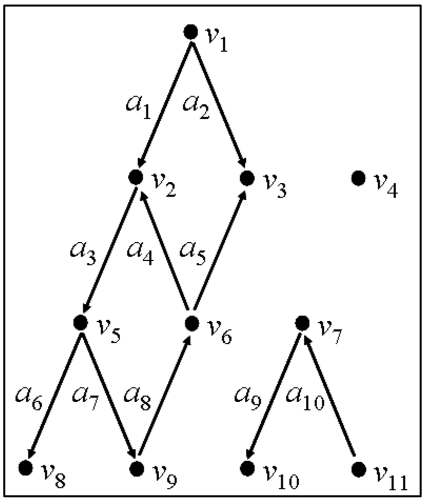
(i) Merkitään verkon *pisteet* tasoon.

(ii) Piirretään jokaisen särmän *a* = (*v*, *w*) alkupisteestä *v nuoli* särmän loppupisteeseen *w*.

Ks. kuvaa oikealla.



Esimerkki 1. Verkko.



Tarkastellaan oikealla olevaa verkkodiagrammia.

Pisteiden joukko *V*:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

Särmien joukko *A*:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$$

Insidenssikuvaus Δ:

$$\Delta(a_1) = (v_1, v_2) \qquad \Delta(a_6) = (v_5, v_8)$$
$$\Delta(a_2) = (v_1, v_3) \qquad \Delta(a_7) = (v_5, v_9)$$
$$\Delta(a_3) = (v_2, v_5) \qquad \Delta(a_8) = (v_9, v_6)$$
$$\Delta(a_4) = (v_6, v_2) \qquad \Delta(a_9) = (v_7, v_{10})$$
$$\Delta(a_5) = (v_6, v_3) \qquad \Delta(a_{10}) = (v_{11}, v_7)$$

Esimerkiksi piste v_6 on särmien a_4 ja a_5 *alkupiste* ja särmän a_8 *loppupiste*. *Särmän* a_7 *alkupiste* on v_5 ja *loppupiste* on v_9. Piste v_4 on *eristetty*, koska se ei ole yhdenkään särmän alku- tai loppupiste.

Reitti ja silmukka

Särmät

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

muodostavat **reitin** pisteestä v_1 pisteeseen v_k , jos on olemassa pisteet

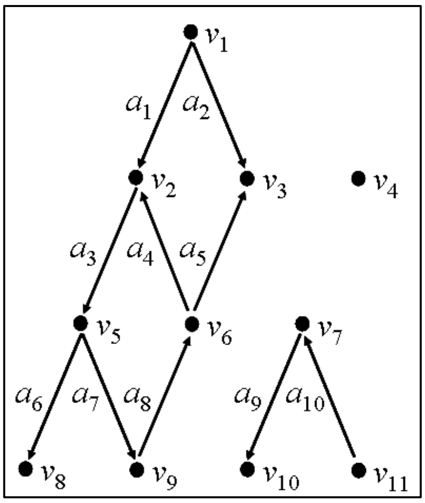
$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

siten, että

$$\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots, k-1$$

Jos pisteestä v_1 pisteeseen v_k on reitti, sanotaan, että reitti *vie* pisteestä v_1 pisteeseen v_k tai, että pisteestä v_1 *pääsee* pisteeseen v_k .

Esimerkki 1. Reitti.



Viereisen kuvan verkossa on useita *reittejä*.

Pisteestä v_1 *pääsee* pisteisiin v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9 vähintään yhtä reittiä pitkin.

Pisteestä v_1 pisteeseen v_3 *vie* kaksi reittiä:

Reitti 1: $\{a_2\}$

Reitti 2: $\{a_1, a_3, a_7, a_8, a_5\}$

Pisteestä v_6 *ei pääse* pisteeseen v_1 ja pisteestä v_1 *ei pääse* pisteisiin v_4, v_7, v_{10}, v_{11}.

Reitti

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

muodostaa **silmukan**, jos on olemassa pisteet

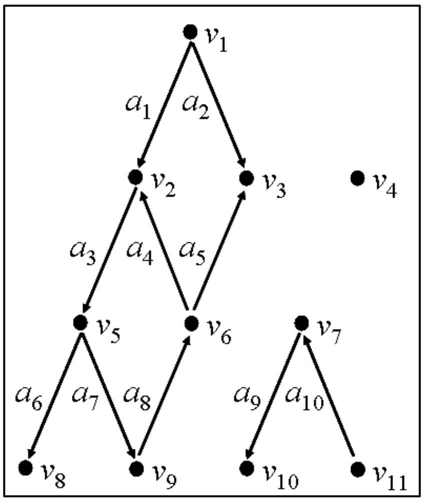
$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

siten, että

$$\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1}), \; i = 1, 2, \ldots, k-1$$

ja lisäksi $v_1 = v_k$.

Esimerkki 2. Silmukka.



Viereisen kuvan verkossa on yksi *silmukka*:

$$\{a_3, a_7, a_8, a_4\}$$

Huomaa, että esimerkiksi särmät

$$\{a_1, a_4, a_5, a_2\}$$

eivät muodosta silmukkaa.

Verkon yhtenäisyys

Verkko on **yhtenäinen**, jos sen pisteiden joukkoa *V ei voida* osittaa kahdeksi *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *samaan* osajoukkoon. Siten yhtenäisen verkon pisteiden joukkoa *V ei voida* osittaa kahteen *epätyhjään* osajoukkoon V_1 ja V_2 seuraavalla tavalla:

Jos $a = (v, w)$ on verkon mielivaltainen särmä, niin *täsmälleen toinen ehdoista* (i) tai (ii) *pätee*:

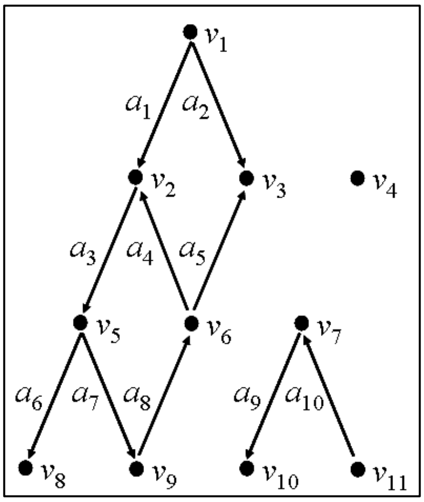
(i) $v \in V_1$ ja $w \in V_1$

(ii) $v \in V_2$ ja $w \in V_2$

Verkko on **epäyhtenäinen**, jos se *ei ole yhtenäinen*. Epäyhtenäisen verkon pisteet *voidaan* osittaa kahdeksi (tai useammaksi) *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *täsmälleen yhteen* osajoukoista.

Esimerkki 1. Yhtenäisyys.

Viereisen kuvan verkko on *epäyhtenäinen*, mutta se koostuu kolmesta *yhtenäisestä aliverkosta*:



Aliverkko 1:

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9\}$$
$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

Aliverkko 2:

$$V_2 = \{v_4\}$$
$$A_2 = \varnothing$$

Aliverkko 3:

$$V_3 = \{v_7, v_{10}, v_{11}\}$$
$$A_3 = \{a_9, a_{10}\}$$

2.2. Puut

Tässä kappaleessa tarkastellaan **puumaisten verkkojen** eli **puiden** määrittelemistä.

Puun määritelmä

Verkko on **puu**, jonka **juurena** on piste v_1, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) Verkko on *yhtenäinen*.

(ii) Verkossa ei ole *silmukoita*.

(iii) Jos $w \neq v_1$ on mielivaltainen verkon piste, pisteestä v_1 pisteeseen w pääsee *täsmälleen yhtä reittiä* pitkin.

Puun ominaisuudet

Puulla on täsmälleen yksi *alkupiste*, sen juuri v_1. Puun alkupisteestä v_1 vie *täsmälleen yksi reitti* puun jokaiseen muuhun pisteeseen. Puun alkupisteeseen v_1 *ei tule* yhtään särmää. Puulla on yksi tai useampia *loppupisteitä*. Puun loppupisteestä *ei lähde* yhtään särmää. Jokaisen särmän loppupiste (ellei se ole samalla koko puun loppupiste) on *yhden tai useamman* särmän alkupiste.

Puudiagrammi

Puudiagrammi on puun *graafinen esitys*. Puudiagrammi voidaan konstruoida seuraavalla tavalla:

(i) Merkitään puun pisteet tasoon.

(ii) Piirretään jokaisen särmän $a = (v, w)$ alkupisteestä v *nuoli* särmän loppupisteeseen w.

Puudiagrammin *piirtämisessä* käytetään tavallisesti toista seuraavista tavoista:

- Puu piirretään *ylösalaisin* niin, että sen juuri eli alkupiste on ylhäällä ja loppupisteet ovat alhaalla.
- Puu piirretään *makaamaan* niin, että sen juuri eli alkupiste on vasemmalla ja loppupisteet ovat oikealla.

Esimerkki 1.

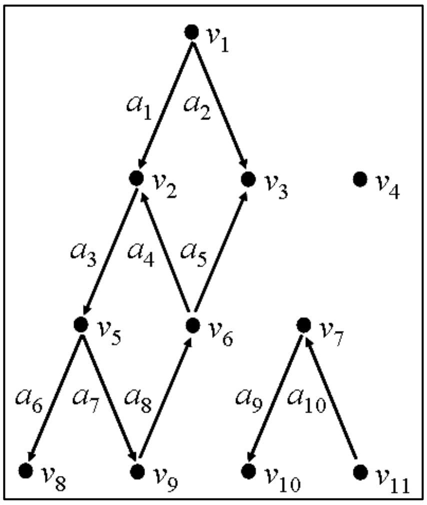
Viereisen kuvan verkko *ei ole puu*.

Perustelut:

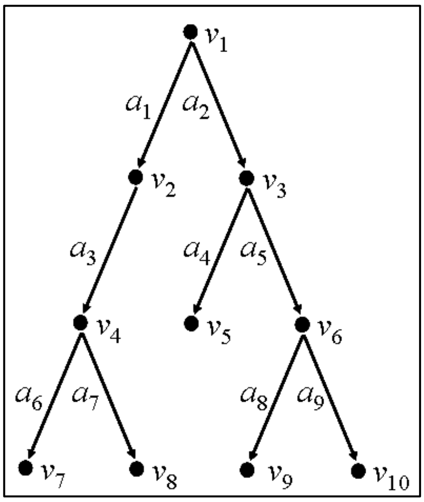
(i) Verkko *ei ole yhtenäinen*.

(ii) Verkossa *on silmukoita*.

(iii) Esimerkiksi pisteestä v_1 *ei pääse* pisteeseen v_4.



Esimerkki 2.



Viereisen kuvan verkko *on puu*.

Perustelut:

(i) Verkko *on yhtenäinen*.

(ii) Verkossa *ei ole silmukoita*.

(iii) Verkon alkupisteestä eli juuresta v_1 *vie reitti* verkon jokaiseen muuhun pisteeseen.

Puun *loppupisteiden* joukko:

$\{v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$

Alkupisteestä v_1 loppupisteisiin $v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ vievät *reitit*:

1. Loppupisteeseen v_5 vie reitti

   $\{a_2, a_4\}$

2. Loppupisteeseen v_7 vie reitti
   $\{a_1, a_3, a_6\}$
3. Loppupisteeseen v_8 vie reitti
   $\{a_1, a_3, a_7\}$
4. Loppupisteeseen v_9 vie reitti
   $\{a_2, a_5, a_8\}$
5. Loppupisteeseen v_{10} vie reitti
   $\{a_2, a_5, a_9\}$

2.3. Puutodennäköisyydet

Tässä kappaleessa tarkastellaan miten satunnaisilmiötä havainnollistetaan konstruoimalla ilmiölle **puumainen verkko** sekä miten ilmiöön liittyviä todennäköisyyksiä lasketaan konstruoidun puun avulla.

Puudiagrammin konstruointi

Periaatteessa jokainen *alkeistodennäköisyyslaskennan* tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä apuna ns. **puudiagrammeja**. Jos tehtävän satunnaisilmiö on osattu kuvata puudiagrammilla, tehtävän ratkaisemisessa tarvittavat **puutodennäköisyydet** saadaan määrätyksi käyttämällä kahta yksinkertaista laskusääntöä, **tulosääntöä** ja **yhteenlaskusääntöä**.

Puun konstruointi

Satunnaisilmiötä voidaan kuvata **puudiagrammilla**, jos ilmiö osataan esittää seuraavassa muodossa:

(i) Ilmiöllä on **alkutila** ja useita vaihtoehtoisia **lopputiloja**.

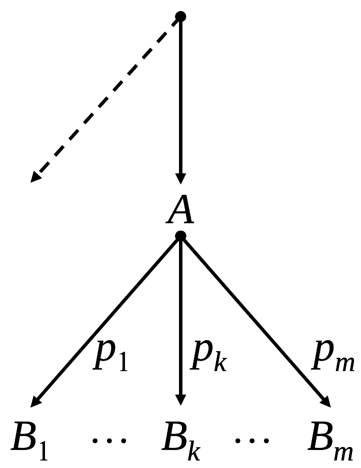
(ii) Ilmiö koostuu **tapahtumajonoista**, joissa alkutilasta siirrytään *vaiheittain* johonkin ilmiön vaihtoehtoisista lopputiloista.

(iii) Jokaisessa ilmiön **vaiheessa** kohdataan yksi tai useampia **tapahtumavaihtoehtoja**, joista yksi *realisoituu* ja johtaa *uusin* tapahtumavaihtoehtoihin.

Satunnaisilmiötä vastaavan **puudiagrammin konstruointi**:

1. Asetetaan puun **juuri** vastaamaan ilmiön *alkutilaa*.
2. Asetetaan puun **loppupisteet** (”oksien kärjet”) vastaamaan ilmiön *lopputiloja*.
3. Asetetaan puun **pisteet** (”oksien haarautumiskohdat”) vastaamaan ilmiön *tapahtumia*.
4. Viedään puun jokaisesta pisteestä **särmä** (”oksa”) kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat *tapahtumavaihtoehdot* ovat ilmiön *siinä vaiheessa mahdollisia*.
5. Liitetään jokaiseen pisteestä *lähtevään* särmään *siinä vaiheessa* mahdollisten **tapahtuma-vaihtoehtojen todennäköisyydet**.

Puudiagrammin konstruointia voidaan havainnollistaa alla olevalla kuviolla. Siinä tarkastellaan satunnaisilmiötä *vaiheessa*, jossa tapahtuma A on sattunut.



Olkoot A:n sattumisen jälkeen *mahdolliset tapahtumavaihtoehdot*

$$B_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , m$$

Viedään pisteestä A *särmä* jokaiseen pisteistä

$$B_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , m$$

Liitetään jokaiseen särmään

$$(A, B_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , m$$

ehdollinen todennäköisyys

$$p_i = \Pr(B_i \mid \vec{A})$$

jossa $\vec{A}$ on tapahtumajono, joka on tuonut pisteeseen A.

Koska A:n sattumisen jälkeen *ei ole muita mahdollisia tapahtumavaihtoehtoja* kuin

$$B_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , m$$

niin todennäköisyyksien

$$p_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , m$$

on toteutettava ehto

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i \mid \vec{A}) = 1$$

Huomautuksia:

- Puudiagrammi *piirretään* tavallisesti *joko* niin, että sen alkupiste on *ylhäällä* ja loppupisteet ovat *alhaalla tai* niin, että sen alkupiste on *vasemmalla* ja loppupisteet ovat *oikealla*.
- Useat puun pisteet saattavat vastata *samaa* tapahtumaa.
- Mistä tahansa puun pisteestä *lähtevien särmien* todennäköisyyksien summa on 1.

Puutodennäköisyydet

Puutodennäköisyydellä tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä *puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään yhdistettyyn tapahtumaan*. Mielivaltaisen puun *pisteen todennäköisyys* saadaan määräämällä alkupisteestä ko. pisteeseen vievän *reitin todennäköisyys*.

Reitin todennäköisyys saadaan soveltamalla reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksiin **tulosääntöä**. *Usean pisteen määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys* saadaan soveltamalla ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksiin **yhteenlaskusääntöä**.

Tulosääntö puutodennäköisyyksille

Reitin todennäköisyys saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*. Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien tulosäännöksi**.

Perustelu:

(1) Reitti on *tapahtumajono*, jonka muodostavat reitin pisteet.

(2) Reitin muodostava tapahtumajono sattuu, jos *jokainen jonon tapahtumista sattuu*.

(3) Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön mukaan* reitin todennäköisyys saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.

Olkoon siis

$$L, A_1, A_2, \ldots , A_k$$

jokin niistä vaihtoehtoisista *tapahtumajonoista*, joista satunnaisilmiö muodostuu. Tällöin parit

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots , (A_{k-1}, A_k)$$

muodostavat satunnaisilmiön *alkutilasta* L satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilaan* A_k *vievän reitin särmät*. Liitetään reitin

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots , (A_{k-1}, A_k)$$

särmiin *todennäköisyydet* seuraavalla tavalla:

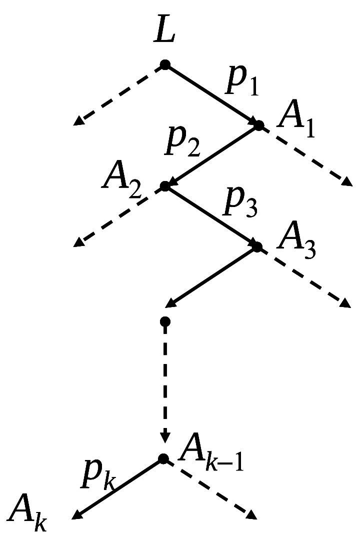
$$(L, A_1) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_1) = p_1$$

$$(A_1, A_2) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_2 \mid A_1) = p_2$$

$$(A_2, A_3) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = p_3$$

$$\ldots$$

$$(A_{k-1}, A_k) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = p_k$$



Reitti k

Reitin

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots , (A_{k-1}, A_k)$$

todennäköisyys on **yleisen tulosäännön** nojalla:

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k)$$

$$= \Pr(A_1)\times\Pr(A_2 \mid A_1)\times\Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\times \cdots \times \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

$$= p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k$$

■

Puutodennäköisyyksien tulosääntöä voidaan havainnollistaa yllä olevalla *puudiagrammilla*. Reitin k todennäköisyys on puutodennäköisyyksien tulosäännön mukaan

$$\Pr(\text{Reitti } k) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k$$

Yhteenlaskusääntö puutodennäköisyyksille

Jos useita (loppu-) tiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, näin saadun *yhdistetyn tapahtuman* todennäköisyyssaadaan määräämällä ko. tiloihin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*. Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännöksi**.

Perustelu:

(1) Puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*.

(2) *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan* useista (loppu-) pisteistä yhdistämällä saatavan tapahtuman todennäköisyys saadaan määräämällä ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.

Yhdistetään satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilat* $B_1, B_2, \ldots, B_k$ *yhdeksi tapahtumaksi*

$$C = B_1 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$$

Olkoot *tiloja* $B_1, B_2, \ldots, B_k$ vastaavat *reitit*

Reitti 1, Reitti 2, … , Reitti k

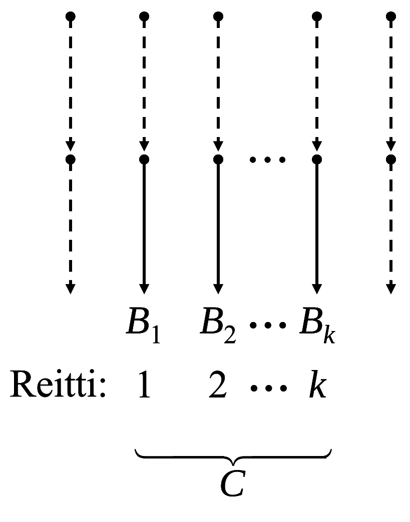
Koska puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*, tapahtuman C todennäköisyys on **toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön** nojalla:

$$\begin{aligned}\Pr(C) &= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 2 } \textit{tai} \ldots \textit{tai} \text{ Reitti } k) \\ &= \Pr(\text{Reitti 1}) + \Pr(\text{Reitti 2}) + \cdots + \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$

■

Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *puudiagrammilla*:

$$\begin{aligned}\Pr(C) = {} & \Pr(\text{Reitti 1}) \\ & + \Pr(\text{Reitti 2}) \\ & \cdots \\ & + \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$



2.4. Puut ja todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt

Tässä kappaleessa tarkastellaan seuraavien *todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistamista* **puudiagrammin** avulla:

(i) **Komplementtitapahtuman todennäköisyys**.

(ii) **Yleinen tulosääntö**

(iii) **Tulosääntö riippumattomille tapahtumille**.

(iv) **Yleinen yhteenlaskusääntö**.

(v) **Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille**.

(vi) **Erotustapahtuman todennäköisyys**.

(vii) **Kokonaistodennäköisyyden kaava**.

Komplementtitapahtuman todennäköisyys

Olkoon $A \subset S$ jokin otosavaruuden S tapahtuma ja olkoon

A^c = ”A *ei* satu”

tapahtuman A **komplementtitapahtuma**. Koska joukot A ja A^c muodostavat otosavaruuden S *osituksen* eli

$$A \cup A^c = S$$

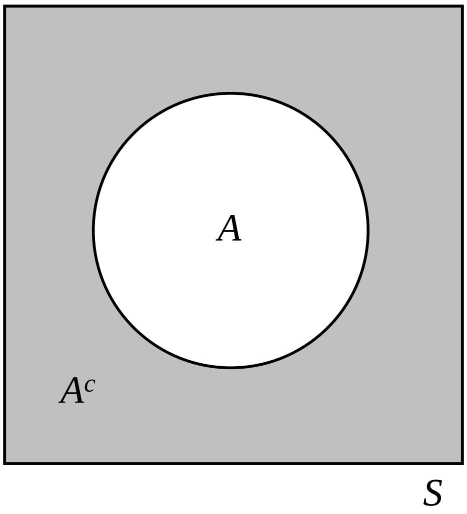
$$A \cap A^c = \varnothing$$

niin todennäköisyyden aksioomista seuraa, että

$$\Pr(S) = \Pr(A \cup A^c) = \Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$$

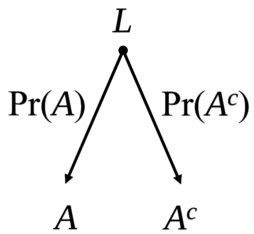
josta saadaan **komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaava**

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$



Kaavaa voidaan havainnollistaa oikealla olevalla *Venn-diagrammilla*.

Komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavaa voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.



Yhdistetyn tapahtuman

$$A \cup A^c = S$$

todennäköisyydeksi saadaan *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännön* nojalla

$$\Pr(S) = \Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$$

josta komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaava seuraa.

Yleinen tulosääntö

Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.

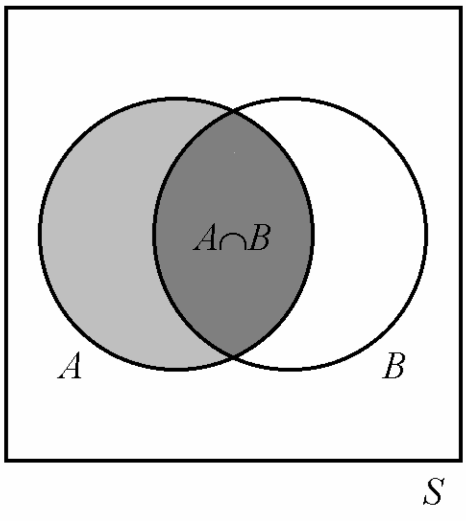
Yleisen tulosäännön mukaan yhdistetyn tapahtuman

$A \cap B$ = ”A *ja* B sattuu”

todennäköisyys on

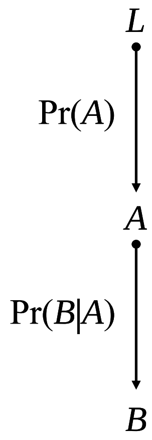
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$

Sääntöä voidaan havainnollistaa oikealla olevalla



Venn-diagrammilla.

Yleistä tulosääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.



Yhdistetyn tapahtuman

$$A \cap B = \text{"}A \text{ ja } B \text{ sattuu"}$$

todennäköisyydeksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille

Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S *riippumattomia* tapahtumia.

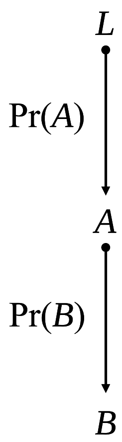
Riippumattomien tapahtumien tulosäännön mukaan yhdistetyn tapahtuman

$$A \cap B = \text{"}A \text{ ja } B \text{ sattuu"}$$

todennäköisyys on

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(A)$$

Riippumattomien tapahtumien tulosääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *puudiagrammilla*.



Koska tapahtumien A ja B riippumattomuudesta seuraa, että

$$\Pr(B|A) = \Pr(B)$$

niin yhdistetyn tapahtuman

$$A \cap B = \text{"}A \text{ ja } B \text{ sattuu"}$$

todennäköisyydeksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Yleinen yhteenlaskusääntö

Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.

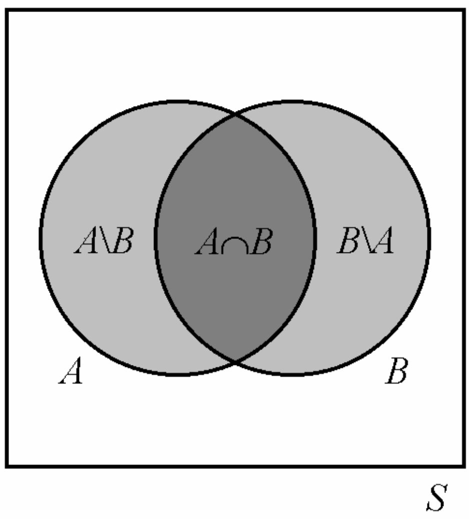
Yleisen yhteenlaskusäännön mukaan yhdistetyn tapahtuman

$$A \cup B = \text{"}A \text{ tai } B \text{ sattuu"}$$

todennäköisyys on

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.



Yleisen yhteenlaskusäännön todistus voidaan perustaa siihen, että joukot

$$A \cap B$$

$$A \backslash B = A \cap B^c$$

$$B \backslash A = B \cap A^c$$

muodostavat joukon $A \cup B$ *osituksen*, sekä yhtälöihin

$$(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A$$

$$(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

$$(B \backslash A) \cup (A \cap B) = B$$

$$(B \backslash A) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön nojalla

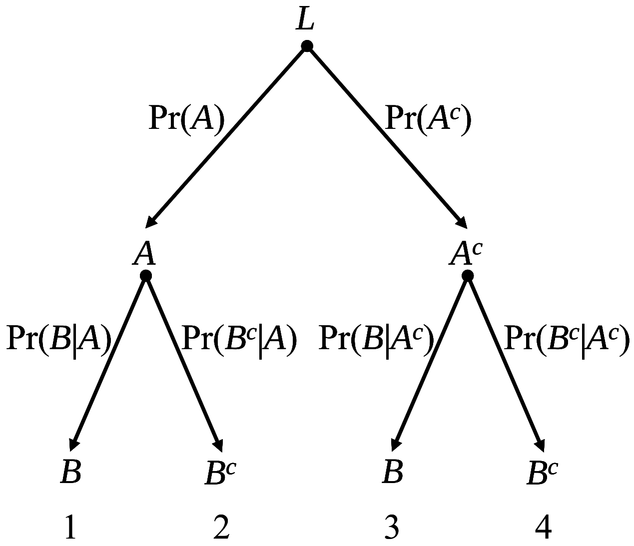
$$\Pr(A) = \Pr(A \backslash B) + \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B) = \Pr(B \backslash A) + \Pr(A \cap B)$$

joten

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(A \backslash B) + \Pr(B \backslash A) + \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(A \backslash B) + \Pr(A \cap B) + \Pr(B \backslash A) + \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)\end{aligned}$$

Yleistä yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa myös alla olevalla *puudiagrammilla*.



Yhdistettyä tapahtumaa

$$A \cup B = \text{"}A \textit{ tai } B \text{ sattuu"}$$

vastaa reitit 1, 2 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma, koska niissä A sattuu *tai B* sattuu *tai molemmat* sattuvat. Reittien 1, 2 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla:

$$\Pr(\text{Reitti 1}) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$

$$\Pr(\text{Reitti 2}) = \Pr(A)\Pr(B^c|A)$$

$$\Pr(\text{Reitti 3}) = \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännön nojalla:

$$\begin{aligned}\Pr(A\cup B) &= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 2 } \textit{tai} \text{ Reitti 3})\\ &= \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)\end{aligned}$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä ja kaavoista (ks. edellä)

$$\Pr(A) = \Pr(A\backslash B) + \Pr(A\cap B)$$

$$\Pr(B) = \Pr(B\backslash A) + \Pr(A\cap B)$$

seuraa, että

$$\begin{aligned}\Pr(A\cup B) &= \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)\\ &= \Pr(A\cap B) + \Pr(A\cap B^c) + \Pr(A^c\cap B)\\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A\cap B)\end{aligned}$$

Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille

Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S *toisensa poissulkevia* tapahtumia.

Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan yhdistetyn tapahtuman

$$A\cup B = \text{"}A \textit{ tai } B \text{ sattuu"}$$

todennäköisyys on

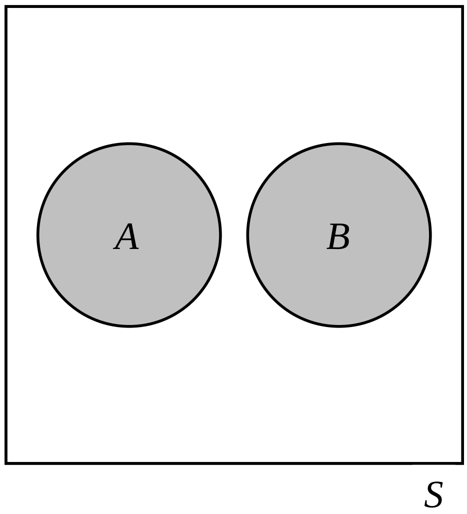
$$\Pr(A\cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Tulos seuraa tietysti myös yleisestä yhteenlaskusäännöstä, koska tapahtumien A ja B poissulkevuus merkitsee sitä, että

$$A\cap B = \varnothing$$

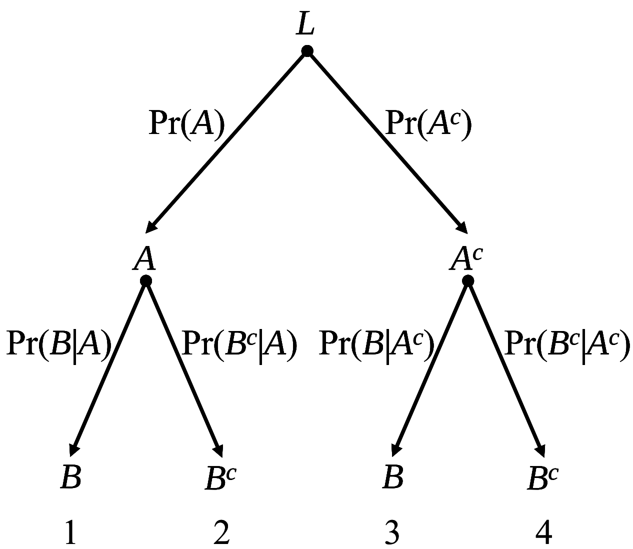
jolloin

$$\Pr(A\cap B) = 0$$



Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.

Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa myös alla olevalla *puudiagrammilla*.



Yhdistettyä tapahtumaa

$A \cup B$ = ”*A tai B* sattuu”

vastaa reitit 2 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma, koska niissä A sattuu *tai* B sattuu, *mutta eivät molemmat*. Reittien 2 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

$$\Pr(\text{Reitti } 2) = \Pr(A)\Pr(B^c|A)$$

$$\Pr(\text{Reitti } 3) = \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

Soveltamalla *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* saadaan:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(\text{Reitti 2 } \textit{tai} \text{ Reitti 3}) \\ &= \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)\end{aligned}$$

Koska A ja B ovat *toisensa poissulkevia* tapahtumia, *ehdollisen todennäköisyyden* määritelmästä ja aikaisemmin esitetyistä kaavoista seuraa:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \\ &= \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A^c \cap B) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B)\end{aligned}$$

Koska A ja B ovat toisensa poissulkevia, niin

$$\Pr(A \cap B) = 0$$

Siten

$$\Pr(B|A) = \Pr(A \cap B)/\Pr(A) = 0$$

Reitin 1 todennäköisyydeksi saadaan siis

$$\Pr(\text{Reitti } 1) = \Pr(A)\Pr(B|A) = 0$$

kuten pitääkin.

Erotustapahtuman todennäköisyys

Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.

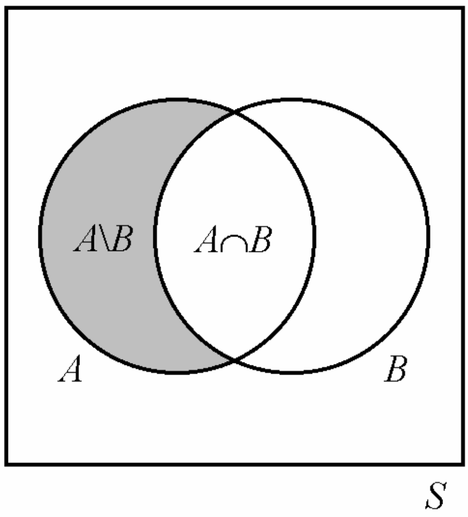
Erotustapahtuman todennäköisyyden kaavan mukaan yhdistetyn tapahtuman

$$\begin{aligned}A\backslash B &= \text{”}A \text{ sattuu, } \textit{mutta B ei} \text{ satu”} \\ &= A \cap B^c\end{aligned}$$

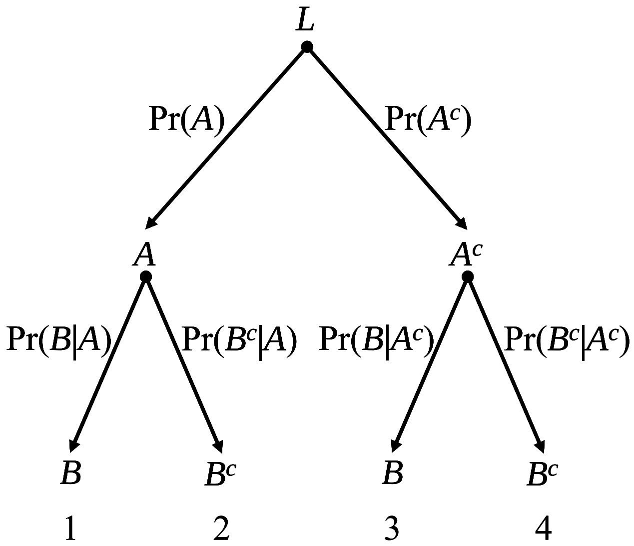
todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(A\backslash B) &= \Pr(A \cap B^c) \\ &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)\end{aligned}$$

Kaavaa voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.



Erotustapahtuman todennäköisyyden kaavaa voidaan havainnollistaa myös alla olevalla *puudiagrammilla*.



Erotustapahtumaa

$A \backslash B$ = ”A sattuu, *mutta B ei*”

vastaa reitti 2. Reitin 2 todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* ja *ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* nojalla

$$\Pr(A)\Pr(B^c|A) = \Pr(A \cap B^c)$$

Koska

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$$

$$(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

saadaan

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A \cap B)$$

Siten

$$\Pr(A \backslash B) = \Pr(A \cap B^c) = \Pr(A)\Pr(B^c|A) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia. Olkoot lisäksi joukko A ja sen komplementti A^c *epätyhjiä*.

Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan:

$$\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavan todistus perustuu siihen, että tapahtuma A ja sen komplementti-tapahtuma A^c muodostavat *otosavaruuden S osituksen*:

$$A \neq \varnothing \text{ ja } A^c \neq \varnothing$$

$$S = A \cup A^c$$

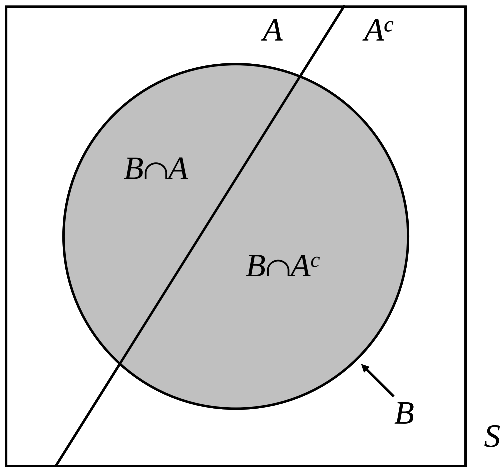
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Otosavaruuden S ositus $\{A, A^c\}$ *indusoi* osituksen $\{B\cap A, B\cap A^c\}$ tapahtumaan B:

$B\cap A \neq \emptyset$ tai $B\cap A^c \neq \emptyset$

$B = (B\cap A)\cup(B\cap A^c)$

$(B\cap A)\cap(B\cap A^c) = \emptyset$



Toisensa poissulkevien tapahtumien *yhteenlaskusäännön* mukaan:

(1) $\Pr(B) = \Pr(B\cap A) + \Pr(B\cap A^c)$

Yleisen tulosäännön mukaan:

(2) $\Pr(B\cap A) = \Pr(A)\Pr(B|A)$

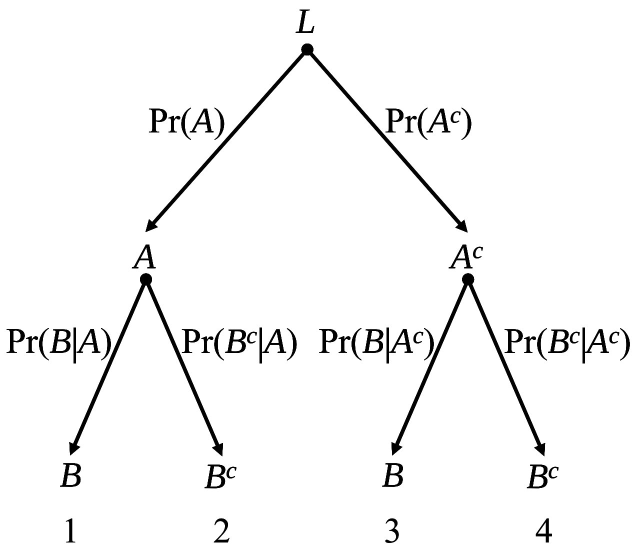
(3) $\Pr(B\cap A^c) = \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$

Sijoittamalla lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (1) saadaan *kokonaistodennäköisyyden kaava*

$$\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

Kaavaa voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.

Kokonaistodennäköisyyden kaavaa voidaan havainnollistaa myös alla olevalla *puudiagrammilla*.



Tapahtumaa

B = ”B sattuu”

vastaa reitit 1 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma. Reittien 1 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla:

$\Pr(\text{Reitti } 1) = \Pr(A)\Pr(B|A)$

$\Pr(\text{Reitti } 3) = \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$

Soveltamalla *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* saadaan:

$$\Pr(B) = \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 3}) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$