Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — Alestalo/Karrila

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2, kevät 2014

Laskuharjoitus 1L loppuviikolla 2 (10.1.)
Aihepiiri: Taso- ja avaruuskäyrät
Noppa-monisteet, Adams & Essex, 8.2–4, 11.3–4.

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana. Niitä ei siis ole tarkoitus laskea ennen harjoitusta. **Seuraavilla viikoilla tämän tyyppiset harjoitukset ovat alkuviikolla.**

1. Muodosta seuraavien käyrien parametrisoinnit (annettuun suuntaan):
   a) jana pisteestä $(1; 2; 3)$ pisteeseen $(3; 4; -2)$.
   b) paraabelin $y = x^2$ kaari pisteestä $(-1; 1)$ pisteeseen $(2; 4)$.
   c) yksikköympyrän kaari pisteestä $(1; 0)$ pisteeseen $(-1; 0)$.
   d) tasokäyrä pisteestä $(2; 0)$ pisteeseen $(0; 1)$ pitkin ellipsiä $x^2{=}4 + y^2 = 1$.

2. Parametrisoitu tasokäyrä $x = \cos t;\ y = \sin(2t)$, $t \in [0; 2\ \ ]$, muistuttaa ∞-merkkiä. Käyrä leikkaa itseään origossa parametrin arvoilla $t = \ \ {=}2$ ja $t = 3\ \ {=}2$. Laske vastaavien tangenttivektoreiden välinen kulma.
   (Vast: arccos(3=5))

3. Vierivän renkaan (säde $= R$) uraan on jäänyt kivi. Kuinka pitkän matkan kivi kulkee yhden kierroksen aikana suhteessa pyörän akselin etenemään matkaan $2\ \ R$?
   Vihje: Kiven rata on sykloidi $x = R(t - \sin t);\ y = R(1 - \cos t)$, kun $0 \le t \le 2\ \ $. Integroinnissa auttaa $1 - \cos t = 2\sin^2(t{=}2)$.
   (Vast: $8R$)

4. Erään hiukkasen paraabeliradalla on parametrisointi $x = t;\ y = 2t^2$.
   a) Määritä hiukkasen nopeus ja kiihtyvyys pisteessä $(1; 2)$.
   b) Määritä kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit pisteessä $(1; 2)$.
   (Vast: $\mathbf{a}_N = (-16\mathbf{i} + 4\mathbf{j}){=}17$)

   Lisätehtäviä, jotka eivät kuulu varsinaiseen kurssiin eikä niihin tule malliratkaisuja: Tutustu käyrä-monisteen lukuun 1.4 ja ratkaise alla olevat tehtävät.

5.* Määritä paraabelin $y = x^2$ kaarevuussäteet pisteissä $(0; 0)$ ja $(2; 4)$.
   (Vast: 1=2, noin 35)

6.* Tasokäyrällä $y = f(x)$ on parametrisointi $x = t;\ y = f(t)$. Oletetaan, että $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on kaksi kertaa derivoituva. Määritä käyrän kaarevuus
   a) funktion f paikallisessa ääriarvopisteessä (jolloin $f'(x) = 0$);
   b) funktion f käännepisteessä (jolloin $f''(x) = 0$).