Ratkaisuehdotuksia, viikko 40 29.9.2014

Demot

1. Vanha tuttu $\mathbf{K}$ porskuttaa vielä. Eliminaatiomatriisien konstruktion voi vakoilla viimeisistä kaksista laskareista; nyt oletamme tunnetuksi, että

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{EK} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Nyt $\mathbf{EK} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}$. Etsitään siis matriisin $\mathbf{E}$ käänteismatriisi:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

joka sattumoisin on alakolmimatriisi (todistettavissa: jokaisen eliminaatiomatriisin käänteismatriisi on alakolmio). Nyt voidaan nimetä $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$, ja

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

2. Ratkaisussa on keskeistä muistaa: $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

   a) Kirjoitetaan $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots \mathbf{q}_n]$. Nyt

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_1 & \cdots & & \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & . & & . \end{bmatrix}$$

b) Edellisen kohdan nojalla $\mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_i = 0$, $i \neq j$, mikä suoraan implikoi, että $\mathbf{q}_j \perp \mathbf{q}_i$.

- Etsitään $\mathbf{Q}$, josta tiedetään $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ ja $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sin\theta & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Lasketaan $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + c^2 & b\cos\theta + cd \\ b\cos\theta + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, epälineaarinen tosin:

$$\begin{cases} \cos^2\theta + c^2 = 1 \\ b\cos\theta + dc = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälösta saadaan $c = \sin\theta$, ja sijoittamalla saadaan yhtälö $b\cos\theta + d\sin\theta$, josta saadaan $b = -\sin\theta$, $d = \cos\theta$. Näin

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Vertaisarvioitavat

1. Jos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

niin LU-hajotelmassa ensimmäinen tukialkio on nolla, mikä johtaisi nollallajakoon – eli suora LU ei onnistu. Tehdään sitten pivotointi: vaihdetaan ensimmäinen ja viimeinen rivi keskenään

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt ollaankin tilanteessa jossa $\mathbf{PA} = \mathbf{U} = \mathbf{IU} = \mathbf{LU}$, eikä enempää tarvitakaan.

2. Alussa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}$$

Sarakkeen 1 suurin alkio on 6, joten vaihdamme rivit 1 ja 3 keskenään:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 17 & 10 \end{bmatrix}$$

Etsitään tämän jälkeen sarakkeen 1 eliminaatiomatriisi $\mathbf{E}_1$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Nyt huomataan, että $|8| > |-2|$, joten vaihdamme rivit 2 ja 3 keskenään:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & 8 & 26 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Seuraava eliminaatio on $\mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_2\mathbf{P}_2\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Nyt meillä on

$$\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Kuten nähdään, toinen tekijä ei ole alakolmio: ei hätää, kyseessähän on $\mathbf{P^T L}$ kun

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Näin siis saamme

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

ja

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}^T)^T = (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$