1. Une entreprise de consultation a mis au point, pour le compte du Gouvernement du Québec, un modèle mathématique qui prévoit la faillite d'une entreprise sur la base de certaines données disponibles dans son bilan comptable, comme par exemple le taux d'endettement, le ratio de liquidité, etc.

   Le tableau suivant présente les résultats de l'application du modèle dans le cas de cent (100) entreprises, où

   — M désigne que le modèle a prévu une faillite ;
   — M' désigne que le modèle n'a pas prévu de faillite ;
   — F désigne que l'entreprise a fait faillite ;
   — F' désigne que l'entreprise n'a pas fait faillite :

	M	**M'**
F	20	5
F'	5	70

Calculer la probabilité que

a) le modèle prévoie une faillite et que l'entreprise fasse faillite ;

b) le modèle prévoie une faillite ou que l'entreprise fasse faillite ;

c) l'entreprise fasse faillite, sachant que le modèle a prévu cette faillite ;

d) l'entreprise fasse faillite ;

e) le modèle détecte correctement la situation réelle d'une entreprise.

2. On choisit au hasard une famille de 5 enfants et l'on suppose que, pour chacun d'eux, la probabilité d'être un garçon ou une fille soit 0,5.

   a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 garçons et 3 filles dans la famille ?

   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 garçons et au moins 1 fille dans la famille ?

Solutionnaire

1.

	M	M'	
F	0,2	0,05	0,25
F'	0,05	0,7	0,75
	0,25	0,75	1,0

a) $P(F \cap M) = 0{,}2$

b) $P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0{,}3$

c) $P(F \mid M) = \dfrac{P(M \cap F)}{P(M)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}25} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

d) $P(F) = 0{,}25$

e) $p = P(F \cap M) + P(F' \cap M') = 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9$

2. a) P (exactement 2 garçons et 3 filles) = $\dfrac{\text{\# résultats favorables}}{\text{\# résultats possibles}} = \dfrac{10}{32} = 0{,}3125$

où # résultats favorables = # de façons d'arranger 2 garçons parmi 5 enfants

soit 5!/(2!*3!) = 10.

b) P (au moins 2 garçons et au moins 1 fille)

= P (2 garçons, 3 filles) + P (3 garçons, 2 filles) + P (4 garçons, 1 fille)

$= \dfrac{10}{32} + \dfrac{10}{32} + \dfrac{5}{32} = \dfrac{25}{32} \simeq 0.78$

3. Pour contrôler la qualité de la production, on tire au hasard quatre pièces d'un lot en remplaçant la pièce tirée chaque fois. La probabilité de tirer une bonne pièce est 99 %.

   a) Quelle est la probabilité de tirer :

      i) quatre pièces défectueuses ?

      ii) trois pièces défectueuses ?

      iii) deux pièces défectueuses ?

      iv) une pièce défectueuse ?

      v) aucune pièce défectueuse ?

   b) Quelle est la probabilité de tirer au moins deux pièces défectueuses ?

   c) Quelle est la probabilité de tirer au plus deux pièces défectueuses ?

   d) Quelle est la probabilité de tirer au moins trois bonnes pièces ?

Solutionnaire

3. L'ensemble fondamental est :

$\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) : \omega_i$ est B (bon) ou D (défectueux), i = 1, 2, 3, 4$\}$.

P(B) = 0,99 et P(D) = 0,01. Les probabilités des événements élémentaires ne sont pas égales (pas d'équiprobabilité). Ainsi, il faut utiliser une méthode générale pour calculer les probabilités des événements composés.

a) i) Il y a une façon de choisir quatre pièces défectueuses parmi 4 soit 4!/4!x(4-4)! = 1 (on se rappelle que 0! = 1). Ainsi

$$P(\{D,D,D,D\}) = P(\{D\}\cap\{D\}\cap\{D\}\cap\{D\}) = P(\{D\})x\ P(\{D\})x\ P(\{D\})x\ P(\{D\})$$
$$= (0,01)^4 = 0,00000001.$$

ii) Il y a 4 façons de choisir trois pièces défectueuses parmi 4, ou également de choisir une pièce bonne parmi quatre, soit 4!/3!x(4-3)! = 4. Chaque façon a la même probabilité d'être réalisée, soit, par exemple :

$$P(\{B,D,D,D\}) = P(\{B\}\cap\{D\}\cap\{D\}\cap\{D\}) = P(\{B\})x\ P(\{D\})x\ P(\{D\})x\ P(\{D\})$$
$$= 0.99x(0,01)^3 = 0,00000099.$$

Ainsi la probabilité que l'un des 4 arrangements se réalise est

P(«trois pièces défectueuses») = 4x0,00000099 =0,00000396.

iii) Il y a 6 façons de choisir deux pièces défectueuses parmi 4, ou également de choisir deux bonnes pièces parmi quatre soit 4!/2!x(4-2)! = 6. Chaque façon a la même probabilité d'être réalisée, soit, par exemple :

$$P(\{B,B,D,D\}) = P(\{B\}\cap\{B\}\cap\{D\}\cap\{D\}) = P(\{B\})x\ P(\{B\})x\ P(\{D\})x\ P(\{D\})$$
$$= (0.99)^2x(0,01)^2 = 0,00009801.$$

Ainsi la probabilité que l'un des 4 arrangements se réalise est

P(«deux pièces défectueuses») = 6x0,00009801 = 0,00058806

iv) Il y a 4 façons de choisir une pièce défectueuse parmi 4, ou également de choisir trois bonnes pièces parmi quatre soit 4!/1!x(4-1)! = 4. Chaque façon a la même probabilité d'être réalisée, soit, par exemple :

$$P(\{B,B,B,D\}) = P(\{B\}\cap\{B\}\cap\{B\}\cap\{D\}) = P(\{B\})x\ P(\{B\})x\ P(\{B\})x\ P(\{D\})$$
$$= (0.99)^3x(0,01) = 0,00970299.$$

Solutionnaire

3. (suite)

iv) Ainsi la probabilité que l'un des 4 arrangements se réalise est

P(«une pièce défectueuse») = 4x0,00970299 = 0,03881196.

v) Il y a 1 façon de choisir aucune pièce défectueuse parmi 4, ou également de choisir quatre bonnes pièces parmi quatre, soit 4!/0!x(4-0)! = 1. Ainsi,

$P(\{B,B,B,B\}) = P(\{B\}\cap\{B\}\cap\{B\}\cap\{B\}) = P(\{B\})x\ P(\{B\})x\ P(\{B\})x\ P(\{B\})$

$= (0.99)^4 = 0,96059601.$

b) L'événement E = «tirage d'au moins deux pièces défectueueses» est représenté par E = {B,B,D,D}∪{B,D,D,D}∪{D,D,D,D}. Ainsi,

P(E) = P({B,B,D,D}) + P({B,D,D,D}) + P({D,D,D,D})

= 0,00058806 + 0,00000396 + 0,00000001 = 0,00059203.

c) L'événement F = «tirage d'au plus deux pièces défectueuses» est représenté par

F = {B,B,D,D}∪{B,B,B,D}∪{B,B,B,B}. Ainsi,

P(F) = 0,00058806 + 0,03881196 + 0,96059601 = 0,99999603.

d) L'événement G = «tirage d'au moins trois bonnes pièces» est représenté par

G = {B,B,B,D}∪{B,B,B,B}. Ainsi P(G) = 0,03881196 + 0,96059601 = 0,99940797.

4. Dans un bureau météorologique, les méthodes utilisées pour prédire s'il y aura ou non de la pluie le lendemain donnent lieu aux probabilités présentées dans le tableau qui suit. Dans ce tableau, P désigne l'événement « avoir de la pluie », A désigne l'événement « de la pluie a été annoncée » et on donne les probabilités des intersections de ces événements ainsi que des événements contraires.

	P	P'
A	0,21	0,09
A'	0,04	0,66

a) Étant donné que l'on a annoncé de la pluie, quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

b) Étant donné qu'il pleut, quelle est la probabilité que l'on ait annoncé de la pluie ?

5. Dans une étude sur le comportement des consommateurs, on a fait les observations suivantes :

- 4 consommateurs sur 10 achètent le fromage en graines;
- quand un consommateur a acheté le fromage en graines, il achète des frites surgelées 7 fois sur 10;
- 3 fois sur 20, un consommateur repart sans avoir acheté du fromage en graines et sans avoir acheté des frites surgelées;
- 3 consommateurs sur 4 achètent une baguette indépendamment de ce qu'il achète du fromage ou des frites.

Déterminer les probabilités suivantes :

a) qu'un consommateur ait acheté du fromage en graines ou ait acheté une baguette;

b) qu'un consommateur ait acheté une baguette sachant qu'il a acheté des frites surgelées;

c) qu'un consommateur ait acheté du fromage en graines sachant qu'il a acheté des frites surgelées.

Solutionnaire

4. a) Les événements : P = il pleut, A = on a annoncé de la pluie

$P(P \mid A) = P(P \cap A) / P(A) = 0.21 / (0.21 + 0.09) = 21/30 = 0,70$

b) $P(A|P) = P(A \cap P) / P(P) = 0.21 / (0.21 + 0.04) = 21/25 = 0,84$

5. G = achète du fromage en graines ; G' = n'achète pas du fromage ....
S = achète des frites surgelées ; S' = n'achète pas des frites ......
B = achète une baguette ; B' = n'achète pas une baguette.

$P(G) = 0,4$, $P(S \mid G) = 0,7$, $P(G' \cap S') = 0,15$ et $P(B) = 0,75$.

a) $P(G \cup B) = P(G) + P(B) - P(G \cap B) = 0,4 + 0,75 - P(G) \text{ x} P(B \mid G)$ = P(B)

$= 0,4 + 0,75 - 0,4 \text{ x } 0,75 = \underline{\underline{0,85}}$ (indépendance de B)

b) $P(B|S) = P(B) = \underline{\underline{0,75}}$ (indépendance de B)

c) $$P(G \mid S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{P(G)\,P(S \mid G)}{P(S)} = \frac{.4 \text{ x } .7}{P(S)}$$

$$P(S) = P(G \cap S) + \underbrace{P(G' \cap S)}_{P(G') - P(G' \cap S')}$$

$P(S) = P(G)P(S|G) + (1 - 0,4) - 0,15 = 0,4\text{x}0,7 + 0,6 - 0,15 = 0,73$

$$\text{ou bien } P(G' \cap S') = 1 - P(G \cup S) = \underbrace{1 - [\underset{.4}{P(G)} + P(S) - \underset{.28}{P(G \cap S)}] = 0.15}_{\Rightarrow P(S) = 0.73}$$

$$\text{Ainsi, } P(G \mid S) = \frac{.4 \text{ x } .7}{.73} = \underline{\underline{0.384}}$$

Dans ce problème, il faut déterminer P(S). Or $\{S\} = \{S\} \cap \{G \cup G'\}$
$= \{S \cap G\} \cup \{S \cap G'\}$ parce que G et G' sont mutuellement exclusifs.
Ainsi, $P(S) = P(S \cap G) + P(S \cap G') = P(G \cap S) + P(G' \cap S)$. Alors, il s'agit de déterminer $P(G' \cap S)$ comme on l'a fait dans le premier calcul ci-haut.

Dans le deuxième calcul, on reconnaît que $\{G \cup S\} \cup \{G' \cap S'\} = \{\Omega\}$ et, avec $P(\Omega) = 1$ et $P(G \cup S) = P(G) + P(S) - P(G \cap S)$, on trouve $P(S) = 0.73$.

Solutionnaire

5. (suite)

On peut résoudre ce problème en ayant recours au tableau des probabilités tel que développé à l'Exemple PR 24. Au tableau ci-dessous se trouvent les probabilités concernant les événements G, G', S et S' et des événements composés. En **gras** sont les probabilités données dans le texte du problème ou comprises dans les notions de base de la probabilité. Les autres probabilités en lettres *italiques* ont été dérivées pour compléter le tableau des probabilités.

	G	G'	Total
S	**0,7***0,4 = *0,28*	0,6 – 0,15 = *0,45*	0,28 + 0,45 = 1,00 – 0,27 = *0,73*
S'	0,4 - 0,28 = *0,12*	**0,15**	0,15+0,12 = *0,27*
Total	**0,4**	1 – 0,4 = *0,6*	**1,00**

Exercice

6. Une entreprise de fabrication de produits périssables a fait faire une étude de l'efficacité de son système de distribution. L'étude a démontré que 98,7 % des livraisons observées arrivent aux épiciers «à temps», soit au moins 15 jours avant la date limite de vente. La firme de conseillers en distribution qui a réalisé l'étude propose une méthode de prévision prévoyant que la livraison sera «à temps» dans 97,5 % des cas où la livraison est, au fait, «à temps». Par contre, la méthode prévoit que la livraison sera «à temps» dans 5 % des cas où la livraison, au fait, n'est pas «à temps».

a) Quelle est la probabilité qu'une livraison sera «à temps», sachant que la méthode a prévu qu'elle sera «à temps»?

b) Quelle est la probabilité qu'une livraison ne sera pas «à temps», sachant que la méthode a prévu qu'elle ne sera pas «à temps»?

c) Quelle est la probabilité qu'une livraison sera «à temps», sachant que la méthode a prévu qu'elle ne sera pas «à temps» ?

d) Quelle est la probabilité qu'une livraison ne sera pas «à temps», sachant que la méthode a prévu qu'elle sera «à temps» ?

e) Quelle est la probabilité de se tromper avec la méthode de prévision ?

Solutionnaire

6. Désignons par B le fait que la livraison soit à temps et par M qu'elle ne soit pas «à temps». Désignons par b le fait que la méthode prévoie une livraison «à temps» et par m que la méthode prévoie que la livraison ne soit pas «à temps».

Alors : $P(B) = 0{,}987$; $P(M) = 0{,}013$;
$P(b|B) = 0{,}975$ et donc, $P(m|B) = 0{,}025$;
$P(b|M) = 0{,}05$ et donc, $P(m|M) = 0{,}95$.

a) $$P(B|b) = \frac{P(B\cap b)}{P(b)} = \frac{P(b\mid B)\ P(B)}{P(b\mid B)\ P(B)+P(b\mid M)\ P(M)}$$

$$= \frac{0{,}975 x 0{,}987}{0{,}975 x 0{,}987+0{,}05 x 0{,}013}$$

$$= \frac{0{,}962325}{0{,}962975} = 0{,}999325$$

b) $$P(M|m) = \frac{P(M\cap m)}{P(m)} = \frac{P(m\mid M)\ P(M)}{P(m\mid M)\ P(M)+P(m\mid B)\ P(B)}$$

$$= \frac{0{,}95 \text{ x } 0{,}013}{0{,}95 \text{ x } 0{,}013+0{,}025 \text{ x } 0{,}987}$$

$$= \frac{0{,}01235}{0{,}01235+0{,}024675} = \frac{0{,}01235}{0{,}037025} = 0{,}33356$$

À remarquer : $$\frac{P(M\cap m)}{P(m)} = \frac{P(m\mid M)\,P(M)}{1-P(b)}$$

$$= \frac{0{,}95 \text{x} 0{,}013}{1-0{,}962975} = \frac{0{,}01235}{0{,}037025}$$

c) $$P(B|m) = \frac{P(B\cap m)}{P(m)} = \frac{P(m|B)\ P(B)}{P(m)} = \frac{0.025 x 0{,}987}{0{,}037025} = \frac{0{,}024675}{0{,}037025} = 0{,}66644 .$$

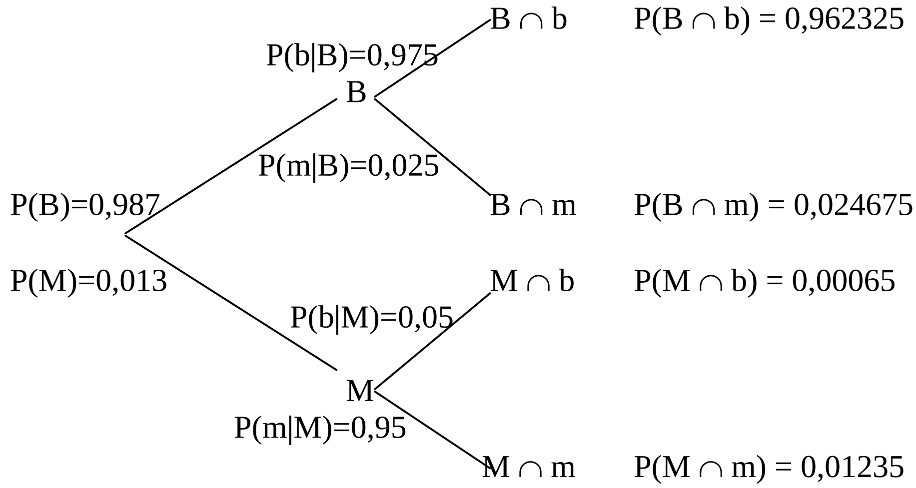
d) $$P(M|b) = \frac{P(M\cap b)}{P(b)} = \frac{P(b|M)\ P(M)}{P(b)} = \frac{0.05 x 0{,}013}{0{,}962975} = \frac{0{,}00065}{0{,}962975} = 0{,}000675 .$$

e) $P(B\cap m) = P(m|B)\ P(B) = 0{,}025 \text{ x } 0{,}987 = 0{,}024675$
$P(M\cap b) = P(b|M)\ P(M) = 0{,}05 \text{ x } 0{,}013 = 0{,}00065$
$P(\text{erreur}) = P(B\cap m) + P(M\cap b) = 0{,}024675 + 0{,}00065 = 0{,}025325$.

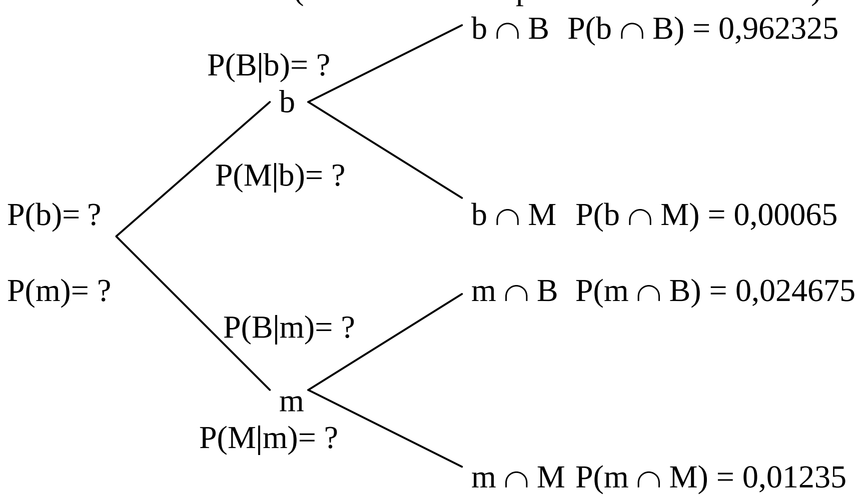
Solutionnaire

6. (suite)

Remarque : On peut déterminer un arbre des événements correspondant aux séquences {B, b}, {B,m},{M,b},{M,m}. Ces séquences correspondent à deux expériences aléatoires «déterminer l'efficacité du système de distribution» suivie de «déterminer la qualité de la méthode de prévision».



On peut déterminer un deuxième arbre des événements correspondant aux séquences {b,B}, {b,M}, {m,B}, {m,B}. Ces séquences correspondent à deux expériences aléatoires «observer le résultat de la méthode de prévision» (dont la qualité probabiliste est connue) suivie de «observer le résultat du système de distribution» (dont l'efficacité probabiliste est connue).



On peut compléter le deuxième arbre en reconnaissant que

$P(b) = P(b \cap B) + P(b \cap M)$ parce que $P(b) = P(b \cap (B \cup M)) = P(b \cap \Omega)$ et

$P(m) = P(m \cap B) + P(m \cap M)$ parce que $P(m) = P(m \cap (B \cup M)) = P(m \cap \Omega)$.

7. La firme BBM-Canada est spécialisée dans la fabrication et le montage des micro-ordinateurs personnels. Avant l'emballage du produit final, on teste soigneusement le micro-processeur de chaque micro-ordinateur produit. Monsieur Lemieux est un analyste à la succursale de Toronto qui s'intéresse aux micro-processeurs défectueux fabriqués quotidiennement pendant chacune des deux périodes de la journée (le jour et le soir). Toutefois, le nombre de micro-processeurs défectueux fabriqués le jour est indépendant du nombre de micro-processeurs défectueux fabriqués le soir. Pour chacune des périodes de la journée, nos observations nous permettent d'énoncer les résultats suivants : i) le nombre de micro-processeurs défectueux varie de 0 à 4 inclusivement ; ii) il y a autant de chances d'observer la fabrication d'aucun micro-processeur défectueux que d'observer la fabrication de 4 micro-processeurs défectueux ; iii) on évalue à 20 % la probabilité d'observer la fabrication d'un micro-processeur défectueux ; iv) il y a également 20 % de chances d'observer la fabrication de 3 micro-processeurs défectueux ; v) la probabilité d'observer deux micro-processeurs défectueux est deux fois plus élevée que celle d'observer aucun micro-processeur défectueux.

   Après avoir formulé une expérience aléatoire pertinente à cette situation et avoir établi un ensemble fondamental approprié, répondre aux questions suivantes :

   a) Considérons les deux événements suivants : E – « la production quotidienne compte 6 micro-processeurs défectueux » et F – « il y a autant de micro-processeurs défectueux le jour que le soir dans la production quotidienne ». Les deux événements sont-ils mutuellement exclusifs ? Justifier votre réponse.

   b) Dénotant par M le nombre de micro-processeurs défectueux durant la période de soir, établir la distribution de probabilité pour la variable M, soit la probabilité que M = 0, 1, 2, 3, 4.

   c) Quelle est la probabilité que seulement la production d'une des deux périodes de la journée contienne le nombre minimum de micro-processeurs défectueux ?

Solutionnaire

7. Expérience aléatoire : Choisir une journée au hasard et observer le nombre de micro-ordinateurs défectueux le jour et le soir.

$$\Omega : \{(\omega_1;\omega_2)_i ; \omega_1 \in (D_0^j, D_1^j, ..., D_4^j) \text{ et } \omega_2 \in (D_0^s, D_1^s, ..., D_4^s); i = 1,2,...,25\}$$

Événements : D_i^j défectueux le jour, D_i^s défectueux le soir, où i=0,1,2,3,4.

25 événements non équiprobables (en vertu de l'énoncé du problème).

a) E : $(D_4^j \cap D_2^s) \cup (D_3^j \cap D_3^s) \cup (D_2^j \cap D_4^s)$

F : $(D_0^j \cap D_0^s) \cup (D_1^j \cap D_1^s) \cup (D_2^j \cap D_2^s) \cup (D_3^j \cap D_3^s) \cup (D_4^j \cap D_4^s)$

$E \cap F = (D_3^j \cap D_3^s)$ donc E et F ne sont pas mutuellement exclusifs.

b)

M	f(M)
0	0,15
1	0,2
2	0,3
3	0,2
4	0,15
	1,0

c) On retient pour le nombre minimum la valeur «zéro»

$$P(D_0^j \cap D_{>0}^s) + P(D_{>0}^j \cap D_0^s) = P(D_0^j) \cdot P(D_{>0}^s) + P(D_{>0}^j) \cdot P(D_0^s)$$
$$= 0,15 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,15 = 0,255$$

où $D^s_{>0} = D^s_1 \cup D^s_2 \cup D^s_3 \cup D^s_4$ et ainsi pour $D^j_{>0}$

8. Un chercheur en marketing doit évaluer l'efficacité de l'utilisation de la reconnaissance du nom d'un produit comme moyen d'influencer les habitudes d'achat des consommateurs. Supposons que le produit soit un dentifrice particulier qui occupe 20 % du marché. Des études antérieures ont démontré que 95 % des personnes ayant déjà acheté ce produit **se rappellent** du nom du produit, alors que seulement 20 % des non acheteurs le reconnaissent.

Une personne est choisie de manière aléatoire parmi le groupe des consommateurs potentiels.

a) Quelle serait la probabilité que la personne choisie soit un **consommateur** du produit ?

b) Sachant que la personne choisie au hasard reconnaît le nom du produit, quelle est la probabilité que cette personne fasse partie des consommateurs du produit en question ?

c) Sachant que la personne choisie au hasard ne reconnaît pas le nom du produit, quelle est la probabilité qu'elle fasse partie des consommateurs du produit en question ?

d) Quelle est la probabilité que cette personne fasse partie des consommateurs du produit ou de ceux ou celles qui se rappellent du nom du produit ?

Solutionnaire

8. Les événements :

A = la personne fait partie des consommateurs
B = la personne reconnaît le nom du produit

a) P(A) = 0,20 (la part de marché = 20%).

d) Nous savons que P(B | A) = 0,95 et P(B | A') = 0,2. Or, nous cherchons :

P(A | B) = P(A $\cap$ B)/P(B) ou également

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A)\cdot P(B\,|\,A)}{P(A)\cdot P(B\,|\,A) + P(A')\cdot P(B\,|\,A')} = \frac{0{,}20\cdot 0{,}95}{0{,}20\cdot 0{,}95 + 0{,}80\cdot 0{,}20} = 0{,}542857$$

c) Dans ce cas, nous cherchons P(A|B') = P(A $\cap$ B')/P(B') ou également

$$P(A\,|\,B') = \frac{P(A)\cdot P(B'|\,A)}{P(A)\cdot P(B'|\,A) + P(A')\cdot P(B'|\,A')} = \frac{P(A \bigcap B')}{P(A \bigcap B') + P(A' \bigcap B')}$$

$$= \frac{0{,}20\cdot 0{,}05}{(0{,}20\cdot 0{,}05) + (0{,}8\cdot 0{,}8)}$$

$$= 0{,}01538$$

d) Dans ce cas, nous cherchons

P(A $\cup$ B) = P(A) + P(B) – P(A $\cap$ B) (propriété F)

= P(A) + P(B $\cap$ (A $\cup$ A')) – P(A $\cap$ B) (utiliser propriété E)

= P(A) + P(B $\cap$ A) + P(B $\cap$ A') – P(A $\cap$ B)

= P(A) + P(B $\cap$ A') (parce que P(B $\cap$ A) = P(A $\cap$ B))

= P(A) + P(A') ·P(B|A')

= 0,20 + 0,8 · 0,2 = 0,36.

9. Les produits d'une entreprise sont stockés dans un entrepôt automatisé où chaque produit porte un code pour identifier les caractéristiques du produit et de sa fabrication. Ainsi le produit # 01029980804 est le produit 01, fabriqué dans l'usine 02 à la «date» 9980804 soit le 4 août 1998.

Une commande reçue à l'entrepôt comporte une liste des codes de produits à livrer sans égard aux caractéristiques. Les produits chargés dans le camion pour répondre à la commande sont les suivants :

01029980804 01029980805 01029980805 02019980731 02019980803 02019980805
0102980731 02039980803

i) Déterminez les sous-ensembles suivants en affichant les codes des produits y compris :

a) les produits fabriqués avant le début d'août;
b) les produits fabriqués à l'usine 02;
c) les produits fabriqués à l'usine 01;
d) les produits fabriqués à l'usine 01 ou avant le début d'août;
e) les produits fabriqués à l'usine 02 et avant le début d'août.

ii) Il faut charger le camion par paires d'items. Combien de paires d'items peut-on former à partir des produits commandés ?

iii) Combien de paires d'items comprenant une unité du produit 01 et une unité du produit 02 peut-on former à partir des produits commandés ?

Solutionnaire

9. i) a) {02019980731, 0102980731}

b) {01029980804, 01029980805, 01029980805, 0102980731}

c) {02019980731, 02019980803, 02019980805}

d) {02019980731, 02019980803, 02019980805} ∪ {02019980731, 0102980731}
= {02019980731, 02019980803, 02019980805, 0102980731}.

Dans un ensemble, on n'a que les éléments distincts qui y appartiennent. Ainsi, dans l'union des deux ensembles, l'élément 02019980731 ne paraît qu'une seule fois.

e) {01029980804, 01029980805, 01029980805, 0102980731}
∩ {02019980731, 0102980731}
= {0102980731}

Dans l'intersection des deux ensembles, il n'y a qu'un élément commun tel qu'affiché.

ii) On veut des paires de produits choisis parmi les huit produits commandés. Ainsi le nombre de telles paires est 8!/(2!*6!) = 8*7/2! = 28.

iii) On doit former des paires d'items où le premier item est un produit 01 et le deuxième item est un produit 02. On peut procéder de deux façons.

a) Il y en a 4 items de produit 01 et 4 items de produit 02. Ainsi, pour chacun des items de produit 01 choisi comme premier item de la paire (donc, 4 choix), il y en a 4 items de produit 02 à choisir, ce qui donne 4*4 = 16 paires d'items.

b) Pour le premier item de chaque paire, il y en a 4! arrangements de 4 items parmi eux-mêmes. On doit choisir un item parmi les 4 pour le mettre dans l'une des paires. Or, on a 4!/1!*3! = 4/1! = 4 façons distinctes de choisir un item parmi 4 sans égard à l'ordre des 3 items non-choisis dans les arrangements. Évidemment, pour le produit 02, il y a 4 façons distinctes de choisir un item parmi 4 sans égard à l'ordre des 3 items non-choisis dans les arrangements.

9. (suite)

Enfin, il y en a 4*4 = 16 paires d'items dont le premier est le produit 01 et le deuxième est le produit 02.

À la partie ii), on a trouvé qu'il y a 28 paires distinctes d'items commandés. La différence de 28 – 16 = 12 paires est composée des paires ayant deux items de produit 01 ou deux de produit 02. En effet, il y a 4!/2!*2! = 6 façons de choisir 2 items de produit 01 et autant pour le produit 02, ce qui donne le total de 12.

10. Une entreprise de conception-programmation de logiciels de gestion manufacturière pratique un test de vérification d'un logiciel qui peut produire l'un de trois résultats :

E_1 : le logiciel est performant $P(E_1) = 0,6$

E_2 : le logiciel est adéquat $P(E_2) = 0,3$

E_3 : le logiciel est mauvais $P(E_3) = 0,1$.

Les probabilités des événements E_1, E_2, et E_3 sont *des hypothèses* concernant la performance du logiciel lorsqu'il est implanté dans le système de production d'un client; elles sont basées sur l'expérience de l'entreprise avec des logiciels du même niveau de complexité. D'après le concepteur-fabricant du logiciel, la probabilité d'un échec É lors de l'implantation, sachant le résultat du test, est donnée par :

$P(É \mid E_1) = 0,05$; $P(É \mid E_2) = 0,15$; $P(É \mid E_3) = 0,90$.

Or, le logiciel est un nouveau produit, et l'entreprise doit suivre sa performance et évaluer son potentiel commercial. Une implantation récente du logiciel s'est terminée en un échec. Quel est l'effet de cette nouvelle information sur les probabilités des trois résultats du test de vérification ?

Réponse : La formule de Bayes permet à l'entreprise de réviser ses hypothèses à la lumière de la nouvelle information en calculant $P(E_1 \mid É)$, $P(E_2 \mid É)$ et $P(E_3 \mid É)$. La probabilité d'un échec compte tenu des résultats du test et des hypothèses concernant la performance du logiciel lors de l'implantation est

$$P(É) = P(É \mid E_1) P(E_1) + P(É \mid E_2) P(E_2) + P(É \mid E_3) P(E_3)$$
$$= 0,05*0,6 + 0,15*0,3 + 0,90*0,10$$
$$= 0,165.$$

Ainsi, *les hypothèses révisées* sont :

$P(E_1 \mid É) = 0,6x0,05 / 0,165 = 0,182$

$P(E_2 \mid É) = 0,3x0,15 / 0,165 = 0,273$

$P(E_3 \mid É) = 0,1x0,90 / 0,165 = 0,545.$

11. Exercice supplémentaire à l'Exercice 10 : Si l'entreprise prend les hypothèses révisées pour ses hypothèses de base des résultats du test de vérification, et si elle utilise toujours les probabilités conditionnelles d'échec, quel est l'effet sur ses hypothèses des résultats de test si l'échec précédent est suivi d'une implantation réussie (un succès S)?

Réponse : On prend les hypothèses des résultats du test :

$P(E_1) = 0{,}182;$

$P(E_2) = 0{,}273;$

$P(E_3) = 0{,}545.$

Les probabilités conditionnelles en cas de succès sont, par complémentarité,

$P(S \mid E_1) = 0{,}95;$

$P(S \mid E_2) = 0{,}85;$

$P(S \mid E_3) = 0{,}10.$

Alors, la probabilité d'un succès est

$$P(S) = P(S \mid E_1)\, P(E_1) + P(S \mid E_2)\, P(E_2) + P(S \mid E_3)\, P(E_3)$$
$$= 0{,}95*0{,}182 + 0{,}85*0{,}273 + 0{,}10*0{,}545 = 0{,}45945.$$

Les hypothèses révisées (une deuxième fois par rapport à l'Exercice 10.) sont :

$P(E_1 \mid S) = 0{,}95x0{,}182 / 0{,}45945 = 0{,}376;$

$P(E_2 \mid S) = 0{,}85x0{,}273 / 0{,}45945 = 0{,}505;$

$P(E_3 \mid S) = 0{,}1x0{,}545 / 0{,}45945 = 0{,}119.$

Remarque : Le concept de révision des probabilités en fonction de nouvelles informations est une caractéristique fondamentale de l'approche bayesienne en probabilité et statistiques. La formule de Bayes est utilisée dans beaucoup de domaines pour suivre de façon rationnelle les effets de nouvelles informations sur les attentes en termes des révisions des mesures de l'incertitude soit des probabilités, soit des chances, soit des vraisemblances, soit des « croyances rationnelles ». À titre d'exemple, les recherches médicales, pharmaceutiques et biotechniques s'appuient sur des analyses bayesiennes pour développer, faire évoluer et valider des hypothèses de recherche. En d'autres domaines comme les systèmes de contrôle des équipements ou des processus de production, l'analyse financière et la vérification, l'approche bayesienne est utilisée pour trouver des solutions adaptatives à des problèmes où l'incertitude est incontournable. Si elle a été controversée à ses débuts, l'approche bayesienne a connu un succès certain depuis un quinzaine d'années.