Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt liegt weltweit bei $0,514$; auf 17 Mädchengeburten kommen also 18 Knabengeburten. Eine Geburt werde im Folgenden als Zufallsexperiment betrachtet. (Runden Sie auf vier Stellen hinter dem Komma!)

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Paar mit 5 Kindern keinen Sohn?

b) X_8 sei die Anzahl der Söhne in einer Familie mit 8 Kindern. Berechnen Sie $\mathrm{E}(X_8)$.

c) Berechnen Sie die Verteilung $P\{X_8 = k\}$ der Zufallsvariablen X_8 und stellen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ grafisch dar.

d) Wie viele Kinder muss ein Paar haben, wenn es mit mindestens 99 prozentiger Sicherheit mindestens eine Tochter haben will?

e) In einem Jahr werden in einem Land 390 600 Jungen und 309 400 Mädchen geboren. Ist das plausibel oder muss es für diese Zahlen andere Gründe als rein stochastische Schwankungen geben?

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable Y_N nimmt die Werte

$0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$P\left\{Y_N = \frac{n}{N}\right\} = \binom{N}{n} \cdot \frac{1}{2^N} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, N)$

an.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $X_5 = Y_5 - \frac{1}{2}$ an!

b) Berechnen Sie $P\{|X_5| > 0,4\}$.

Aufgabe 3

Ein idealer Tetraeder werde wie ein Würfel benutzt. Seine Flächen sind mit den Augenzahlen $n = 1, 2, \ldots, N$ markiert.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω und dessen Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ für das Würfeln mit dem Tetraeder an.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Zufallsvariablen X an, die das Experiment beschreibt.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{-(x_1^2 + x_2^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_3^2)}}{2\pi\sqrt{\pi}}.$$

a) Berechnen Sie (durch Integration über x_2) die Randdichte $f_{X_1,X_3}(x_1, x_3)$.

b) Welche Verteilungen besitzen X_1 und X_3?

Aufgabe 5

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$. Die Zufallsvariable X nehme die Werte $k = 0, 1, 2, \ldots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P\{X = k\} = \alpha(1-\alpha)^k$ an.

a) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = 1$ gilt.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 6

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(s) = \frac{(\lambda - j(c+1)) \cdot (\lambda + js)}{\lambda^2 + s^2}.$$

Berechnen Sie c, sodass $f(s)$ die charakteristische Funktion $\varphi(s)$ einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit dem Parameter λ ist.

b) X_1 und X_2 seien zwei unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit den Parametern λ_1 und λ_2. Es gilt also:

$$f_{X_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \qquad x > 0, \qquad i = 1, 2$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X_1 größer als X_2 ist.

Aufgabe 1

Lösung

Im Folgenden ist $p = 0,514$ und damit $1 - p = 0,486$.

k	$P\{X_8 = k\}$
0	$0,0031$
1	$0,0263$
2	$0,0975$
3	$0,2062$
4	$0,2726$
5	$0,2306$
6	$0,1220$
7	$0,0369$
8	$0,0049$

a) $P\{X_5 = 0\} = \binom{5}{0} 0,514^0\, 0,486^5 = 0,0271$

b) $\mathrm{E}(X_8) = 8 \cdot 0,514 = 4,112$

c) $P\{X_8 = k\} = \binom{8}{k} 0,514^k\, 0,486^{8-k}$

d) Y_N sei die Anzahl der Töchter.

$$\begin{aligned} P\{Y_N \geq 1\} &= 1 - P\{Y_N = 0\} \\ &= 1 - \binom{N}{0} 0,486^0\, 0,514^N \\ &= 1 - 0,514^N \overset{!}{\geq} 0,99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0,514^N &\leq 0,01 \\ \Leftrightarrow N \cdot \log_{10} 0,514 &\leq \log_{10} 0,01 \\ \Leftrightarrow N \cdot (-0,289) &\leq -2 \\ \Leftrightarrow N &\geq 6,92 \end{aligned}$$

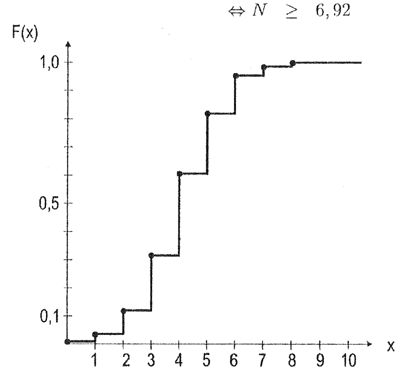

Bild 1: Aufgabe 1c, Verteilungsfunktion $F(x)$

Das Paar muss mindestens **7 Kinder** haben.

e) Insgesamt werden in dem Land $390\,600 + 309\,400 = 700\,000$ Kinder geboren. Zur Beantwortung der Frage benutzen wir den Satz von DE MOIVRE-LAPLACE. Es ist, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der Jungen bezeichnet, mit $N = 700\,000$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= Np = 700\,000 \cdot 0,514 = 359\,800 \\ D^2(X) &= Np(1-p) = 700\,000 \cdot 0,514 \cdot 0,486 = 174\,862,8 \\ \Rightarrow D(X) &= 418,17 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} P\{X > 390\,599\} &= 1 - P\{X \leq 390\,599\} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{390\,599 - 359\,800}{418,17}\right) \\ &= 1 - \Phi(73,65) \approx 0 \end{aligned}$$

Das betrachtete Ereignis ist demnach praktisch unmöglich!

Aufgabe 2

Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X_5 ist in folgender Tabelle dargestellt:

n	Y_5	X_5	$P\{Y_5 = \frac{n}{5}\} = P\{X_5 = \frac{n}{5} - \frac{1}{2}\}$
0	0	$-0,5$	1/32
1	1/5	$-0,3$	5/32
2	2/5	$-0,1$	10/32
3	3/5	$0,1$	10/32
4	4/5	$0,3$	5/32
5	1	$0,5$	1/32