Vorlesungsskript Lineare Algebra für Informatiker SS2011

— Gehalten von Professor Prüfer —

Dieses Skript ist über etwa 5 Monaten neben unserer studentischen Tätigkeit in mühevollster Kleinarbeit entstanden und es enthält fraglos Fehler. Und über jeden einzelnen dieser Fehler sind wir selbst am unglücklichsten. Es wurde allerdings zu keinem Zeitpunkt bewusst getäuscht oder bewusst die Urheberschaft nicht kenntlich gemacht. Sollte sich jemand hierdurch oder durch inkorrekte Zeichensetzung oder versäumtes Setzen von Fußnoten bei insgesamt sehr vielen Seiten verletzt fühlen, so tut uns das aufrichtig Leid. Die eingehende Prüfung und Gewichtung dieser Fehler obliegt jetzt dem geneigten Leser. Wir werden selbstverständlich aktiv mithelfen festzustellen, inwiefern darin ein wissenschaftliches, wir betonen ein wissenschaftliches Fehlverhalten liegen könnte. Und wir werden gerne bis zum Ergebnis dieser Prüfung vorübergehend, wir betonen vorübergehend, auf das Mitführen einer coolen Zorro-Maske verzichten, allerdings nur bis dahin, anschließend werden wir sie wieder tragen.
Wir werden uns keine anderen Maßstäbe anlegen, als wir bei anderen angesetzt hätten. Jede weitere Kommunikation über das Thema werden wir von nun an ausschließlich mündlich, per E-Mail oder über Jabber führen. Die Menschen in diesem Land erwarten, dass wir uns um das fordernde Amt des mitTEXenden Studenten mit voller Kraft kümmern und das können wir auch. Wir stehen vor einem historischen Durchbruch im kollaborativen LATEX Schreiben. Und wir tragen die Verantwortung für den eingesetzten Gobby-Server, wie die rege Nutzung des selben auf erfreuliche Weise zeigt.

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen und Körper **8**

1.1 Bezeichnungen 12

1.2 Endliche Körper 13

1.2.1 Beispiel der Restklassenkörper 13

1.2.2 Addition von Resten für festes $n \in \mathbb{N}$ 13

1.2.3 Multiplikation von Restklassen für fest gegebenes $n \in \mathbb{N}$ . . 14

2 Vektorräume **16**

2.1 Rechengesetze der skalaren Multiplikation 19

2.2 Matrizenaddition 20

2.3 Skalare Multiplikation von Matrizen 20

2.4 Neutrales Element 22

2.5 Entgegengesetztes Element 22

2.6 Nullvektor 22

2.7 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem 23

3 Elementare Theorie von Vektorräumen **25**

3.1 Linearkombinationen 25

3.1.1 Erweiterung auf unendliche Mengen von Vektoren 30

3.1.2 endlich erzeugte Vektorräume 34

3.1.3 Basen von Vektorräumen 35

3.1.4 Maximale linear unabhängigen Menge 38

3.1.5 Minimales Erzeugendensystem 40

3.1.6 Austauschlemma 40

3.1.7 Steinitzscher Austauschsatz 43

3.1.8 Dimension von Vektorräumen 46

3.1.9 komplementäre Unterräume 48

3.1.10 Dimensionssatz 51

3.1.11 Hyperebenen 53

3.1.12 endliche Basis 54

4 Lineare Gleichungssysteme **56**
4.1 Matrizenmultiplikation . . . 56
4.1.1 Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte . . . 56
4.1.2 Multiplikation von Matrizen . . . 56
4.1.3 Eigenschaften der Matrizenmultiplikation . . . 58
4.2 Lineare Gleichungssysteme . . . 60
4.2.1 Matrizenschreibweise . . . 60
4.2.2 homogene Systeme . . . 61
4.2.3 Lösungsstruktur von linearen Gleichungssystemen . . . 62
4.2.4 Zeilenstufenform einer Matrix . . . 65
4.2.5 Elementare Zeilenumformungen . . . 66
4.3 Gauß-Algorithmus . . . 69
4.3.1 Zusammenhang mit Gleichungssystemen . . . 73
4.4 Rang von Matrizen . . . 79
4.4.1 Rangberechnung . . . 81
4.5 Anwendung: Lineare Codes . . . 86
4.5.1 Fehlerkorrigierende (lineare) Codes . . . 86
4.5.2 Hamming-Kugel . . . 87
4.5.3 Fehlerkorrigierender Code . . . 87
4.5.4 Minimalabstand eines Codes . . . 88
4.5.5 Generatormatrix . . . 89
4.5.6 Gewicht eines Vektors . . . 90
4.5.7 Dualer Code . . . 91
4.5.8 Syndrom eines Vektors . . . 92
4.5.9 Nebenklassen . . . 93
4.5.10 Anführer einer Nebenklasse . . . 94
4.5.11 Decodierung linearer Codes . . . 95

5 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen **97**
5.1 Isomorphistische lineare Abbildungen . . . 102
5.1.1 Surjektivität und Injektivität . . . 102
5.1.2 Isomorphismus . . . 102
5.2 Kern einer linearen Abbildung . . . 102
5.3 Konstruktion einer linearen Abbildung mittels Bildern der Basiselemente . . . 103
5.4 Charakterisierung einer linearen Abbildung mittels der Bilder von Basiselementen . . . 106
5.5 Darstellung von linearen Abbildungen mittels Matrizen . . . 110
5.6 Rang einer linearen Abbildung . . . 121
5.6.1 Invertierbare Matrizen . . . 122

6 Determinanten **129**
6.1 Permutation 131
6.1.1 symmetrische Gruppe 133
6.1.2 Vorzeichen einer Permutation 133
6.2 Leibnizsche Determinantenformel 135
6.3 Berechnung von Determinanten 140
6.3.1 Multiplikation von Determinanten 148

7 Eigenwerte und Eigenvektoren **154**
7.1 Eigenwerte von Matrizen 157
7.2 Struktur von Eigenvektoren 157
7.3 Das charakteristische Polynom 162
7.3.1 Strategie zur Bestimmung der Eigenwerte von f 165
7.3.2 Nullstellen von Polynomen 166
7.4 Fundamentalsatz der Algebra 168
7.5 Wir drehen die Zeit zurück zur Diagonalisierbarkeit 170

8 Längen- und Winkelmessung in Vektorräumen **174**
8.1 Skalarprodukte über reellen Vektorräumen 174
8.2 Winkelmessung 181
8.3 Orthogonale Unterräume 183

9 Längen- und Winkelmessung in Vektorräumen **187**
9.1 Hauptachsentransformation von Quadratischen Formeln 187
9.1.1 Hauptachsentransformation quadratischer Form 190

10 Hinweise zur Klausur **194**

Einführung

Die Vorlesung wird von Professor Prüfer (pruefer@math.uni-leipzig.de) gehalten.

Anforderungen:

Jeden Mittwoch werden vier Übungsaufgaben gestellt, sie sind bis zum nächsten Mittwoch zu bearbeiten. 50% der Punkte sind für die Prüfungszulassung notwendig.

Prüfung:

Die Klausur hat eine Länge von 90 Minuten. Eine Frage ist zur Theorie (Def. / Sätze / Beispiele / einfachste Rechnungen), der Rest sind Anwendungsaufgaben. Definitionen und Sätze müssen jederzeit ohne Hefter reproduzierbar sein. Beispiele und Gegenbeispiele sollten immer dazu gefunden werden. Beweise von Sätzen müssen verstanden sein und die Grundideen gekannt werden.
Allgemeine Abfolge in der Vorlesung ist Definition – Satz – Beweis – Beispiel.
Alle Informationen sind auf dem Lernserver der Mathematik (`http://www.math.uni-leipzig.de/cms/studium/uebungsaufgaben-server.html`) verfügbar.

Lineare Algebra

Lineare Algebra beschäftigt sich vor allem mit Vektorräumen. Informatiker benötigen die lineare Algebra unter anderem für Verschlüsselungstheorien.

Vorbemerkungen

Beweisverfahren

Ein **Satz** besteht aus einer **Voraussetzung** und einer **Behauptung**. Ihm folgt ein Beweis:

direkter Beweis

Behauptung: Aus A folgt B. ($A \Rightarrow B$).
Gelte A. bla bla bla ... (Logik), dies beweist B.
Vorteil: Einfach nachzuvollziehen.

Beweis durch Kontraposition

$A \Rightarrow B$ ist logisch äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$. Jetzt beweist man $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt.
Gelte $\neg B$. bla bla bla, dies beweist $\neg A$.

Indirekter Beweis

Vorgehensweise wie folgt:
Angenommen, B wäre falsch, dann folgt aus A: bla bla bla. Dies ist ein Widerspruch. $\Rightarrow$ B ist eine wahre Aussage.

Vollständige Induktion

$\mathbb{N}$ - Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
Induktionsaxiom: Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

1. $1 \in M$
2. Mit $n \in M$ gilt auch $n + 1 \in M$.

Dann ist $M = \mathbb{N}, \Rightarrow$ Induktionsbeweis.

A $\Leftrightarrow$ B (Äquivalent)

(auch: „A gilt *genau dann, wenn* B gilt“)
Abkürzung für $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, d.h. zwei Beweise: Erst beweist man $A \Rightarrow B$, dann $B \Rightarrow A$
Wenn gilt $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D$, wären das 6 Beweise! Also beweist man oft: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow A$.

1 Gruppen und Körper

Definition 1.1 (Gruppe)**:**
Eine Menge G heißt **Gruppe**, wenn auf G eine lineare Verknüpfung $\circ$ von je zwei Elementen aus G erklärt ist, die folgende Eigenschaften besitzt.

1. **Abgeschlossenheit:** Für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt: $g_1 \circ g_2 \in G$
2. **Assoziativitätsgesetz:** Für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$.
3. **Existenz eines neutralen Elementes** e**:** Es gilt: $g \circ e = e \circ g = g$ bei allen $g \in G$.
4. **Existenz eines inversen Elements:** Zu jedem $g \in G$ gibt es ein inverses Element g^{-1} so dass gilt: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Definition 1.2 (kommutative Gruppe)**:**
Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ von je zwei Elementen aus G heißt **Abel'sche Gruppe** oder **kommutative Gruppe**, falls „1." bis „4." aus Definition 1.1 erfüllt sind und zusätzlich noch gilt:

5. **Kommutativgesetz:** $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ für alle $g_1, g_2 \in G$

Beispiel 1.1 $(\mathbb{R}, +)$**:**

1. Abgeschlossenheit: $a + b \in \mathbb{R}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Assoziativgesetz gilt: $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. neutrales Element: $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$.
4. inverses Element zu $a \in \mathbb{R}$: $(-a) : (-a) + a = a + (-a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ist **Gruppe**.
5. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ist **kommutative Gruppe**.

?

Beispiel 1.2 $(\mathbb{Q}, +)$**:**
Weil $(\mathbb{R}, +)$ Gruppe ist und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, gelten jedenfalls: „2“., „5“.

1. Abgeschlossenheit: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}; b, d \neq 0)$
   $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
3. $0 \in \mathbb{Q}, 0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + 0$
4. $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ $(a, -a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$

$\Rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ ist **abel'sche Gruppe**.

?

Beispiel 1.3 $(\mathbb{N}, +)$**:**

1. Abgeschlossenheit: $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$ für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
2. Assoziativgesetz gilt, weil $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$
3. kein neutrales Element in $(\mathbb{N}, +)$, da $0 \notin \mathbb{N}$
   $\Rightarrow (\mathbb{N}, +)$ **keine Gruppe**
4. Zu $n \in \mathbb{N}$, gibt es kein inverses Element ($-n \notin \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

?

Beispiel 1.4 $(\mathbb{R}, \cdot)$**:**

1. Abgeschlossenheit: $a \cdot b \in \mathbb{R}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. neutrales Element: $1 \in \mathbb{R}, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
4. inverses Element **wäre**: $a \in \mathbb{R}$, inv. $a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$, **aber** nur bei $a \neq 0$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$ ist **keine Gruppe**. (denn $a \cdot 0 = 1$ ist für kein $a \in \mathbb{R}$ erfüllt)

?

Beispiel 1.5 $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$**:**
Inverses zu $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$: $a \in \mathbb{R}$

4. Inverses $a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
5. Multiplikation ist kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$\Rightarrow (\mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist **eine abel'sche Gruppe**.

•

Definition 1.3 (endliche Gruppe)**:**
Eine Gruppe G heißt **endliche Gruppe**, falls die Menge G aus endlich vielen Elementen besteht. Andernfalls heißt G eine **unendliche Gruppe**.

Beispiel 1.6:
$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind unendliche Gruppen.

einelementige Gruppen:

G habe ein Element: $G = \{e\}$, $e \circ e = e$

$\circ$	e
e	e

zweielementige Gruppen:

$G = \{e, a\}, a \neq e$.
a muss ein Inverses besitzen: a^{-1}. Denn falls $a^{-1} = e$ wäre,
so wäre $a \cdot a^{-1} = e \Rightarrow \underbrace{a \cdot e}_{=a,\text{ aber } a \neq e} = e$.
$\Rightarrow a^{-1} = a \Rightarrow a \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

dreielementige Gruppen:

$G = \{e, a, b\}, e \neq a \neq b \neq e$
$a \cdot a = b$, keine andere Möglichkeit.

Die rechte Tabelle ist eine Gruppentafel.
Bei 4-elementigen Gruppen gibt es 2 Gruppentafeln,
bei `$PRIMZAHL`-elementigen Gruppen gibt es genau eine Gruppentafel

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Definition 1.4 (Ordnung einer Gruppe)**:**
Ist G eine endliche Gruppe, so ist die Ordnung von G die Anzahl ihrer Elemente:
$\operatorname{Ord} G =$ Anzahl der Elemente von G.
Ist G eine unendliche Gruppe, so setzt man $\operatorname{Ord} G = \infty$.

Folgerung 1.1:
Das neutrale Element einer Gruppe G ist eindeutig.

Beweis 1.1:
Existenz eines neutralen Elementes folgt aus der Definition von G. Angenommen e_1 und e_2 sind neutrale Elemente von G:

Weil e_1 neutrales Element ist: $a \cdot e_1 = e_1 \cdot a = a$ für alle $a \in G$.

1. Wähle $a = e_2$: $e_2 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$
   Weil auch e_2 neutrales Element ist: $a \cdot e_2 = e_2 \cdot a = a$ für alle $a \in G$
2. Wähle: $a = e_1$: $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_1$

Aus „1.“ und „2.“ folgt $e_1 = e_2$, das heißt es gibt genau ein neutrales Element in G
$\square$

Folgerung 1.2:
Sei G eine Gruppe und $g \in G$, dann ist das inverse Element g^{-1} von g eindeutig bestimmt.

Beweis 1.2:
Seien g_1 und g_2 beides inverse Elemente zu g:
Das heißt, es gilt $g_1 \cdot g = g \cdot g_1 = e$ und $g_2 \cdot g = g \cdot g_2 = e$. Daraus folgt $g \cdot g_1 = e$.
Multiplikation von links mit g_2 ergibt: $g_2 \cdot (g \cdot g_1) = g_2 \cdot e$
Nach Definition von e ist $g_2 \cdot e = g_2$.
Links folgt wegen des Assoziativgesetzes: $g_2 \cdot (g \cdot g_1) = (g_2 \cdot g) \cdot g_1$
Wegen $g_2 \cdot g = e$ ergibt dies $g_2 \cdot (g \cdot g_1) = e \cdot g_1 = g_1$

$$\Rightarrow g_2 \cdot (g \cdot g_1) = g_2 \cdot e \text{ ist äquivalent zu } g_1 = g_2$$

$\square$

Definition 1.5 (Körper)**:**
Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt Körper genau dann, wenn folgendes gilt:

1. $(\mathbb{K}, +)$ ist eine abel'sche Gruppe
2. $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist eine abel'sche Gruppe (0 – neutrales Element der Addition)
3. Es gilt das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$

Beispiel 1.7:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper
2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist Körper
3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist **kein** Körper
4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper

$$\underbrace{\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}_{\text{Körper}}$$

Folgerung 1.3:
Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und 0 das neutrale Element der Addition. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{K}$:

$$a \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot a = 0$$

Beweis 1.3:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + 0 &= a \cdot 0 && \text{Eigenschaft des neutralen Elements der Addition} \\ &= a \cdot (0 + 0) && \text{Eigenschaft des neutralen Elements der Addition} \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && \text{Distributivgesetz} \end{aligned}$$

Addieren auf beiden Seiten das entgegengesetzte Element von $a \cdot 0$ bezüglich der Addition. Sei das $-(a \cdot 0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -(a \cdot 0) + ((a \cdot 0 + 0)) &= -(a \cdot 0) + ((a \cdot 0 + a \cdot 0) \\ \Rightarrow (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + 0 &= (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0) \\ \Rightarrow 0 + 0 = 0 + a \cdot 0 &\Rightarrow 0 = a \cdot 0 \end{aligned}$$

Analog beweist man $0 \cdot a = 0$
$\square$

1.1 Bezeichnungen

0 – neutrales Element bezüglich der Addition
1 – neutrales Element bezüglich der Multiplikation
$-a$ – entgegengesetzte Element zu a bzgl. der Addition
a^{-1} – inverse Element zu $a \neq 0$ bzgl. der Multiplikation

Folgerung 1.4 (Nullteilerfreiheit)**:**
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a, b \neq 0$.
Dann gilt $a \cdot b \neq 0$.

Beweis 1.4:
Sei $x \in \mathbb{K}, x \neq 0$ und gelte $x \cdot y = 0$.
Zu zeigen ist: $y = 0$.
Indirekter Beweis: Angenommen, $y \neq 0$, dann existiert y^{-1}.
Jetzt folgt:

$$\begin{aligned} x \cdot y = 0 \Rightarrow (x \cdot y) \cdot y^{-1} &= 0 \cdot y^{-1} = 0 \\ x \cdot (y \cdot y^{-1}) &= 0 \\ \Rightarrow x \cdot 1 &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 0$. Diesen Widerspruch kann man nur dadurch aufheben, indem man die Annahme $y \neq 0$ fallen lässt.
Es folgt $y = 0$.
$\square$

1.2 Endliche Körper

1.2.1 Beispiel der Restklassenkörper

Division mit Rest in $\mathbb{Z}$:
Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{Z}$, so dass gilt: $a = q \cdot b + r$ mit $0 \leq r < b$. r ist der Rest der Division von a durch b.

?

Beispiel 1.8:

$$a = 25, b = 5 \to 25 = 5 \cdot 5 + 0 \qquad q = 5, r = 0$$
$$a = 25, b = 7 \to 25 = 3 \cdot 7 + 4 \qquad q = 3, r = 4$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann sind bei Division von $a \in \mathbb{Z}$ durch n die Reste $0, 1, 2, \ldots, n-1$ möglich.
Schreibweise: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ seien Bezeichnungen für diese Reste.

1.2.2 Addition von Resten für festes $n \in \mathbb{N}$

$\overline{a} +_{(n)} \overline{b} = \overline{a+b}$

?

Beispiel 1.9:
Für $a = 5$, $b = 7$, $n = 21$ $\qquad \overline{a} = 5$, $\overline{b} = 7$:
$\overline{5} +_{(21)} \overline{7} = \overline{5+7} = \overline{12}$

Für $a = 14$, $b = 19$, $\overline{a} = 14$, $\overline{b} = 19$, $n = 21$:
$\overline{14} +_{(21)} \overline{19} = \overline{14+19} = \overline{33} = \overline{12}$

Für $n = 3$, Reste $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$:

$+_{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

1.2.3 Multiplikation von Restklassen für fest gegebenes $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{a} \cdot_n \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

?

Beispiel 1.10:

$$\begin{aligned} n = 21,\ \overline{a} = 5,\ \overline{b} = 7 \\ \overline{5} \cdot_{21} \overline{7} &= \overline{35} \\ &= \overline{14} \end{aligned}$$

?

Beispiel 1.11:

$$\begin{aligned} a =& 14,\ b = 11 \\ \overline{a} \cdot_{21} \overline{b} &= \overline{14} \cdot \overline{19} \\ &= \overline{266} \\ &= \overline{14} \end{aligned}$$

$+_{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Damit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf der Menge $\mathbb{Z}_n$ der Reste bei Division durch n, $\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$ eine Addition und eine Multiplikation.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist immer eine abel'sche Gruppe.
Nur $(\mathbb{Z}_n \backslash \{0\}, \cdot)$ ist nicht immer eine abel'sche Gruppe.

?

Beispiel 1.12:
$n = n_1 \cdot n_2,\ n_1 > 1,\ n_2 > 1,\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} &= \overline{n_1 \cdot n_2} \\ &= \overline{n} \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

Also $\overline{n_1} \neq 0, \overline{n_2} \neq 0$ und $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$

Das heißt, wenn n eine zerlegbare natürliche Zahl ist, dann ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da die Nullteilerfreiheit verletzt ist. Man kann zeigen: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper für Primzahlen p.
$\mathbb{Z}_p$ ist ein endlicher Körper mit genau p Elementen.

2 Vektorräume

Definition 2.1 (Vektorraum)**:**
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V eine Menge. Die Elemente von V nennen wir Vektoren und die Elemente von $\mathbb{K}$ heißen Skalare.
V heißt **Vektorraum** über $\mathbb{K}$, falls folgendes gilt:

1. Über V ist eine Addition $+$ erklärt und $(V, +)$ bildet eine abel'sche Gruppe.
2. Es gibt eine skalare Multiplikation $\cdot$ zwischen Elementen aus $\mathbb{K}$ und V:
   d.h. die Skalare Multiplikation bildet einen Vektor: $k \cdot v \in V$

Die skalare Multiplikation muss folgende Eigenschaften haben:

1. $1 \cdot v = v$ $\qquad \forall v \in V$
2. $k_1 \cdot (k_2 \cdot v) = (k_1 \cdot k_2) \cdot v$ $\qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, alle $v \in V$
3. $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$ $\qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, alle $v \in V$
4. $k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$ $\qquad \forall k \in \mathbb{K}$, alle $v_1, v_2 \in V$

Beispiel 2.1:
$\mathbb{K}$ sei ein Körper.

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} \middle| \; k_i \in \mathbb{K}; i = 1, \ldots, n \right\}$$

Addition in $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ \cdots \\ k_n' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} k_1 + k_1' \\ k_2 + k_2' \\ \cdots \\ k_n + k_2' \end{pmatrix}$$

skalare Multiplikation:

$$k \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} k \cdot k_1 \\ k \cdot k_2 \\ \cdots \\ k \cdot k_n \end{pmatrix}$$

angewendet für $\mathbb{R}$ und $\mathbf{n = 3}$:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+(-1) \\ 1+2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$

Beweis 2.1 ($(\mathbb{K}^n, +)$ ist abel'sche Gruppe)**:**

1. Abgeschlossenheit

Nach Definition gilt:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

2. Kommutativität

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1'' \\ k_2'' \\ \vdots \\ k_n'' \end{pmatrix} \right) &\overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1' + k_1'' \\ k_2' + k_2'' \\ \vdots \\ k_n' + k_n' \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k_1 + (k_1' + k_1'') \\ k_2 + (k_2' + k_2'') \\ \vdots \\ k_n + (k_n' + k_n'') \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k_1 + k_1' \\ \vdots \\ k_n + k_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1'' \\ \vdots \\ k_n'' \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{def}}{=} \left(\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} k_1'' \\ \vdots \\ k_n'' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Also **gilt** bei $+$ das **Kommutativgesetz**.

3. Neutrales Element

$\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ heißt „Nullvektor“

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}k_1+0\\ \vdots\\ k_n+0\end{pmatrix} \overset{\text{in } \mathbb{K}}{=} \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}0+k_1\\ \vdots\\ 0+k_n\end{pmatrix} \overset{\text{in } \mathbb{K}}{=} \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

Das heißt $\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ hat in $(V,+)$ die Eigenschaften des neutralen Elements. Wegen der Eindeutigkeit des Nullelements in Gruppen folgt:

$\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ ist das **neutrale Element**.

4. Inverses Element

entgegengesetzter Vektor zu $\left(\begin{smallmatrix}k_1\\ \cdots\\ k_n\end{smallmatrix}\right) \in V$:

Wähle $\left(\begin{smallmatrix}-k_1\\ \cdots\\ -k_n\end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-k_1\\ \vdots\\ -k_n\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}k_1+(-k_1)\\ \vdots\\ k_n+(-k_n)\end{pmatrix} \overset{\text{Def. Körper}}{=} \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

analog:

$$\begin{pmatrix}-k_1\\ \vdots\\ -k_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\mathbb{K}^n,+)$ ist eine **Gruppe**.

5. abel'sche Gruppe

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_1'\\ \vdots\\ k_n'\end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix}k_1+k_1'\\ \vdots\\ k_n+k_n'\end{pmatrix} \overset{\text{Def. Körper}}{=} \begin{pmatrix}k_1'+k_1\\ \vdots\\ k_n'+k_n\end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix}k_1'\\ \vdots\\ k_n'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

Alle Gleichungen gelten für alle Elemente aus $\mathbb{K}^n$ und alle $k \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow (\mathbb{K}^n,+)$ ist eine **abel'sche Gruppe**.

2.1 Rechengesetze der skalaren Multiplikation

$$1 \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot k_1 \\ \vdots \\ 1 \cdot k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

—

$$k \cdot \left(k' \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \right) \overset{\text{Def}}{=} k \cdot \begin{pmatrix} k' \cdot k_1 \\ \vdots \\ k' \cdot k_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} k \cdot (k' k_1) \\ \vdots \\ k \cdot (k' \cdot k_1) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{in } \mathbb{K}}{=} \begin{pmatrix} (k \cdot k') \cdot k_1 \\ \vdots \\ (k \cdot k') k_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} (k \cdot k') \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

—

$$(k + k') \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} (k + k') k_1 \\ \vdots \\ (k + k') k_n \end{pmatrix} \overset{\text{in } \mathbb{K}}{=} \begin{pmatrix} k \cdot k_1 + k' \cdot k_1 \\ \vdots \\ k \cdot k_n + k' \cdot k_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def } +}{=} \begin{pmatrix} k \cdot k_1 \\ \vdots \\ (k \cdot k_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k' \cdot k_1 \\ \vdots \\ k' \cdot k_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} k \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Damit ist dieses Distributivgesetz gezeigt.
Anderes Distributivgesetz:

$$k \cdot \left(\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k'_1 \\ \vdots \\ k'_n \end{pmatrix} \right) \overset{\text{Def}}{=} k \begin{pmatrix} k_1 + k'_1 \\ \vdots \\ k_n + k'_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} k(k_1 + k'_1) \\ \vdots \\ k(k_n + k'_n) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{in } \mathbb{K}}{=} \begin{pmatrix} k \cdot k_1 + k \cdot k'_1 \\ \vdots \\ k \cdot k_n + k \cdot k'_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} k \cdot k_1 \\ \vdots \\ k \cdot k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot k'_1 \\ \vdots \\ k \cdot k'_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def}}{=} k \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} k'_1 \\ \vdots \\ k'_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\mathbb{K}, +)$ und $\mathbb{K}^n$ $(n \in \mathbb{K})$ als Skalare bilden Vektorräume.
Spezialfall $n = 1$: $V = \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.
Das heißt jeder Körper $\mathbb{K}$ ist auch ein Vektorraum: $V = \mathbb{K}$ (Menge der Skalare).

Verallgemeinerung von $\mathbb{K}^n$ zu $\mathbb{K}^{m\times n}$ ($\mathbb{K}$, Körper)

$$\mathbb{K}^{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, k_{ij} \in \mathbb{K}, (i = 1, \ldots, m)(j = 1, \ldots, n) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ heißt $m \times n$-Matrix. m – Zeilenanzahl, n – Spaltenanzahl.

a_{ij} - steht in i-ter Zeile und j-ter Spalte.

2.2 Matrizenaddition

Addition auf $\mathbb{K}^{m\times n}$: („Komponentenweise Addition“)

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m,1} & \cdots & k_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k'_{1,1} & \cdots & k'_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ k'_{m,1} & \cdots & k'_{m,n} \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} k_{1,1} + k'_{1,1} & \cdots & k_{1,n} + k'_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m,1} + k'_{m,1} & \cdots & k_{m,n} + k'_{m,n} \end{pmatrix}$$

Man kann nur Matrizen gleicher Anzahl an Spalten und Zeilen addieren (m und n sind fest!).

2.3 Skalare Multiplikation von Matrizen

(„komponentenweise Multiplikation.“)

$$k \in \mathbb{K}, \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k \cdot k_{11} & \cdots & k \cdot k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k \cdot k_{m1} & \cdots & k \cdot k_{mn} \end{pmatrix}$$

?

Beispiel 2.2:
$ax + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$; x, y sind gesucht.
Sei L die Lösungsmenge der Gleichungen, dann gilt: $L \subseteq \mathbb{R}^2$ und L bilden einen Vektorraum.
Sei $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Lösung von $ax + by = 0$, d.h. es gibt $a \cdot x_1 + b \cdot y_1 = 0$.
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) \in L$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist: $a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) = 0$
Gelte aber $a \cdot x_1 + b \cdot y_1 = 0$.
Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda(a \cdot x_1 + b \cdot y_1) = \lambda \cdot 0 = 0 &\overset{\text{Distributiv}}{\Rightarrow} \lambda(a \cdot x_1) + \lambda(b \cdot y_1) = 0 \\ &\overset{\text{Assoziativ}}{\Rightarrow} (\lambda a)\, x_1 + (\lambda b)\, y_1 = 0 \\ &\overset{\text{Kommutativ}}{\Rightarrow} (a \cdot \lambda)\, x_1 + (b \cdot \lambda)\, y_1 = 0 \\ &\overset{\text{Assoziativ}}{\Rightarrow} a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) \in L$

?

Beispiel 2.3:
Seien $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in L$:

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 + b \cdot y_1 &= 0 \\ a \cdot x_2 + b \cdot y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wollen zeigen: $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in L$
D.h. es ist zu zeigen: Aus $ax_1 + by_1 = 0$, $ax_2 + by_2 = 0$ folgt $a(x_1 + y_2) + b(y_1 + y_2) = 0$
Gelte also $a \cdot x_1 + b \cdot y_1 = 0$ und $a \cdot x_2 + b \cdot y_2 = 0$
Addition beider Gleichungen ergibt: $(ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) = 0 + 0 = 0$
Die Rechengesetze in $\mathbb{R}$ liefern:

$$\begin{aligned} &(ax_1 + ax_2) + (by_1 + by_2) = 0 \\ \Rightarrow\ &a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 0 \\ \Rightarrow\ &\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in L \end{aligned}$$

D.h. $L \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen gegenüber $+$ und der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$.
Assoziativgesetz für $+$ ist in L erfüllt, weil $L \subseteq \mathbb{R}^2$.

2.4 Neutrales Element

$\binom{0}{0} \in \mathbb{R}$ ist neutrales Element.
Es gilt aber auch $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow \binom{0}{0} \in L$
$\Rightarrow \binom{0}{0}$ heißt auch **neutrales Element** in L.

2.5 Entgegengesetztes Element

Sei $\binom{x_1}{y_1} \in L$, entgegengesetztes Element ist $\binom{-x_1}{-y_1}$
Aus $ax_1 + by_1 = 0$ folgt $-ax_1 - by_1 = 0$.

$$\Rightarrow a(-x_1) + b(-y_1) = 0$$
$$\Rightarrow \binom{-x_1}{-y_1} \in L$$
$$\Rightarrow (L, +) \text{ bildetabel'sche Gruppe.}$$

Die übrigen Sätze der skalaren Multiplikation gelten automatisch, weil sie in $\mathbb{R}^2$ gelten und $L \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.

2.6 Nullvektor

$\Rightarrow L$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Bezeichnung: Den Nullvektor bezeichnen wir mit $\vec{0}$. Vektoren sind $\mathbb{x}, \mathbb{y}$ (In den Übungsaufgaben: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{0}$)
$\vec{0}$ ist eindeutig, da $(V, +)$ abel'sche Gruppe ist. Entgegengesetzte Vektoren sind auch eindeutig:
Für $x \in V$ ist der entgegengesetzte Vektor: $-x : x + (-x) = \vec{0}$

Folgerung 2.1:
Für jedes $x \in V$ gilt: $0 \cdot x = \vec{0}$ $(0 \in \mathbb{K})$

Beweis 2.2:
$0 \cdot \mathbb{x} + \vec{0} = 0 \cdot \mathbb{x} = (0 + 0)\mathbb{x} = 0 \cdot \mathbb{x} + 0 \cdot \mathbb{x}$
Addiere auf beiden Seiten : $-(0 \cdot \mathbb{x})$: $0 \cdot \mathbb{x} + \vec{0}) + (-(0 + \mathbb{x})) = (0 \cdot \mathbb{x} + 0 \cdot \mathbb{x}) + (-(0 \cdot \mathbb{x}))$
$\Rightarrow (0 \cdot \mathbb{x} + (-0 \cdot \mathbb{x})) + \vec{0} = 0 \cdot \mathbb{x} + (0 \cdot \mathbb{x} + (-(0 \cdot \mathbb{x})))$
$\Rightarrow \vec{0} + \vec{0} = 0 \cdot \mathbb{x} + \vec{0}$
$\Rightarrow \vec{0} = 0 \cdot \mathbb{x}$ $\square$

Beweis 2.3:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mathbb{x} + \vec{0} &= 0 \cdot \mathbb{x} \\ &= (0+0)\mathbb{x} \\ &= 0 \cdot \mathbb{x} + 0 \cdot \mathbb{x} \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-(0 \cdot \mathbb{x})$:

$$\begin{aligned} (0 \cdot \mathbb{x} + \vec{0}) + (-(0 + \mathbb{x})) &= (0 \cdot \mathbb{x} + 0 \cdot \mathbb{x}) + (-(0 \cdot \mathbb{x})) \\ (0 \cdot \mathbb{x} + (-0 \cdot \mathbb{x})) + \vec{0} &= 0 \cdot \mathbb{x} + (0 \cdot \mathbb{x} + (-(0 \cdot \mathbb{x}))) \\ \vec{0} + \vec{0} &= 0 \cdot \mathbb{x} + \vec{0} \\ \vec{0} &= 0 \cdot \mathbb{x} \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.2:

$$\mathbb{x} \in V \Rightarrow (-1)\,\mathbb{x} = -\mathbb{x}$$

Beweis 2.4:

$$\mathbb{x} + (-1) \cdot \mathbb{x} \overset{\text{Distributiv}}{=} (1 + (-1)) \cdot \mathbb{x} = 0 \cdot \mathbb{x} \overset{\text{Folgerung}}{=} \vec{0}$$

Analog folgt auch: $(-1) \cdot \mathbb{x} + \mathbb{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow (-1)\mathbb{x}$ ist entgegengesetzter Vektor zu $\mathbb{x}$, ist eindeutig, also folgt $(-1) \cdot \mathbb{x} = -\mathbb{x}$

□

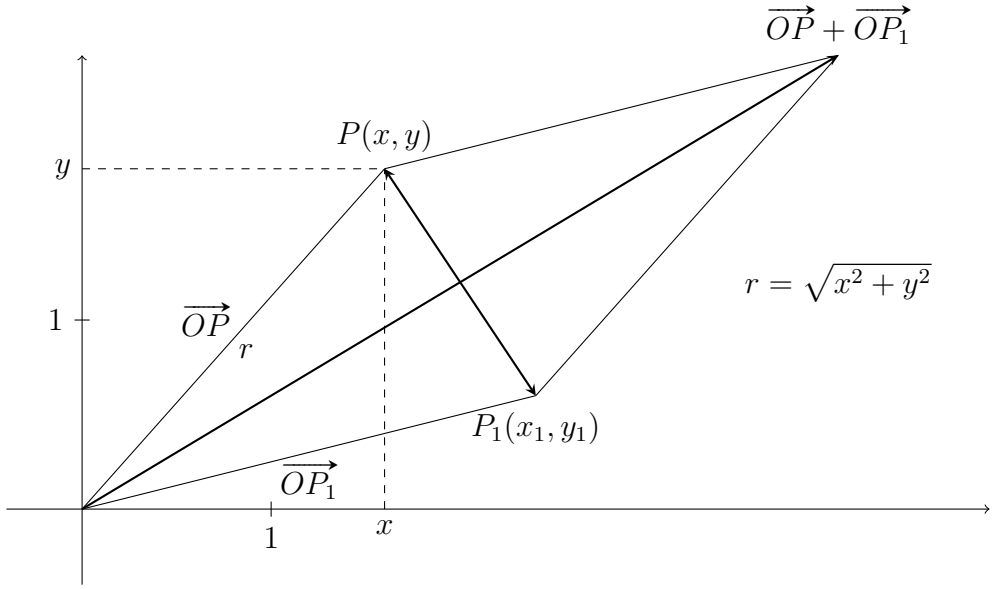
Dabei sind folgende Abkürzung sinnvoll:

$$\begin{aligned} \mathbb{x} + (-\mathbb{y}) &= \mathbb{x} - \mathbb{y} \\ k_1 \cdot \mathbb{x} + (-k_2) \cdot \mathbb{y} &= k_1 \cdot \mathbb{x} - k_2 \cdot \mathbb{y} \end{aligned}$$

2.7 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

Anschaulicher Vektorraum:

$\mathbb{R}^2$ - Ebene, mit kartesischem Koordinatensystem



Ortsvektoren $\overrightarrow{OP} = \binom{x}{y}$
Vektor $\overrightarrow{P_1P} = \binom{x-x_1}{y-y_1}$
Zwei Vektoren heißen gleich, wenn sie die gleiche Richtung und Länge haben.
$\binom{x}{y}$ hat die Länge $|\binom{x}{y}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_1 \\ y + y_1 \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright$ geometrische Aktion ist das Kräfteparallelogramm

3 Elementare Theorie von Vektorräumen

V ist stets ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

3.1 Linearkombinationen

Seien $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n \in V$.
Vektoren sind eine Summe der Gestalt:

$$k_1 \cdot \mathbb{x}_1 + k_2 \cdot \mathbb{x}_2 + \cdots + k_n \cdot \mathbb{x}_n$$

Definition 3.1 (Linearkombination)**:**
$\mathbb{v} \in V$ heißt eine Linearkombination von $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$, wenn es $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbb{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{x}_i = k_1 \cdot \mathbb{x}_1 + k_2 \cdot \mathbb{x}_2 + \ldots + k_n \cdot \mathbb{x}_n$$

$k_1, \ldots, k_n$ heißen Koeffizienten der Linearkombination.

Beispiel 3.1:
$V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{x}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Alle Linearkombinationen von $\mathbb{x}_1$ sind $\lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$
Alle diese Linearkombinationen bilden eine Gerade, in diesem Fall die x-Achse.

Beispiel 3.2:
$V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{x}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{x}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Alle Linearkombinationen sind gegeben durch $k_1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + k_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Sie ergeben eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Außer $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$ selbst kann man aus jeder Linearkombination $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n \in V$ immer noch einen Vektor erhalten, den **Nullvektor**:

$$\vec{0} = \underbrace{0 \cdot \mathbb{x}_1}_{=\vec{0}} + \underbrace{0 \cdot \mathbb{x}_2}_{=\vec{0}} + \underbrace{0 \cdot \mathbb{x}_3}_{=\vec{0}} + \ldots + \underbrace{0 \cdot \mathbb{x}_n}_{=\vec{0}}$$

$\vec{0} = 0 \cdot \mathbb{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathbb{x}_n$ heißt die **triviale** Darstellung des Nullvektors aus $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$.

Manchmal gibt es weitere Möglichkeiten, den Nullvektor aus $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$ als Linearkombination darzustellen:

?

Beispiel 3.3:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}$$

Es gibt einmal die triviale Darstellung:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}$$

Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &= 7 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\7\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}7-7\\7-7\\7-7\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dies ist eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}$

●

Definition 3.2 (linear unabhängig)**:**
$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $k_1\mathbb{x}_1 + \ldots + k_n\mathbb{x}_n = \vec{0}$ folgt $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$

Die Lösung $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ existiert immer. Linear unabhängig sind die Vektoren $\mathbb{x}_1 \ldots \mathbb{x}_n$ genau dann, wenn es keine weitere Lösung gibt.

●

Definition 3.3 (linear abhängig)**:**
$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n \in V$ heißen **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Das heißt $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn es eine **nichttriviale** Linearkombination des Nullvektors aus ihnen gibt:
$k_1 \cdot \mathbb{x}_1 + \ldots + k_n \cdot \mathbb{x}_n = \vec{0}$ und mindestens ein $k_i \neq 0$

?

Beispiel 3.4:
$V = \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = 0, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist linear unabhängig.}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist linear abhängig, da

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist linear abhängig.}$$

?

Beispiel 3.5:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k_2 = 0,\ k_1 = 0$$

$\Rightarrow$ die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

?

Beispiel 3.6:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind abhängig:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren liegen auf einer Geraden $\curvearrowright$ linear abhängig!

?

Beispiel 3.7:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0 \curvearrowright$ linear unabhängig

?

Beispiel 3.8:
$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ sind linear abhängig:

$$k_1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + k_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + k_3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

k_1, k_2, k_3 sind zu bestimmen:

$$\begin{array}{rrrl} 2k_1 + & k_2 & & = 0 \\ -k_1 + & 3k_2 & +8k_3 & = 0 \\ & k_2 & +2k_3 & = 0 \\ \hline 2k_1 & & -2k_3 & = 0 \\ -k_1 & & +2k_3 & = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow k_1 = k_3 = -\frac{1}{2}k_2$
Wähle $k_2 = 2 \curvearrowright k_1 = k_3 = -1$
Dies ist eine nichttriviale Darstellung von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \curvearrowright$ linear abhängig.

Probe:

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒

Folgerung 3.1:
Jede endliche Menge von Vektoren aus V, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

□

Beweis 3.1:
Sei $\{\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n, \vec{0}\}$ diese Menge
Behauptung: $k_1\mathbb{x}_1 + \ldots + k_n\mathbb{x}_n + k_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$
Wähle: $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ und $k_{n+1} = 1$

$\Rightarrow 0 \cdot \mathbb{x}_1 + \ldots 0 \cdot \mathbb{x}_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$ ist nichttriviale Linearkombination des Nullvektors
$\Rightarrow \mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n, \vec{0}$ sind linear abhängig.

Folgerung 3.2:
Jedes $\mathbb{x} \in V, \mathbb{x} \neq \vec{0}$ ist linear unabhängig.

Beweis 3.2:
$\mathbb{x} \in V$, $\mathbb{x} \neq \vec{0}$, $k \cdot \mathbb{x} = \vec{0}$
Angenommen, $k \neq 0$, dann existiert k^{-1}:

$$\begin{aligned} k^{-1}(k \cdot \mathbb{x}) = k^{-1} \cdot \vec{0} &= \vec{0} \\ (k^{-1} \cdot k) \cdot \mathbb{x} &= \vec{0} \\ 1 \cdot \mathbb{x} &= \vec{0} \\ \mathbb{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dies ist Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbb{x} \neq \vec{0}$.
$\Rightarrow k \neq 0$ ist falsch $\Rightarrow k = 0$.
$\Rightarrow \mathbb{x}$ ist linear unabhängig.
$\square$

Satz 3.1:
Eine Menge $\{\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n\} \subseteq V$ besteht genau dann aus linear abhängigen Vektoren, wenn es (mindestens) einen Vektor $\mathbb{x}_i$ gibt, der sich als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

Beweis 3.3:
Seien $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$ linear abhängig, dann existiert eine nichttriviale Linearkombination $k_1\mathbb{x}_1 + k_2\mathbb{x}_2 + \ldots + k_n\mathbb{x}_n = \vec{0}$ und nicht alle k_i sind Null. Sei $k_i \neq 0$,
dann folgt:

$$k_i\mathbb{x}_i = -k_1\mathbb{x}_1 - \ldots - k_{i-1}\mathbb{x}_{i-1} - k_{i+1}\mathbb{x}_{i+1} - \ldots - k_n\mathbb{x}_n \qquad (\text{mit } k \neq 0)$$

Skalare Multiplikation mit k_i^{-1} ergibt:

$$\begin{aligned} \underbrace{k_i^{-1}(k_i)}_{=1}\mathbb{x}_i &= -(k_i^{-1}k_1)\mathbb{x}_1 - \ldots - (k_i^{-1}k_{i-1})\mathbb{x}_{i-1} - (k_i^{-1}k_{i+1})\mathbb{x}_{i+1} - \ldots - (k_i^{-1}k_n)\mathbb{x}_n \\ \Rightarrow \mathbb{x}_i &= -(k_i^{-1}k_1)\mathbb{x}_1 - \ldots - (k_i^{-1}k_{i-1})\mathbb{x}_{i-1} - (k_i^{-1}k_{i+1})\mathbb{x}_{i+1} - \ldots - (k_i^{-1}k_n)\mathbb{x}_n \end{aligned}$$

Das heißt $\mathbb{x}_i$ ist eine Linearkombination der übrigen Vektoren $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_{i-1}, \mathbb{x}_{i+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ (laut der Definition zur Linearkombination)

Gelte nun: $\mathbb{x}_i$ ist Linearkombination von $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_{i-1}, \mathbb{x}_{i+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$.

$$\Rightarrow \mathbb{x}_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} k_j \mathbb{x}_j$$
$$\Rightarrow 1 \cdot \mathbb{x}_i + \sum(-k_j \mathbb{x}_j) = \vec{0}$$

Dies ist eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$. Das heißt $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n$ sind linear unabhängig.
□

3.1.1 Erweiterung auf unendliche Mengen von Vektoren

Definition 3.4:
Sei $W \subseteq V$ eine unendliche Menge von Vektoren. W heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von W linear unabhängig ist.

W heißt linear abhängig, falls es eine endliche Teilmenge von W gibt, die aus linear abhängigen Vektoren besteht.

$v \in V$ heißt Linearkombination der Vektoren aus W, wenn es eine endliche Teilmenge $\{\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n\}$ von W gibt, so dass gilt: $v = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{x}_i$.

Definition 3.5 (lineare Hülle oder Erzeugnis)**:**
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Als lineare Hülle oder Erzeugnis von W bezeichnet man die Menge aller möglichen endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus W.
Symbolisch: $\mathcal{L}(W)$ oder $\langle W \rangle$

Beispiel 3.9:
$\mathcal{L}(W)$: Menge aller möglichen Linearkombinationen von Elementen aus W.

$W = \{\mathbb{x}_1\}$:	$\mathcal{L}(W) = \{k \cdot \mathbb{x}_1 \mid k \in \mathbb{K}\}$
	(Gerade mit Richtungsvektor $\mathbb{x}_1$ (für $\mathbb{x}_1 \neq \vec{0}$))
$W = \{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2\}$:	$\mathcal{L}(W) = \left\{k_1 \cdot \mathbb{x}_1 + k_2 \cdot \mathbb{x}_2 \,\middle|\, k_1, k_2 \in \mathbb{K}\right\}$
	(Ebene, sofern $\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2$ linear unabhängig sind.)

Bemerkung: Sind in $\mathcal{L}(\{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2\})$ $\mathbb{x}_1$ und $\mathbb{x}_2$ linear abhängig, z.B. mit $\mathbb{x}_2 = k \cdot \mathbb{x}_1$, so folgt $\mathcal{L}(\{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2\}) = \mathcal{L}(\{\mathbb{x}_1\})$
Allgemein gilt:

$$W = \{\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_n\} \Rightarrow \mathcal{L}(W) = \{k_1\mathbb{x}_1 + \ldots + k_n\mathbb{x}_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}\}$$

Folgerung 3.3:
Sei $W = \{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2, \ldots\}$. Dann gilt $\mathbb{x}_i \in \mathcal{L}(W)$ bei $i = 1, 2, 3, \ldots$

Beweis 3.4:

$$\mathbb{x}_i = 1\mathbb{x}_i + 0\mathbb{x}_1 + 0\mathbb{x}_2 + \ldots \text{ für jedes } i$$
$$\Rightarrow W \subseteq \mathcal{L}(W)$$

□

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $E \subseteq V$: Die Lineare Hülle $\mathcal{L}(E)$ ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus E.
$E_1 \subseteq E$: $\mathcal{L}(E_1) \subseteq \mathcal{L}(E)$ (denn jede Linearkombination aus $\mathcal{L}(E_1)$ ist auch eine in $\mathcal{L}(E)$)
$E = E_1 \cup \{v_0\}$, v_0 – linear abhängig von E_1.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E_1)$, denn v hängt linear von E_1 ab
$\Rightarrow v$ ist Linearkombination von Elementen aus E_1
$\Rightarrow \mathcal{L}(E_1) = \mathcal{L}(E_1 \cup \{v_0\})$
$\Rightarrow \mathcal{L}(E_1) = \mathcal{L}(E_0)$

Definition 3.6 (Koeffizientenvergleich)**:**
Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren und gelte $k_1v_1 + \ldots + k_nv_n = h_1v_1 + \ldots + h_nv_n$ für geeignete $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$, $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{K}$
Dann gilt $k_1 = h_1$, $k_2 = h_2$, …, $k_n = h_n$

Beweis 3.5:
Aus $k_1v_1 + \ldots + k_nv_n = h_1v_1 + \ldots + h_nv_n$ folgt:

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + \ldots + (k_n - h_n)v_n = \vec{0}$$

Weil $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind gibt es nur die triviale Darstellung des Nullvektors aus $v_1, \ldots, v_n$.
Das heißt $k_1 - h_1 = 0$, $k_2 - h_2 = 0$, …, $k_n - h_n = 0$
$\Rightarrow k_1 = h_1$, …, $k_n = h_n$
□

Definition 3.7 (Unterraum)**:**
Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ heißt Untervektor oder Unterraum von V, wenn U mit den gleichen Verknüpfungen wie V selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Triviale Unterräume:

- V ist Unterraum von V
- $\{\vec{0}\}$ ist Unterraum von V

Satz 3.2 (Unterraumkriterium)**:**
Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $U \neq \emptyset$
2. Für alle $u \in U$ gilt $k \cdot u \in U$ (für alle $k \in \mathbb{K}$)
3. Für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt: $u_1 - u_2 \in U$

Beweis 3.6:
Sei U ein Unterraum. Dann ist $U \neq \emptyset$, also (*1.*) erfüllt.

Weil U Unterraum von V ist, ist U insbesondere ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Damit ist U abgeschlossen gegenüber skalarer Multiplikation mit $\mathbb{K}$. Das heißt (*2.*) ist erfüllt.

Weil U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist folgt: Es gibt in jedem $u \in U$ ein $u' \in U$: $u + u' = \vec{0}$. Es ist in unseren Bezeichnungen: $u' = -u$, also ist mit $u_2 \in U$ auch $-u_2 \in U$. Damit folgt $u_1 + (-u_2) = u_1 - u_2 \in U$, das heißt (*3.*) gilt.

Gelte nun umgekehrt (*1.*), (*2.*) und (*3.*):

Wegen $U \neq \emptyset$ gibt es ein $u \in U$. Wegen (*3.*) liegt $u - u \in U$. Also ist $\vec{0} \in U$.
Sei nun $u_1 \in U$, dann folgt aus (*3.*): $\vec{0} - u_1 \in U$ (denn $\vec{0} \in U, u_1 \in U_1$). Das heißt aus $u_1 \in U$ folgt $-u_1 \in U$.
Damit bildet $(U, +)$ eine abel'sche Gruppe. Denn $\vec{0} \in U_1 - u \in U$ für alle $u \in U$ und die Rechengesetze gelten in $U \subseteq V$, weil sie ja in V gelten.

Wegen (*2.*) ist U abgeschlossen gegenüber skalarer Multiplikation. Die Rechengesetze der skalaren Multiplikation gelten in U, weil $U \subseteq V$ ist und die Gesetze in V gelten.
$\square$

Satz 3.3:
Sei $E \subseteq V$, $E \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{L}(E)$ ein Unterraum von V.

Beweis 3.7:
Nach Voraussetzung ist $E \neq \emptyset$, das heißt es gilt $u \in E$.
Weiterhin ist $0 \cdot u$ eine Linearkombination von u, also ist $0 \cdot u \in \mathcal{L}(E)$.
Wegen $0 \cdot u = \vec{0}$, folgt $\vec{0} \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \mathcal{L}(E) \neq \emptyset$.
Dann ist (*1.*) gezeigt.

Sei nun $u \in \mathcal{L}(E)$: Nach Definition ist u dann eine Linearkombination von Elementen aus E: $u = k_1e_1 + \ldots + k_ne_n$ $(e_1, \ldots, e_n \in E;\ k_i \in \mathbb{K};\ i = 1, \ldots, n)$
Es folgt:

$$\begin{aligned} k \cdot u &= k \cdot (k_1e_1 + \ldots + k_ne_n) \\ &\overset{\text{Distributiv}}{=} k \cdot (k_1e_1) + \ldots + k \cdot (k_ne_n) \\ &\overset{\text{Assoziativ}}{=} \underbrace{(k \cdot k_1)}_{\in \mathbb{K}} \cdot e_1 + \ldots + \underbrace{(k \cdot k_n)}_{\in \mathbb{K}} \cdot e_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow k \cdot u$ ist eine Linearkombination von Elementen aus E
$\Rightarrow k \cdot u \in \mathcal{L}(E)$ für jedes $k \in \mathbb{K}$
Also gilt (*2.*) auch. Seien nun $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$:

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} k_ie_i,\ u_2 = \sum_{j=1}^{m} h_je'_j$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} &e_1, \ldots, e_n \in E, \quad k_i \in \mathbb{K}\ (i = 1, \ldots, n), \\ &e'_1, \ldots, e'_m \in E, \quad h_j \in \mathbb{K}\ (j = 1, \ldots, m): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 = u_1 + (-u_2) &= \sum_{i=1}^{n} k_ie_i + (-1)u_2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_ie_i + (-1) \sum_{i=1}^{m} h_je'_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{k_i}_{\in \mathbb{K}} e_i + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(-1)h_j}_{\in \mathbb{K}} e'_j \in \mathcal{L}(E) \end{aligned}$$

Offenbar gilt auch $\mathcal{L}(E) \subseteq V$, denn $\mathcal{L}(E)$ besteht aus Linearkombinationen aus $E \subseteq V$. Da jede Linearkombination von Elementen aus V wieder in V liegt, gilt auch $\mathcal{L}(E) \subseteq V$.
Somit ist nach dem Unterraumkriterium $\mathcal{L}(E)$ ein Unterraum von V.
$\square$

Folgerung 3.4:
Es gilt für jeden Unterraum U von V: $\mathcal{L}(U) = U$

Beweis 3.8 ($\mathcal{L}(U) \subseteq U$ und $U \subseteq \mathcal{L}(U)$)**:**
Sei $U \in \mathcal{L}(U)$, dann ist u eine Linearkombination von Elementen aus U. Weil U ein Unterraum ist, gehört jede Linearkombination von Elementen aus U auch zu U.
Dies zeigt $u \in U$, also ist $\mathcal{L}(U) \subseteq U$.

Sei nun $u \in U$, dann gilt: $u = 1 \cdot u \in \mathcal{L}(U) \Rightarrow U \subseteq \mathcal{L}(U)$
$\square$

Folgerung 3.5:
Die Lineare Hülle eines Unterraums bildet die Lineare Hülle zurück. Es liefert nichts neues.

Definition 3.8 (Erzeugendensystem)**:**
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wenn für eine Teilmenge $E \subseteq V$ gilt, dass $V = \mathcal{L}(E)$, dann heißt E ein **Erzeugendensystem** von V.

Bemerkung:
Offenbar ist $E = V$ ein Erzeugendensystem von V, wegen $\mathcal{L}(V) = V$.

3.1.2 endlich erzeugte Vektorräume

Definition 3.9:
Gilt für einen Vektorraum V, dass V das Erzeugnis einer endlichen Menge von Vektoren ist, also $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$, $v_i \in V$, $(i = 1, \ldots, n)$, so heißt V endlich erzeugt.

Beispiel 3.10:
$V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$
Sei $\left(\begin{smallmatrix}w_1\\w_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left(\begin{smallmatrix}w_1\\w_2\end{smallmatrix}\right) = x_1 \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) + x_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right) + x_3 \cdot \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$$

hat dies eine Lösung x_1, x_2, x_3 für jedes $\binom{w_1}{w_2}$?

Wähle $x_1 = 0$: $\left.\begin{aligned} w_1 &= x_2 + 0 \cdot x_3 \\ w_2 &= 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = w_1$

$\Rightarrow w_2 = 3w_1 + x_3$
$\Rightarrow x_3 = w_2 - 3w_1$

$\Rightarrow$ Jedes $\binom{w_1}{w_2} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 erhalten werden.
$\Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$, das heißt $\mathbb{R}^2$ ist endlich erzeugt.

3.1.3 Basen von Vektorräumen

Definition 3.10:
Ein Erzeugendensystem B von V heißt Basis von V, wenn das Erzeugendensystem B aus linear unabhängigen Vektoren besteht.

Erläuterung:
Offenbar hat eine Basis also 2 Eigenschaften:

1. Sie ist ein Erzeugendensystem
2. Sie besteht aus linear unabhängigen Vektoren

Beispiel 3.11:
Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Beweis 3.9:
$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig: $k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = \vec{0}$.

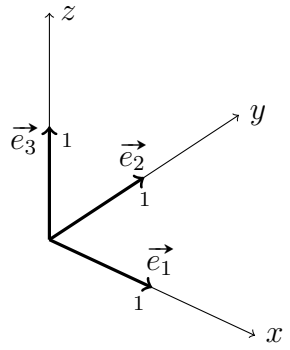
$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = 0$, …, $k_n = 0$ ist die einzige Lösung
$\Rightarrow e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig.
Zeigen nun: $e_1, \ldots, e_n$ sind Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$,
d.h. es gilt: $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$
Zu zeigen ist: Jedes $\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n$ ist eine Linearkombination von $e_1, \ldots, e_n$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist erfüllt für $x_1 = w_1$, $x_2 = w_2$, …, $x_n = w_n$, also bilden $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$; die so genannte Standardbasis oder *kanonische* Basis.



Bemerkung:
Ein allgemeines Erzeugendensystem kann linear abhängige Vektoren enthalten. Bei der Bildung der linearen Hülle können die abhängigen Vektoren weggelassen werden und man erhält immer noch die gleiche lineare Hülle. Das heißt in diesem Sinne sind linear abhängige Vektoren „überflüssig“.
Dagegen besteht eine Basis nur aus linear unabhängigen Vektoren, davon kann bei Bildung der linearen Hülle **keiner** weggelassen werden. Sonst wird die lineare Hülle echt kleiner $\curvearrowright$ nicht erwünscht.

Satz 3.4:
Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B, so lässt sich jedes $v \in V$ **eindeutig** als Linearkombination von Basiselementen darstellen.
Bemerkung: Bei einem Erzeugendensystem auch möglich, aber nicht eindeutig.

Beweis 3.10:
Sei $B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ eine Basis von V. Weil B eine Basis von V ist, kann jedes Element $v \in V$ als Linearkombination von Basiselementen dargestellt werden. Also ist nur die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen.
Seien

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i \text{ und } v = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{k_j}\widetilde{w_j}$$

zwei Darstellungen von v mit $w_i, \widetilde{w_j} \in B$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$

$$W = \{w_1, \ldots, w_n\},$$
$$\widetilde{W} = \{\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_m}\},$$
$$W' := W \cap \widetilde{W}$$

Folgendes ist eine disjunkte Vereinigung und jedes w_i bzw $\widetilde{w_j}$ liegt in genau einer dieser drei Mengen (die alle paarweise disjunkt sind):

$$(W \backslash W') \cup (\widetilde{W} \backslash W') \cup W'$$

$$\Rightarrow v = \sum_{w_i \in W \backslash W'} k_i w_i + \sum_{w_i \in W'} k_i w_i$$
$$v = \sum_{\widetilde{w_j} \in \widetilde{W} \backslash W'} \widetilde{k_j} \widetilde{w_j} + \sum_{w_i \in W'} \widetilde{k_j} w_i$$

$$\Rightarrow \vec{0} = v - v = \sum_{w_i \in W \backslash W'} k_i w_i + \sum_{w_i \in W'} k_i w_i - \sum_{\widetilde{w_j} \in \widetilde{W} \backslash W'} \widetilde{k_j} \widetilde{w_j} - \sum_{w_i \in W'} \widetilde{k_j} w_i$$
$$= \sum_{w_i \in W \backslash W'} k_i w_i - \sum_{\widetilde{w_j} \in \widetilde{W} \backslash W'} \widetilde{k_j} \widetilde{w_j} + \sum_{w_i \in W'} (k_i - \widetilde{k_i}) w_i$$

Dies ist eine Linearkombination des Nullvektors.
Es ist

$$(W \backslash W') \cup (\widetilde{W} \backslash W') \cup W' = W \cup \widetilde{W} \subseteq B$$

das heißt alle Vektoren sind linear unabhängig. Also müssen alle Koeffizienten Null sein.

$$\Rightarrow k_i = 0 \text{ für } w_i \in W \backslash W'$$
$$\widetilde{k_j} = 0 \text{ für } \widetilde{w_j} \in \widetilde{W} \backslash W'$$
$$\text{und } k_i - \widetilde{k_i} = 0 \text{ sofern } w_i \in W'$$

Das heißt in den beiden Darstellungen für v sind alle Koeffizienten Null, die zu Elementen w_i, $\widetilde{w_j}$ gehören, die nur in einer der beiden Mengen W, $\widetilde{W}$ vorkommen. Somit erstrecken sich beide Darstellungen nur über die $w_i \in W'$.
Deren Koeffizienten sind auch gleich, wegen $k_i = \widetilde{k_i}$ für $w_i \in W'$, also Stimmen beide Darstellungen sowohl in den Koeffizienten als auch in den Basisvektoren überein.
□

Beim Erzeugendensystem ist diese Darstellung nicht eindeutig! Denn man kann, da es im Allgemeinen aus linear abhängigen Vektoren besteht, eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors addieren und erhält eine andere Darstellung.

3.1.4 Maximale linear unabhängigen Menge

Definition 3.11 (Maximale linear unabhängigen Menge)**:**
Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt **maximal linear unabhängige Menge**, wenn W folgende beiden Eigenschaften hat:

1. W besteht aus linear unabhängigen Vektoren.
2. Ist $v \in V \backslash W$ so ist $W \cup \{v\}$ eine Menge von linear abhängigen Vektoren.

Satz 3.5:
B ist genau dann eine Basis von V, wenn B eine **maximal linear unabhängige Menge** ist.

Beweis 3.11:
Sei zunächst B eine Basis von V. B besteht folglich aus linear unabhängigen Vektoren, das heißt B erfüllt *(1.)*.
Sei nun $v \in V \backslash B$. Weil B auch Erzeugendensystem ist, kann man v als Linearkombination aus B darstellen:

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i,\ b_i \in B (i = 1, \ldots, n)$$

Dann wird $B \cup \{v\}$ eine Menge von linear abhängigen Vektoren.
Da $v \in V \backslash B$ beliebig war folgt, dass B eine maximal linear unabhängige Menge ist. Umgekehrt sei nun B eine maximal linear unabhängige Menge. Zu zeigen ist: »B ist Basis«.

Müssen also beweisen: B besteht aus linear unabhängigen Vektoren und ist Erzeugendensystem.
$\curvearrowright$ Offenbar besteht B aus linear unabhängigen Vektoren.
Zu zeigen bleibt: B ist Erzeugendensystem.
Angenommen, B wäre kein Erzeugendensystem, dann gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $v \notin B$ so, dass v keine Linearkombination von den Vektoren aus B ist.
Dann ist $B \cup \{v\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren:

$$k \cdot v + \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = \vec{0}$$

$k = 0$: $\Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, weil $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind.
$k \neq 0$: $\Rightarrow v = -\sum_{i=1}^{n} (k^{-1} k_i) b_i \Rightarrow v$ ist Linearkombination der Vektoren aus B in Widerspruch dazu, dass v keine Linearkombination aus B ist. Also muss B ein Erzeugendensystem sein.

Somit ist B eine Basis von B
$\square$

3.1.5 Minimales Erzeugendensystem

Definition 3.12 (Minimales Erzeugendensystem)**:**
Eine Teilmenge $E \subseteq V$ heißt minimales Erzeugendensystem von V, wenn E folgende beiden Eigenschaften hat:

1. E ist Erzeugendensystem
2. Für jedes $v_0 \in E$ ist $E \backslash \{v_0\}$ kein Erzeugendensystem mehr.

Satz 3.6:
Eine Menge $B \subseteq V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein minimales Erzeugendensystem ist.

Beweis siehe 3. Serie der Übungsaufgaben Aufgabe 9

Beweis 3.12 (Name1s Variante mit Zusatz vom Seminarleiter und Name2)**:**
Durch einen indirekten Beweis:
Angenommen B ist eine Basis, aber kein minimales Erzeugendensystem, dann existiert ein $v \in V$, für das $B \backslash \{v\}$ ein Erzeugendensystem wäre. Da B aber Basis ist (also keine linear abhängigen Vektoren enthalten darf), ist $B \backslash \{v\}$ kein Erzeugendensystem mehr.
Angenommen B ist kein minimales Erzeugendensystem, dann existiert ein $B' \subset B$ als Erzeugendensystem. Sei $v \in B \backslash B'$, dann ist v eine Linearkombination von Elementen aus B'. Daraus folgt, dass B nicht linear unabhängig ist.
Mit diesem Widerspruch ist die Behauptung gezeigt.

Nun bleibt noch die Gegenrichtung zu zeigen:
Angenommen B ist ein minimales Erzeugendensystem, aber keine Basis, dann enthält B linear abhängige Vektoren. Dies ist ein Widerspruch, da man linear abhängige Vektoren aus einem Erzeugendensystem entfernen kann und man erhält wieder ein Erzeugendensystem. Die Definition des minimalen Erzeugendensystems E schreibt, aber vor, dass $E \backslash \{v\}$ $(v \in V)$ kein minimales Erzeugendensystem mehr ist.
Damit ist auch diese Behauptung bewiesen.
$\square$

3.1.6 Austauschlemma

Satz 3.7 (Austauschlemma)**:**
Sei B eine Basis des Vektorraumes V und $v \in V$ und $v \neq \vec{0}$, dann gibt es ein

Element $v_j \in B = \{v_1, v_2, \ldots\}$, so dass man v gegen v_j eintauschen kann in B und die neue Menge $B' = (B \setminus \{v_j\}) \cup \{v\}$ ist wieder eine Basis von V.

Beweis 3.13:
Zu zeigen ist: B' ist Erzeugendensystem und Menge von linearen unabhängigen Vektoren.
Zeigen zunächst: B' ist Erzeugendensystem.
B ist Basis, also gibt es

$$v_1, \ldots, v_n \in B : \; v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$$

$$\mathcal{L}(B \cup \{v\}) = V. \text{ In } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i \text{ sind nicht alle } k_i = 0$$

(sonst wäre $v = \vec{0}$).
$\curvearrowright$ Also muss mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, so dass $k_j \neq 0$.
Wähle als Austauschvektor in B dieses v_j (Tausche also v_j gegen v).

Es ist

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \\ \Rightarrow v - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i v_i &= k_j v_j \\ \Rightarrow k_j^{-1} v - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (k_j^{-1} k_i) v_i &= v_j \end{aligned}$$

Das heißt v_j ist linear abhängig von $B' = (B \backslash \{v_j\}) \cup \{v\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}(B') &= \mathcal{L}(B' \cup \{v_j\}) \\ &= \mathcal{L}(\underbrace{B \backslash \{v_j\} \cup \{v\}}_{B'} \cup \{v_j\}) \\ &= \mathcal{L}(B \cup \{v\}) = V \end{aligned}$$

$\Rightarrow B'$ ist Erzeugendensystem.

Zeigen nun: B' ist Menge von linear unabhängigen Vektoren ($B' = (B \backslash \{v_j\}) \cup \{v\}$)
Gelte

$$k \cdot v + \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq j}}^{n} \widetilde{k_i} v_i = 0 \quad \text{(Denn } v_j \text{ kommt in } B' \text{ nicht vor)}$$

Indirekt:
Angenommen dies wäre eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors. So wäre

$$k = 0 : \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i v_i = \vec{0}$$

und weil $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt $\widetilde{k_1} = \ldots = \widetilde{k_n} = 0$ im Widerspruch, dass das eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors sein soll. Also muss gelten: $k \neq 0$

$$\Rightarrow k \cdot v + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i v_i = \vec{0}, \quad (k \neq 0)$$

Es ist $v = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{k_i} v_i$ mit $k_j \neq 0$

$$\Rightarrow k \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i v_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \widetilde{k_i} v_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{k \cdot k_j}_{\neq 0} \cdot v_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(k \cdot k_i + \widetilde{k_j} \right) v_i = \vec{0}$$

Dies ist eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus $v_1, \ldots, v_n$.
Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, gibt es keine solche nichttriviale Linearkombination. Dies ist ein Widerspruch!
Also gibt es keine nichttriviale Linearkombination aus $v, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$.
Das heißt B' besteht aus linear unabhängigen Vektoren
□

Bemerkung

Der Beweis zeigt: Man kann $v \neq \vec{0}$ für jeden Vektor aus B eintauschen, dessen Koeffizient in $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ verschieden von Null ist.

?

Beispiel 3.12:
$\mathbb{R}^3$, Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \; 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v$ kann eingetauscht werden gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ oder $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sind beides Basen.

Beweis des Austauschlemmas zeigt: $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ (eindeutig)
v kann eingetauscht werden gegen jedes v_i mit $k_i \neq 0$

3.1.7 Steinitzscher Austauschsatz

!

Satz 3.8 (Steinitzscher Austauschsatz)**:**
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.
Sei weiter $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren.

Dann gibt es $(n - m)$ Vektoren aus B, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v_{m+1}, \ldots, v_n$, so dass $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ wieder eine Basis von V ist.

Beweis 3.14:
Mittels vollständiger Induktion nach m.

Behauptung:
siehe Steinitzscher Austauschsatz

Induktionsanfang (m = 1):
$C = \{w_1\}$ linear unabhängig nach Voraussetzung $w_1 \neq \vec{0}$, kann also nach dem Austauschlemma eingetauscht werden. Das heißt, die Behauptung ist richtig für $m = 1$.

Induktionsvoraussetzung:
Es existiert eine Menge C mit linear unabhängigen Vektoren ($|C| = m = 1$), die in die Basis B eingetauscht werden kann.

Induktionsschritt:
Gelte die Behauptung für $m - 1$, $m > 1$.
Das heißt $(m - 1)$ linear unabhängige Vektoren können stets eingetauscht werden.

Induktionsbeweis:
Sei nun $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Menge von m linear unabhängigen Vektoren.
Dann besteht auch die Menge $C' = \{w_1, \ldots, w_{m-1}\}$ aus linear unabhängigen Vektoren und zwar $(m - 1)$-Stück.
Diese kann nach Induktionsvoraussetzung gegen $(m-1)$ Vektoren aus B, ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch $v_1, \ldots, v_{m-1}$ eingetauscht werden und man erhält wieder eine Basis

$$B' = \{w_1, \ldots, w_{m-1}, w_m, w_{m+1}, \ldots, v_n\}$$

Im letzten Schritt muss nun w_m noch in B' eingetauscht werden und zwar gegen eines der v_i $(i = m, \ldots, n.)$

$$w_m = \sum_{i=1}^{m-1} k_i w_i + \sum_{j=m}^{n} k_j v_j$$

Wegen $w_m \neq \vec{0}$ sind **nicht** alle Koeffizienten $k_i, k_j = 0$.

Angenommen, $k_m = k_{m+1} = \ldots = k_n = 0$. Dann folgt

$$w_m = \sum_{i=1}^{m-1} k_i w_i \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot w_m - \sum_{i=1}^{m-1} k_i w_i = \vec{0}$$

Das heißt, dies ist eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus $w_1, \ldots, w_m$.

Daraus folgt $w_1, \ldots, w_m$ müssten linear abhängig sein. Dies ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Abhängigkeit von $w_1, \ldots, w_m$.
Also kann **nicht** gelten: $k_m = \ldots = k_n = 0$.

Das heißt wenigstens eines dieser k_j ist $\neq 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Sei $k_m \neq 0$. Nach dem Austauschlemma kann w_m gegen v_m getauscht werden und

$$B' \backslash \{v_m\} \cup \{w_m\}$$

ist eine Basis von V.

Dies beweist die Behauptung für m.
□

Folgerung 3.6:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus V. Dann gilt $m \leq n$.

Beweis 3.15:
Angenommen, $m > n$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gibt es $w_1, \ldots, w_n$, die linear unabhängig sind, als Teilmenge von $\{w_1, \ldots, w_m\}$ und diese können nach dem Steinitzschen Austauschsatz alle in die Basis eingetauscht werden.
Neue Basis ist dann

$$\underbrace{\{w_1, \ldots, w_n\}}_{\text{Basis}} \subset \underbrace{\{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_m\}}_{\text{linear unabhängige Menge}}$$

Dies widerspricht der Eigenschaft einer Basis, eine *maximal linear unabhängige Menge* zu sein, also ist $\mathbf{m > n}$ **falsch**.

$\curvearrowright$ Das heißt $m \leq n$.
□

Beispiel 3.13:
$\mathbb{K}^n$ hat die Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, das heißt in $\mathbb{K}^n$ sind $(n+1)$-Elemente immer abhängig.

Folgerung 3.7:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann besitzt jede Menge von linear unabhängigen Vektoren höchstens endlich viele Elemente.

Beweis 3.16:
Sei C_∞ eine Menge von unendlich vielen linear unabhängigen Vektoren aus V. Dann gibt es eine Teilmenge C von $(n+1)$-Vektoren aus C_∞.
Wegen $C \subset C_\infty$, besteht C aus linear unabhängigen Vektoren. Dies widerspricht Folgerung 3.7 mit $m = n + 1$. Also gibt es keine solche Menge C_∞.

Also besteht jede Menge aus linear unabhängigen Vektoren aus endlich viele Vektoren.
$\square$

Folgerung 3.8:
Sei V eine $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann besteht jede Basis von V aus n Elementen.

Beweis 3.17:
Seien B und B_1 zwei Basen von V. Aus Folgerung 3.6 erhält man:
– Anzahl der Elemente von $B_1 \leq$ *Anzahl der Elemente von* B.

Vertauschung der Rollen von B und B_1 ergibt analog:
– Anzahl der Elemente von $B \leq$ *Anzahl der Elemente von* B_1 ist.

$\Rightarrow$ *Anzahl der Elemente von* $B =$ *Anzahl der Elemente von* B_1

3.1.8 Dimension von Vektorräumen

Definition 3.13:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann heißt n die Dimension von V, $n = \dim V$

Beweis 3.18:
Bedarf keines Beweises.
Die Definition ist sinnvoll wegen Folgerung 3.8

Folgerung 3.9:
Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Dann besitzt jede Menge von linear unabhängigen Vektoren aus V höchstens n Elemente. Weiterhin ist jede Menge von linear unabhängigen Vektoren, die aus genau n Elementen besteht, eine Basis von V.

Beweis 3.19:
Teil 1 ist klar nach Folgerung 3.6.
Sei $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren, dann ist auch $V = \mathcal{L}(C)$ richtig:
Angenommen C wäre kein Erzeugendensystem von V. Dann gibt es einen Vektor $v \in V$, der linear unabhängig von allen Vektoren aus C ist. Dann ist $C \cup \{v\}$ wieder eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.
Dies widerspricht Teil 1 von Folgerung 3.9.

Also ist C ein Erzeugendensystem von V, dass heißt C ist eine Basis von V.
$\square$

Folgerung 3.10:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$. Weiterhin sei U ein Unterraum von V, dann gilt $\dim U \leq n = \dim V$

Beweis 3.20:
Sei B eine Basis von U, dann besteht B aus linear unabhängigen Vektoren und deren Anzahl ist nach Folgerung 3.9 kleiner oder gleich n.

$$\dim U \leq n = \dim V$$

$\square$

Folgerung 3.11:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und U sei ein Unterraum von V. Dann kann man jede Basis von U zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis 3.21:
Es ist $\dim U \leq \dim V$.

Jede Basis von U besteht aus linear unabhängigen Vektoren, $B_U = \{b'_1, \ldots, b'_m\}$. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V. Nach dem Steinitzschen Austauschsatz kann man $b'_1, \ldots, b'_m$ in B eintauschen und erhält eine Basis von V:

$$B' = \left\{b'_1, \ldots, b'_m, b'_{m+1}, \ldots, b_n\right\}$$

B' ist die gesuchte Ergänzung der Basis B_U zu einer Basis B' von V.
□

Folgerung 3.12:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$. Weiterhin seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $U_1 \subseteq U_2$, dann gilt: $\dim U_1 \leq \dim U_2$

Für den Spezialfall $U_1 = U_2$ gilt: $\dim U_1 = \dim U_2$

Beweis 3.22:
$\dim U_1 \leq \dim U_2$ folgt aus Folgerung 3.10 mit $V = U_2$.
Falls $U_1 = U_2$ ist, so ist $\dim U_1 = \dim U_2$.

Angenommen $\dim U_1 = \dim U_2$ und $U_1 \subseteq U_2$, dann ist eine Basis von U_1 auch eine Basis von U_2.
Daraus folgt sofort $U_1 = U_2$
□

3.1.9 komplementäre Unterräume

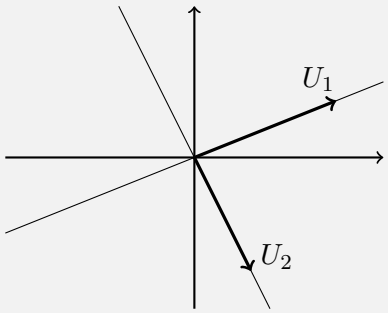
Definition 3.14 (komplementäre Unterräume)**:**
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Unterräumen U_1 und U_2. Dann heißen die Unterräume U_1 und U_2 **komplementär** zueinander, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $U_1 \cap U_2 = \vec{0}$ „Durchschnitt so klein wie möglich“
2. $\langle U_1, U_2 \rangle = V$, $\mathcal{L}(U_1, U_2) = V$ „Erzeugnis so groß wie möglich“

?

Beispiel 3.14:

1. $\mathbb{R}^2$
   a) $U_1 = \{\vec{0}\}$, $U_2 = V$
   b) U_1 eine Gerade durch den Ursprung.
      U_2 eine andere Gerade durch den Ursprung



2. $\mathbb{R}^3$
   a) $U_1 = \{\vec{0}\}$, $U_2 = \mathbb{R}^3$
   b) Ebene durch Ursprung $= U_1$, $U_2 =$ Gerade durch Ursprung, die nicht in der Ebene liegt.

!

Satz 3.9 (Existenz komplementärer Unterräume)**:**
Sei U_1 ein Unterraum des endlich erzeugten Vektorraumes V. Dann existiert immer ein Unterraum U_2 von V, so dass U_1 und U_2 zueinander komplementär sind.

□

Beweis 3.23:
Sei $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von U_1. Nach dem Steinitz'schen Austauschsatz kann man nun diese Basis ergänzen zu einer Basis $\{b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$ von V.
$U_1 = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_m)$. Wähle $U_2 = \mathcal{L}(b_{m+1}, \ldots, b_n)$.
Zu zeigen bleibt: U_1 und U_2 sind komplementäre Teilräume. $\curvearrowright$ Offenbar sind U_1, U_2 Unterräume von V.

$$\mathcal{L}(U_1, U_2) \supseteq \{b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}(U_1, U_2) \supseteq \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_n) = V$$

(weil $b_1, \ldots, b_n$ Basis von V bildet!)

$$\Rightarrow \mathcal{L}(U_1, U_2) = V$$

Das heißt (2) ist erfüllt.

Sei $u \in U_1 \cap U_2$. Dann ist u eine Linearkombination der Basisvektoren von U_1 und auch eine Linearkombination der Basisvektoren von U_2.

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{m} k_i b_i \text{ in } U_1 \\ u &= \sum_{j=m+1}^{n} k_j b_j \text{ in } U_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{0} = u - u = \sum_{i=1}^{m} k_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (-k_j) b_j$$

$\Rightarrow$ (weil $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V bilden)

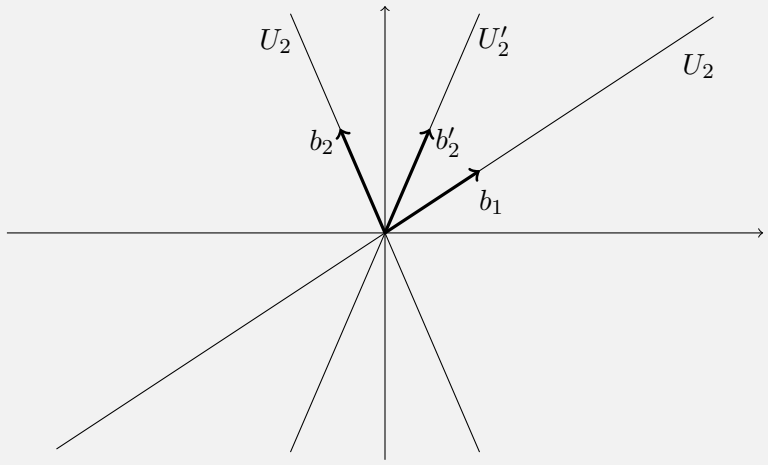
$$k_1 = \ldots = k_m = 0,\ -k_{m+1} = \ldots = -k_n = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{u = 0}$$

Weil $u \in U_1 \cap U_2$ beliebig war folgt $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$, **dies zeigt (1)**

Beachte: Zu gegebenem U_1 ist der komplementäre U_2 im Allgemeinen nicht eindeutig.

?

Beispiel 3.15:



Dagegen ist die Zerlegung eines Vektors v in seine Summe $u_1 + u_2$ eindeutig.

!

Satz 3.10:
Seien U_1 und U_2 komplementäre Unterräume von V und $v \in V$. Dann gibt es **eindeutig** bestimmte $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, so dass gilt: $v = u_1 + u_2$

□

Beweis 3.24:
Sei $v \in V$. Es ist $V = \mathcal{L}(U_1, U_2)$. Das heißt v ist eine Linearkombination von Vektoren aus U_1 und U_2. Also existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$: $v = u_1 + u_2$.

Es bleibt zu zeigen: Diese Zerlegung ist eindeutig.
Sei dann $v = u_1 + u_2$, $v = u_1' + u_2'$ mit $u_1, u_1' \in U_1$ und $u_2, u_2' \in U_2$.

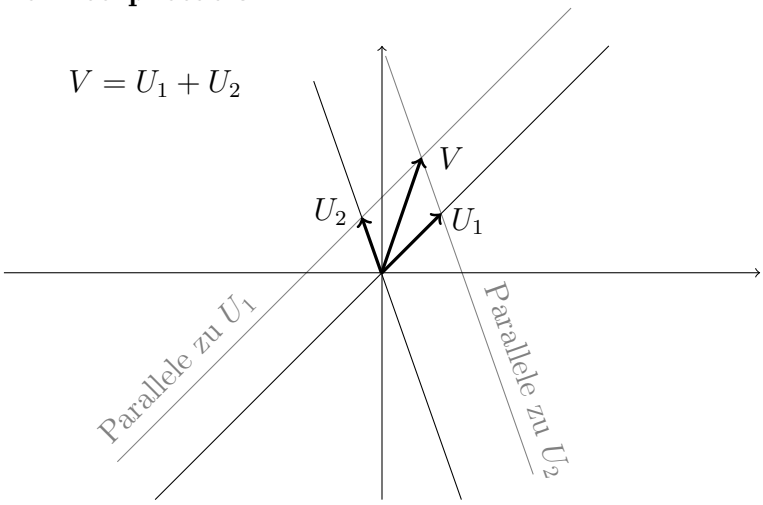
$$\Rightarrow u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \Rightarrow \underbrace{u_1 - u_1'}_{\in U_1} = \underbrace{u_2' - u_2}_{\in U_2} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 - u_1' \in U_1 \cap U_2 \\ u_2' - u_2 \in U_1 \cap U_2 \end{array}$$

Weil U_1, U_2 komplementäre Teilräume sind, gilt $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.

$$\begin{aligned} u_1 - u_1' &= \vec{0} & u_2' - u_2 &= \vec{0} \\ \Rightarrow u_1 &= u_1' & \Rightarrow u_2 &= u_2' \end{aligned}$$

Das heißt die Zerlegung ist eindeutig.
□

Geometrische Interpretation:



3.1.10 Dimensionssatz

Satz 3.11 (Dimensionssatz)**:**
Sei V ein Vektorraum mit endlicher Basis und U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Dann gilt:

$$\dim \mathcal{L}(U_1, U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Beweis 3.25:
Wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U_1, U_2) &\subseteq V, \\ U_1 &\subseteq V, \\ U_2 &\subseteq V, \\ U_1 \cap U_2 &\subseteq V \end{aligned}$$

ist alles endlich dimensional.

Sei $B_0 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$.
Falls $U_1 \cap U_2 = \vec{0}$, so ist die leere Menge als Basis zu verstehen: $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

Es ist $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ und $U_1 \cap U_2 \subset U_2$.
Nach dem Steinitz'schen Austauschsatz kann man B_0 ergänzen zu den Basen:

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_r\} \quad \text{von } U_1$$
$$B_2 = \{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_s\} \text{ von } U_2$$

Sei $B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_r, w_{m+1}, \ldots, w_s\}$.

Wie viel Vektoren enthält B?
Anzahl der Vektoren in $B = r + s - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Um die Behauptung zu beweisen muss noch gezeigt werden, dass:

$$\dim \mathcal{L}(U_1, U_2) = \text{Anzahl der Vektoren in } B$$

Dann ist zu zeigen: B ist eine Basis von $\mathcal{L}(U_1, U_2)$:

Zeigen zunächst: $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_r, w_{m+1}, \ldots, w_s) = \mathcal{L}(U_1, U_2)$.
$v_1, \ldots, v_r$ sind Basis von U_1, $v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_s$ sind Basis von U_2, das heißt

$$\mathcal{L}(U_1, U_2) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_r, w_{m+1}, \ldots, w_s)$$

Bleibt zu zeigen: $v_1, \ldots, v_r, w_{m+1}, \ldots, w_s$ sind linear unabhängig.
Betrachte:

$$k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m + k_{m+1} v_{m+1} + \ldots + k_r v_r + h_{m+1} w_{m+1} + \ldots + h_s w_s = \vec{0}$$
$$\underbrace{k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m + k_{m+1} v_{m+1} + \ldots + k_r v_r}_{\in U_1} = \underbrace{(-h_{m+1}) w_{m+1} + \ldots + (-h_s) w_s}_{\in U_2}$$
$$\Rightarrow (-h_{m+1}) w_{m+1} + \ldots + (-h_s) w_s \in U_1 \cap U_2$$

Für $h'_1, \ldots, h'_m$ gilt:

$$\Rightarrow -h_{m+1} w_{m+1} + \ldots + (-h_s) w_s = h'_1 v_1 + \ldots + h'_m v_m$$

weil $\{v_1, \ldots, v_m\} = B_0$ Basis von $U_1 \cap U_2$ ist

$$\Rightarrow \vec{0} = h'_1 v_1 + \ldots + h'_m v_m + h_{m+1} w_{m+1} + \ldots + h_s w_s$$

Weil $B_2 = \{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_s\}$ eine Basis ist, sind diese Vektoren linear unabhängig.

$$\Rightarrow h'_1 = h'_2 = \ldots = h'_m = h'_{m+1} = \ldots = h_s = 0$$
$$\Rightarrow k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m + k_{m+1} v_{m+1} + \ldots + k_r v_r = \vec{0}$$

$B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ ist Basis von U_1, insbesondere sind die Vektoren linear unabhängig

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$$

Hieraus folgt $v_1, \ldots, v_r, w_{m+1}, \ldots, w_s$ sind linear unabhängig.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(U_1, U_2) \text{ hat als Basis die Menge } \{v_1, \ldots, v_r, w_{m+1}, \ldots, w_s\}$$
$$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(U_1, U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 \cap U_2)$$

□

Folgerung 3.13:
Seien U_1, U_2 komplementäre Unterräume von V und $\dim V < \infty$
Dann gilt: $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$

Beweis 3.26:
Anwendung des Dimensionssatzes: $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ (weil U_1, U_2 komplementär)

$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 0,$$
$$\mathcal{L}(U_1, U_2) = V,$$
$$\dim V = \dim \mathcal{L}(U_1, U_2)$$

Einsetzen in Satz 3.11 (Dimensionssatz) bildet: $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$
□

3.1.11 Hyperebenen

Definition 3.15 (Hyperebene)**:**
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $H \subseteq V$ ein *(n–1)*-dimensionalen Unterraum. Dann heißt H eine Hyperebene von v.

$\mathbb{R}^2$ **Hyperebenen:** Geraden durch den Ursprung

$\mathbb{R}^3$ **Hyperebenen:** Gewöhnliche Ebenen durch den Ursprung

Folgerung 3.14:
Sei H eine Hyperebene des n-dimensionalen Vektorraumes V und U ein t-dimensionaler Unterraum von V.
Dann gilt: Entweder $U \subseteq H$ oder $\dim(U \cap H) = t - 1$

Beweis 3.27:
Es gilt immer $H \subseteq \mathcal{L}(U, H) \subseteq V$.

$$\Rightarrow n - 1 = \dim H \leq \dim \mathcal{L}(U, H) \leq \dim V = n$$
$$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(U, H) \in \{n - 1, n\}.$$

Sei $\dim \mathcal{L}(U, H) = n - 1$. Es ist dann $H = n - 1$. Also $\mathcal{L}(U, H) = H$.

$$\Rightarrow U \subseteq H$$

Gelte nun $\dim \mathcal{L}(U, H) = n$, dann liefert die Dimensionsformel:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\dim \mathcal{L}(U, H)}_{n} &= \underbrace{\dim U}_{t} + \underbrace{\dim H}_{n-1} - \dim(U \cap H) \\
n &= t + (n - 1) - \dim(U \cap H) \\
\dim(U \cap H) &= t + (n - 1) - n \\
&= t - 1
\end{aligned}$$

□

3.1.12 endliche Basis

Satz 3.12:
Jeder endlich erzeugte Vektorraum $V \neq \{\vec{0}\}$ besitzt eine **endliche** Basis.

Beweis 3.28:
Sei V der Vektorraum und $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$, $V \neq \{\vec{0}\}$
Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, so bilden sie eine Basis von V. Damit ist alles gezeigt.
Seien nun $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig. Dann gibt es einen Vektor aus dieser Menge, der sich aus Linearkombinationen der übrigen darstellen lässt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies v_n. Dann folgt:

$$V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

Also bilden $v_1, \ldots, v_{n-1}$ dann ein Erzeugendensystem. Sind diese $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig, so bilden sie eine Basis von V. Andernfalls wiederholt man das Verfahren.
Andauernde Wiederholung ergibt entweder $V = \mathcal{L}(v_1)$ oder man erhält vorher schon eine Basis von V.
Falls $V = \mathcal{L}(v_1)$, so ist wegen $V \neq \{\vec{0}\}$ auch $v_1 \neq \vec{0}$. Das heißt $\{v_1\}$ bildet eine Basis von V.
$\square$

4 Lineare Gleichungssysteme

4.1 Matrizenmultiplikation

Bisher: $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ zwei $(m \times n)$-Matrizen: $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ ist definiert (Addition gleicher Komponenten), $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
und $k \cdot \mathbb{A}, k \in \mathbb{K}$ ist definiert als: $k(a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$.
Wir wollen nun eine Multiplikation von Matrizen einführen.

4.1.1 Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{:=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \mathbb{K}$$

?

Beispiel 4.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & (-1) & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3$$
$$= 5$$

4.1.2 Multiplikation von Matrizen

Definition 4.1:
$\mathbb{A}$ heißt verkettet mit $\mathbb{B}$, falls $\mathbb{A}$ vom Typ $(m \times r)$ und $\mathbb{B}$ vom Typ $(r \times n)$ ist.
Symbolisch: $\mathbb{A} \smile \mathbb{B}$: $(m \times r) \smile (r \times n)$ – Spaltenanzahl vom Typ $\mathbb{A}$ = Zeilenanzahl von $\mathbb{B}$.

Beachte: Aus $\mathbb{A}\smile\mathbb{B}$ folgt im Allgemeinen nicht $\mathbb{B}\smile\mathbb{A}$
Nur verkettete Matrizen können multipliziert werden.

Definition 4.2:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times r}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{K}^{r\times n}$. Sei $\mathbb{A} = (a_{ie})_{\substack{i=1,\dots,m\\ e=1,\dots,r}}$, $\mathbb{B} = (a_{ej})_{\substack{e=1,\dots,r\\ j=1,\dots,m}}$
Das Produkt von $\mathbb{A}$ mit $\mathbb{B}$ sei die Matrix $\mathbb{D} = (d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{r} a_{il} b_{lj}$$

d_{ij} berechnet sich als Produkt der i-ten Zeile von $\mathbb{A}$ mit der j-ten Zeile von $\mathbb{B}$.

Beispiel 4.2:
$d_{23} = 2$. Zeile von $\mathbb{A}$ multipliziert mit 3. Spalte von $\mathbb{B}$ wie unter Punkt 4.1.1 Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte

Beispiel 4.3:

$$\underset{(2\times 2)\smile(2\times 3)}{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ 4 & 13 & 17\end{pmatrix}$$ ist Matrix vom Typ 2×3

Beispiel 4.4:

$$\underset{(2\times 3)\smile(3\times 1)}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}6\\ 5\end{pmatrix}$$ ist Matrix vom Typ 2×1

Beispiel 4.5:

$$\underset{(2\times 2)\smile(2\times 2)}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{(2\times 2)\smile(2\times 2)}{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse sind verschieden, das heißt in aller Regel ist $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ auch wenn beide Seiten definiert sind.

Das heißt bei Multiplikation einer Gleichung mit einer Matrix muss man angeben, von welcher Seite die Gleichung mit der Matrix multipliziert wird.

4.1.3 Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Assoziativgesetz

Gelte $\mathbb{A} \smile \mathbb{B} \smile \mathbb{D}$
Dann kann man bilden $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{D}$ und $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D})$ und es gilt:

$$(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D})$$

Beweis 4.1:

$$(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = (h_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots n}} \text{ wobei } \mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times r}, \mathbb{B} \in \mathbb{K}^{r \times s}, \mathbb{D} \in \mathbb{K}^{s \times n}$$

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \sum_{t=1}^{s} \left(\sum_{l=1}^{r} a_{ie} b_{lt} \right) d_{tj} \\ &= \sum_{l=1}^{r} \sum_{t=1}^{s} a_{ie} b_{lt} d_{tj} \\ &= \sum_{l=1}^{r} a_{ie} \left(\sum_{t=1}^{s} b_{lt} d_{tj} \right) \end{aligned}$$

Rechts steht das Produkt $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D})$, links steht $(\mathbb{A} \cdot B) \cdot \mathbb{D}$

$$\Rightarrow (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D})$$

□

Sei $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times m}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \cdot \mathbb{A} &= \left(\sum_{l=1}^{n} l_{ie} a_{ej} \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \\ &= (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \\ &= \mathbb{A} \end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} + \mathbb{D}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{D} \text{ und}$$
$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \cdot \mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{D} + \mathbb{B} \cdot \mathbb{D} \text{ sofern alle Produkte existieren}$$

Beweis 4.2 (Distributivgesetz)**:**
$\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times r}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{K}^{r \times s}$, $\mathbb{D} \in \mathbb{K}^{r \times s}$
$\mathbb{A} = (a_{il})$, $\mathbb{B} = (b_{lj})$, $\mathbb{D} = (d_{lj})$

$$\begin{aligned} \mathbb{B} + \mathbb{D} &= (b_{lj} + d_{lj}) \\ \mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} + \mathbb{D}) &= \left(\sum_{l=1}^{r} a_{il}(b_{lj} + d_{lj}) \right) \end{aligned}$$

Weil in $\mathbb{K}$ das Distributivgesetz gilt:

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{l=1}^{r} (a_{il} b_{lj} + a_{il} d_{lj}) \right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{r} a_{il} b_{lj} \right) + \left(\sum_{l=1}^{r} a_{il} d_{lj} \right) \\ &= \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{D} \end{aligned}$$

Analog folgt das andere Distributivgesetz $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \cdot \mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{D} + \mathbb{B} \cdot \mathbb{D}$.
$\square$

Weiter gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Nullmatrix $\Rightarrow$ Alle Einträge sind Nullen!

Satz 4.1:
Ein Produkt von zwei nicht-Nullmatrizen kann (muss nicht) die Nullmatrix ergeben. (Sprechen: „Die Matrizenmultiplikation ist nicht *Nullteilerfrei*“)

Für jedes $k \in \mathbb{K}$ gilt:

$$k \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = (k \cdot \mathbb{A}) \cdot \mathbb{B} = \mathbb{A} \cdot (k \cdot \mathbb{B})$$

sofern $\mathbb{A}$ = Nullmatrix und wenn das Produkt erklärt ist.

Beweis siehe 5. Serie der Übungsaufgaben Aufgabe 19 ii)

Beweis 4.3:
Wird nachgetragen

Satz 4.2:
Nullmatrix $\cdot\ \mathbb{A}$ = Nullmatrix (sofern das Produkt erklärt ist).

Beispiel 4.6:
$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot x &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.3:
Ein Gleichungssystem der Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit gegebenem $a_{ij} \in \mathbb{K}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und gegebenem $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ heißt **lineares Gleichungssystem** von Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

$b_1, \ldots, b_m$ heißen rechte Seite des Systems oder Absolutglieder.

4.2.1 Matrizenschreibweise

Sei $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ („Koeffizientenmatrix“ des Systems), $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist Vektor der Unbekannten; $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$
Nach obigem Beispiel gilt:

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b} \quad \text{„Matrizenschreibweise für lineare Gleichungssysteme“}$$

?

Beispiel 4.7:
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

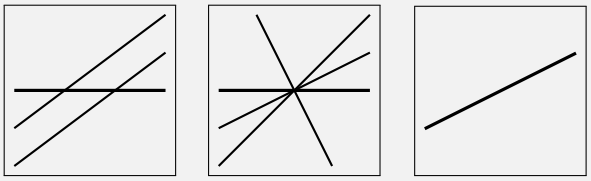
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= \mathbb{b}_1 \quad \text{— Gerade im } \mathbb{R}^2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= \mathbb{b}_2 \quad \text{— Gerade im } \mathbb{R}^2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &= \mathbb{b}_m \quad \text{— Gerade im } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Lösung des Systems = Schnittpunkt aller dieser Geraden.

keine Lösung: mindestens 2 Geraden sind parallel.

eine Lösung: alle Geraden schneiden sich in einem Punkt.

unendlich viele Lösungen: Alle Geraden liegen übereinander (bzw. sind gleich).



keine eine unendlich viele

?

Beispiel 4.8:
Im $\mathbb{R}^n$: $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = \mathbb{b}_1$ beschreibt Hyperebene
Lösung: Schnitt aller dieser Hyperebenen

4.2.2 homogene Systeme

•

Definition 4.4 (homogene und inhomogene Systeme)**:**
Gilt im Gleichungssystem $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, dass $\mathbb{b} = \vec{0}$ ist, so heißt das System *homogen*. Andernfalls heißt es *inhomogenes* System.

Probleme:

1. Lösbarkeit von linearen Gleichungssysteme.
2. Eindeutigkeit von Lösungen? Oder unendlich viele Lösungen?
3. Algorithmus zur Bestimmung aller Lösungen
4. (Numerische Realisierbarkeit des Algorithmus)

4.2.3 Lösungsstruktur von linearen Gleichungssystemen

homogene Systeme

Definition 4.5 (Lösung eines Systems)**:**
$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ sei ein lineares Gleichungssystem mit $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
Ein Vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ heißt Lösung des Systems, falls gilt:
Wenn $x_i = y_i$ (für $i = 1, \ldots, n$) in das System eingesetzt werden, so sind alle Gleichungen des Systems erfüllt. (d.h. es gilt: $\mathbb{A}y = \mathbb{b}$)

Folgerung 4.1:
Ein homogenes System ist immer lösbar.

Beweis 4.4:
$\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$. Wähle $\mathbb{x} = \vec{0} \in \mathbb{K}^n$:

$$\Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}\vec{0} = \vec{0}$$

□

Diese Lösung des homogenen Systems, die immer existiert, heißt *triviale Lösung* des homogenen Systems.
Sei $L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$ die Lösungsmenge des Systems $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$. Entsprechend ist $L(\mathbb{A}, \vec{0})$ dann die Lösungsmenge eines homogenen Systems.

Satz 4.3:
Seien $\mathbb{y}_1$ und $\mathbb{y}_2$ zwei Lösungen des homogenen Systems $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$.

1. Dann ist auch $\mathbb{y}_1 + \mathbb{y}_2$ eine Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$
2. Es ist auch $k \cdot \mathbb{y}_1$ ($k \in \mathbb{K}$) eine Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$.

Beweis 4.5:
Zu 1.: Weil $\mathbb{y}_1, \mathbb{y}_2$ zwei Lösungen sind, gilt: $\mathbb{A}\mathbb{y}_1 = \vec{0}$, $\mathbb{A}\mathbb{y}_2 = \vec{0}$
Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbb{y}_1 + \mathbb{y}_2) &\overset{\text{Distributiv}}{=} \mathbb{A}\mathbb{y}_1 + \mathbb{A}\mathbb{y}_2 \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{y}_1 + \mathbb{y}_2$ ist Lösung.

Zu 2.: Folgende Umformung ist in der 5. Übungsserie zu beweisen:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot (k \cdot \mathbb{y}_1) &= k \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{y}_1) \\ &= k \cdot \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow k \cdot y_1$ ist Lösung des Systems.

□

Satz 4.4:
Die Lösungsmenge $L(\mathbb{A}, \vec{0})$ eines homogenen linearen Gleichungssystems bildet einen Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis 4.6:

$$\vec{0} \in L(\mathbb{A}, \vec{0}) \quad \Rightarrow \quad L(\mathbb{A}, \vec{0}) \neq \emptyset$$

Aus $\mathbb{y} \in L(\mathbb{A}, \vec{0})$ folgt auch $k \cdot \mathbb{y} \in L(\mathbb{A}, \vec{0})$
Seien $\mathbb{y}_1, \mathbb{y}_2 \in L(\mathbb{A}, \vec{0})$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (-1) \cdot \mathbb{y}_2 && \in L(\mathbb{A}, \vec{0}) \\ &\Rightarrow \mathbb{y}_1 + (-\mathbb{y}_2) && \in L(\mathbb{A}, \vec{0}) \\ &\Rightarrow \mathbb{y}_1 - \mathbb{y}_2 && \in L(\mathbb{A}, \vec{0}) \end{aligned}$$

Nach der Definition zur Lösung eines Systems gilt für jede Lösung:

$$\mathbb{y} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow L(\mathbb{A}, \vec{0}) \subseteq \mathbb{K}^n$$

Nach dem Unterraumkriterium ist damit der Satz bewiesen.

Struktur der Lösungsmenge eines inhomogenen Systems $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$

Die Lösungsmenge bildet **keinen** Vektorraum.

Satz 4.5:
Seien $\mathbb{y}_1$ und $\mathbb{y}_2$ zwei Lösungen von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, dann ist $\mathbb{y}_1 - \mathbb{y}_2$ eine Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$.

Bemerkung: Satz gilt auch, wenn $\mathbb{b} = \vec{0}$

Beweis 4.7:
Es gilt nach Voraussetzung $\mathbb{A}\mathbb{y}_1$, $\mathbb{A}\mathbb{y}_2 = \mathbb{b}$.
Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbb{y}_1 - \mathbb{y}_2) &\overset{\text{Distributiv}}{=} \mathbb{A}\mathbb{y}_1 - \mathbb{A}\mathbb{y}_2 \\ &= \mathbb{b} - \mathbb{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

Das heißt $\mathbb{y}_1 - \mathbb{y}_2$ ist Lösung des homogenen Systems.
□

Satz 4.6:
Jede Lösung des inhomogenen Systems $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ hat folgende Gestalt:

$$\mathbb{y} = \mathbb{y}_s + \mathbb{y}_n$$

wobei $\mathbb{y}_1$ eine Lösung des homogenen Systems $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$ ist und $\mathbb{y}_s$ eine feste symmetrische Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$.
Weiterhin gilt: $\mathbb{y}_s + \mathbb{y}_n$ ist eine Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$

Beweis 4.8:
Sei $\mathbb{y}_s$ eine spezielle Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$.
Nach dem letzten Satz ist für jede Lösung $\mathbb{y} \in L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$.
$\mathbb{y} - \mathbb{y}_s = \mathbb{y}_n$ ist eine Lösung des homogenen Systems $\Rightarrow \mathbb{y} = \mathbb{y}_s + \mathbb{y}_n$.
Seien nun $\mathbb{y}_s \in L(\mathbb{A}, \mathbb{b}), \mathbb{y}_n \in L(\mathbb{A}, \vec{0}) \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{y}_s = \mathbb{b}, \mathbb{A}\mathbb{y}_n = \vec{0}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{y}_s + \mathbb{y}_n) &\overset{\text{Distributiv}}{=} \mathbb{A}\mathbb{y}_s + \mathbb{A}\mathbb{y}_n \\ &= \mathbb{b} + \vec{0} = \mathbb{b}. \end{aligned}$$

Das heißt $\mathbb{y}_s + \mathbb{y}_n$ ist Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$
□

Folgerung 4.2:
$L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = \mathbb{y}_s + L(\mathbb{A}, \vec{0})$, wobei $\mathbb{y}_s$ eine spezielle Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ist.
Das heißt die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich, indem man zu einer speziellen Lösung $\mathbb{y}_0$ alle Lösungen des homogenen Systems addiert.
Damit braucht man für die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems nur noch zu kennen:

- eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems
- eine (endliche) Basis von $L(\mathbb{A}, \vec{0})$

4.2.4 Zeilenstufenform einer Matrix

Definition 4.6 (Zeilenstufenform einer Matrix)**:**
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$. $\mathbb{A}$ liegt in **Zeilenstufenform** vor, genau dann wenn folgendes gilt:

1. Alle Nullzeilen der Matrix befinden sich am Ende der Matrix
2. Alle nicht-Nullzeilen haben als ersten nicht-verschwindenden (nicht-0-Eintrag) eine 1 („Führende Eins“)
3. Die führende Eins einer Teile steht immer rechts von den führenden Einsen der darüber befindlichen Zeilen (sofern es solche gibt).

Definition 4.7 (reduzierte Zeilenstufenform)**:**
Außer 1., 2., 3. einer Zeilenstufenform ist noch erfüllt:

4. Oberhalb einer führenden Eins stehen in dieser Spalte nur Nullen.

?

Beispiel 4.9:

$E_n = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$	reduzierte Zeilenstufenform
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	keine Zeilenstufenform
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$	Zeilenstufenform, aber nicht reduziert
$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Zeilenstufenform, aber nicht reduziert
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	keine Zeilenstufenform!

4.2.5 Elementare Zeilenumformungen

Definition 4.8 (Elementare Zeilenumformungen eines linearen Gleichungssystems)**:**
Sei $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmenge $L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$
Folgende Umformungen des Systems ändern die Lösungsmenge nicht:

1. Vertauschung zweier Zeilen des Systems

2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$
3. Addition des k-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

□ **Beweis 4.9:**
Zu 1.: Bedeutet nur eine Vertauschung der Reihenfolge der Gleichungen, sie ändert die Lösungsmenge nicht.
Zu 2.: Sei $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ des ursprünglichen Systems,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und $\mathbb{A}'\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ des Systems, wo die l-te Zeile mit $k \neq 0$ multipliziert wird:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, l-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = l+1, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{lj})x_j = k \cdot b_l$$

Zu zeigen ist: $L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$. Sei $\mathbb{y} \in L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Multipliziere die l-te Zeile mit k: Die übrigen Zeilen bleiben unverändert. Insbesondere gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = 1, \ldots, l-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = l+1, \ldots, m)$$

Für die l-te Zeile folgt:

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj} \cdot x_j \right) = k \cdot b_l &\overset{\text{Distributiv}}{=} \sum_{j=1}^{n} k \cdot (a_{lj} \cdot x_j) = k \cdot b_l \\ &= \sum_{j=1}^{n} ((k \cdot a_{lj}) \cdot x_j) = k \cdot b_l \end{aligned}$$

Das heißt auch die l-te Zeile von $\mathbb{A}'\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ ist erfüllt.
Also folgt: $\mathbb{y} \in L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$

$$\Rightarrow L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) \subseteq L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$$

Analog zeigt man durch Multiplikation mit $k^{-1} : L(\mathbb{A}', \mathbb{b}') \subseteq L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$.

$$\Rightarrow L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = L(\mathbb{A}', \mathbb{b}'))$$

Zu 3.: Sei $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ das ursprüngliche System und $\mathbb{A}'\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ das System, welches aus dem ursprünglichen System entsteht, wenn man das k-fache der r-ten Zeile zur s-ten Zeile addiert.

Zu zeigen ist $L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$:

Sei $\mathbb{y} \in L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$, also $\mathbb{A}\mathbb{y} = \mathbb{b}$, das heißt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Es gilt bei $i \neq s$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j = b_i$$

Die r-te Zeile wird mit k multipliziert:

$$\sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{rj}) \cdot y_j = k \cdot b_r$$

Addition zur s-ten Zeile $\sum_{j=1}^{n} a_{sj} y_j = b_j$ ergibt:

$$\sum_{j=1}^{n} (k a_{rj} + a_{s_j}) y_j = k b_r + b_j \quad \text{(dies ist die } s\text{-te Zeile von } \mathbb{A}'\mathbb{y} = b' \ (*))$$

Die übrigen Zeilen sind unverändert, also durch $\mathbb{y}$ erfüllt und die s-te Zeile ist wegen $(*)$ auch erfüllt.

$$\Rightarrow \mathbb{y} \in L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$$
$$\Rightarrow L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) \subseteq L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$$

Analog folgt

$$L(\mathbb{A}', \mathbb{b}') \subseteq L(\mathbb{A}, \mathbb{b})$$
$$\Rightarrow L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$$

$\square$

$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, elementare Zeilenumformungen:

1. Vertauschung zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit $k \neq 0$
3. Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

   $L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = L(\mathbb{A}', \mathbb{b}')$

$\mathbb{A}'\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ - System nach den elementaren Zeilenumformungen

Definition 4.9 (elementare Zeilenumformungen einer Matrix)**:**
Elementare Zeilenumformungen einer Matrix sind:

1. Vertauschung zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit $k \neq 0$
3. Addition des k-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Satz 4.7:
Jede Matrix kann mittels elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform und reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden

4.3 Gauß-Algorithmus

1. Schritt: Man wählt in der Matrix die Spalte, die am weitesten links steht und nicht-Null-Einträge enthält.

2. Schritt: Ist das oberste Element dieser Spalte $\neq 0$, so geht es mit Schritt 3 weiter. Andernfalls vertauschen sie Zeilen, so dass das oberste Element $\neq 0$ wird.

3. Schritt: Sei $a \neq 0$ das oberste Element in dieser Spalte. Multiplikation der obersten Zeile mit a^{-1} erzeugt eine führende Eins in der obersten Zeile.

4. Schritt: Addition geeigneter Vielfacher der obersten Zeile zu allen darunter liegenden Zeilen, so dass unter der führenden Eins alles Nullen entstehen.

5. Schritt: Falls an diesem Punkt noch keine Zeilenstufenform Vorliegt, so wiederholt man die Schritt 1-5. mit der Matrix, die unterhalb der obersten Zeile steht.

Nach hinreichend oftmaligen Durchlaufen der Schritte 1.-5.

Es entsteht eine **Zeilenstufenform**

6. Schritt: Man addiert beginnend mit der letzten Zeile, geeignete Vielfache dieser Zeilen zu den darüber liegenden Zeilen, so dass oberhalb der führenden Einsen Nullen entstehen.

Dies endet mit der **reduzierten Zeilenstufenform** der Matrix.

?

Beispiel 4.10:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Tableau:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \\ \hline \end{array}$$

1. Schritt: Die erste Spalte mit Einträgen $\neq 0$ ist die 1. Spalte

2. Schritt: Der oberste Eintrag in dieser Spalte ist 0, deshalb vertauschen wir die 1. und 2. Zeile

$$\begin{array}{cccccc|l} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 & \cdot \mathbf{1/2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 & \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 & \\ \hline \end{array}$$

3. Schritt: $a = 2 \neq 0$. Multiplikation der 1. Zeile mit $a^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot(-2)$$

4. Schritt: Addition des (-2)-fachen der ersten Zeile zur dritten Zeile.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \\ \hline \end{array}$$

5. Schritt: Es liegt noch keine Zeilenstufenform vor!

Daher Wiederholung der Schritte 1.-5. mit der Matrix unterhalb der ersten Zeile.

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 & \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 & \cdot(-\mathbf{1/2}) \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 & \\ \hline \end{array}$$

1. Schritt: Auswahl der 3. Spalte

2. Schritt: Der oberste Eintrag in dieser Spalte ist $\neq 0$

3. Schritt: Multiplikation der 2. Zeile mit $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \\ \hline \end{array} \cdot(-5)$$

4. Schritt: Addition des (-5)-fachen der 2. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \quad \Big| \cdot 2$$

5. Schritt: Noch keine Zeilenstufenform. Daher Wiederholung der Schritte 1.-5. mit der Matrix unterhalb der 2. Zeile.

1. Schritt: Erste Spalte mit Einträgen $\neq 0$ ist die 5. Spalte

2. Schritt: Der oberste Eintrag ist $\neq 0$

3. Schritt: Multiplikation mit der 3. Spalte mit 2

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}$$

4. Schritt: entfällt

5. Schritt: Es liegt eine Zeilenstufenform vor.

6. Schritt: Ausgangspunkt ist:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \cdot \mathbf{7/2}$$

Addition des $\frac{7}{2}$-fachen der 3. Zeile zur 2. Zeile

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \cdot(-6)$$

Addition des (-6)-fachen der 3. Zeile zur 1. Zeile

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \cdot 5$$

Addition des 5-fachen der 2. Zeile zur 1. Zeile

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Dies stellt eine reduzierte Zeilenstufenform für $\mathbb{A}$ dar.

4.3.1 Zusammenhang mit Gleichungssystemen

$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ – Koeffizientenmatrix
$(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ – erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (\mathbb{A}|\mathbb{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Wir überführen $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ in Zeilenstufenform. Dann liegt automatisch auch $\mathbb{A}$ in Zeilenstufenform vor. Hat der Teil dieser Matrix, der zu $\mathbb{A}$ gehört, genau so viele führende Einsen, wie die zu $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ gehörende Zeilenstufenform?

Wenn „*ja*“, so ist das System lösbar.
Wenn „*nein*“, so ist es nicht lösbar.

Falls die Antwort „*ja*“ ist (lösbar), so überführt man die Matrix in reduzierte Zeilenstufenform. Aus dieser Gestalt kann man die Lösung ablesen.

?

Beispiel 4.11:

$$\begin{aligned} -\ 2x_3 \qquad\quad + 7x_5 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

$$(\mathbb{A}|\mathbb{b}) : \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\text{ZSF} : \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{zu } \mathbb{A} \text{ gehören 3 führende Einsen} \\ \text{zu } (\mathbb{A}|\mathbb{b}) \text{ gehören 3 führende Einsen} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{System lösbar}$$

$\curvearrowright$ **rechnerische Zeilenstufenform:**

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \widehat{=}x_1 & \widehat{=}x_2 & \widehat{=}x_3 & \widehat{=}x_4 & \widehat{=}x_5 \end{array} \end{array}$$

x_2, x_4 gehören zu Spalten, in denen keine führende Eins steht.

$x_2 := t_1 \in \mathbb{R}$
$x_4 := t_2 \in \mathbb{R}$

1. Spalte entspricht x_1.

Bestimmung von $\mathbb{x}_s$:

$$\begin{aligned} t_1 = \ t_2 &= 0 \\ x_2 = x_4 &= 0 \\ x_1 &= 7 \\ x_3 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned} \qquad \mathbb{x}_s = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung von $\mathbb{x}_n$:

- Wähle: $\left.\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ t_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = 1,\ x_4 = 0$

  Gleichungssystem: $\begin{aligned} x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 &= -2 \\ x_3 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Wähle: $\left.\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = 0, x_4 = 1$

  Gleichungssystem: $\begin{aligned} x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 &= -3 \\ x_3 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $$\mathbb{x}_n = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

$$\Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{x}_s + \mathbb{x}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2, \in \mathbb{R} \right\}$$

Begründung:
Das System zur reduzierten Zeilenstufenform ist:

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 + 2x_2 & & + 3x_4 & & = 7 \\ & x_3 & & & = 1 \\ & & & x_5 & = 2 \\ \hline x_1 & & & & = 7 - 2t_1 - 3t_2 \\ & x_3 & & & = 1 \\ & & & x_5 & = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = t_1,\ x_4 = t_2$$

Für $t_1 = t_2 = 0$ ist $x_1 = 7$, $x_3 = 1$ und $x_5 = 2$.
Damit hat man für x_s:

$$x_s = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t_1 \\ t_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t_2 \\ 0 \\ 0 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

In Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform eines nicht lösbaren Systems

Dann muss die Anzahl der führenden Einsen der Zeilenstufenform von $\mathbb{A}$ kleiner sein, als die Anzahl der führenden Einsen der Zeilenstufenform von $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \cdots & & & & * \\ & \boxed{1} & \cdots & & & * \\ & & \boxed{1} & \cdots & & * \\ & & & \boxed{1} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall hat die zu $\mathbb{A}$ gehörige Zeile weniger führende Einsen, als die zu $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ gehörende.
Letzte Gleichung lautet: $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$
Dies ist nicht erfüllbar, da $0 \neq 1$.

?

Beispiel 4.12:
Ein Gleichungssystem führt nach elementaren Zeilenumformungen die folgende Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a^2+b \end{array}\right) \quad \text{mit reellen Parametern } a, b \in \mathbb{R}$$

Wann ist das System lösbar?

1. Fall: $a \neq 0$: Dann immer lösbar (durch Multiplikation der 3. Zeile mit a^{-1}: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & a + \frac{b}{a} \end{pmatrix}$

2. Fall: $a = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & | & b \end{pmatrix}$. nicht lösbar bei $b \neq 0$; lösbar bei $b = 0$

$\Rightarrow$ Das System ist lösbar für alle (a, b) mit $a \neq 0$ oder mit $a = b = 0$.

Überführt man ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ in die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ und anschließend in die Zeilenstufenform (mittels elementarer Zeilenumformung), so kann man die Lösbarkeit des Gleichungssystems feststellen.
Betrachtet man die letzte nicht-Null-Zeile: Gehört die führende Eins dieser Zeile zu $\mathbb{A}$, dann ist das Gleichungssystem lösbar.
Befindet sich diese führende Eins in der $\mathbb{b}$-Spalte, dann ist das Gleichungssystem unlösbar.

$\Rightarrow$ reduzierte Zeilenstufenform $\Rightarrow$ allgemeine Lösung des Systems.

?

Beispiel 4.13:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3\ x_3 + \qquad\quad x_4 &= 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 2\ x_3 - \qquad\ ax_4 &= b \\ 4x_1 + 9x_2 - 11x_3 + (3+2a)x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$(\mathbb{A}|\mathbb{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -a & b \\ 4 & 9 & -11 & 3+2a & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-4) \\ \\ \end{array}$$

Tableau:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\
-1 & -3 & 2 & -a & b \\
4 & 9 & -11 & 3+2a & 3 \\
\hline
\boxed{1} & 2 & -3 & 1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 1-a & 1+b \\
0 & 1 & 1 & 2a-1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & a-1 & -1-b \\
0 & 1 & 1 & 2a-1 & -1 \\
\hline
\boxed{1} & 2 & -3 & 1 & 1 \\
0 & \boxed{1} & 1 & a-1 & -1-b \\
0 & 0 & 0 & a & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
+ \quad \cdot(-4) \\
\\
\\
\\
\mid \cdot(-1) \\
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

i) Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist dieses System lösbar?

Fehler wäre: Multiplikation der letzten Zeile mit $\frac{1}{a}$: $0\ 0\ 0\ \boxed{1} \mid {}^{b}\!/_{a} \Rightarrow$ immer lösbar.

Dies ist aber falsch!
So kann man nur für $\mathbf{a \neq 0}$ vorgehen.

Das heißt bei $a \neq 0$ und bei $b \in \mathbb{R}$ ist das System lösbar.

Übrig bleibt für $a = 0$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & 2 & -3 & 1 & 1 \\
0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -1-b \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{b}
\end{array}
\qquad \Rightarrow \text{ unlösbar für } b \neq 0
$$

Das heißt das System ist unlösbar für $(0, b) \in \mathbb{R}^2$, $b \neq 0$

Letzter Fall: $a = 0$, $b = 0$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & 2 & -3 & 1 & 1 \\
0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad \Rightarrow \text{ System lösbar}
$$

Das heißt das System ist lösbar für alle $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ oder } a = b = 0\}$

ii) Lösen sie das System bei (a, b), so dass $|a|$ minimal wird.

$|a|$ ist minimal bei $a = 0$. Dann gibt es nur die Möglichkeit $a = b = 0$. Man kann nun mit der ermittelten Zeilenstufenform weiter rechnen und die reduzierte Zeilenstufenform ermitteln.

Überführung in die reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{1} & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \cdot(-2)$$

Man wählt die Spalten ohne führende Eins aus und setzt diese gleich t_n

$$x_3 = t_1,\ x_4 = t_2$$

mit $t_1 = t_2 = 0$ erhält man nun den Startvektor:

$$y_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -1 - t_1 + t_2$$
$$x_1 = 3 + 5t_1 - 3t_2$$

Nun erhält man die Basis des homogenen Systems über (einsetzen in das LGS):

$$t_1 = 1,\ t_2 = 0 : \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$t_1 = 0,\ t_2 = 1 : \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3\ x_3 + \qquad\qquad x_4 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2\ x_3 + \qquad\quad ax_4 &= b \\ 4x_1 + 9x_2 - 11x_3 + (3+2a)x_4 &= 3 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung:

$$L(\mathbb{A}, \mathbb{b}) = \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t_1 - 3t_2 \\ -t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Rang von Matrizen

$$\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times n},\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Andere Schreibweise:

$$\mathbb{A} = (s_1, \dots, s_2) \text{ mit } s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ s_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \dots,\ s_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

oder auch mittels Zeilen:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{lcl} z_1 & = & (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}), \\ z_2 & = & (a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}), \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \qquad\qquad , \\ z_m & = & (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}) \end{array}$$

Definition 4.10:

1. Spaltenrang von $\mathbb{A}$ heißt die Dimension des von den Spalten von $\mathbb{A}$ aufgespannten Vektorraumes.

$$\mathrm{rk_s}(\mathbb{A}) = \dim \int \mathcal{L}(s_1, \dots, s_n)$$

2. Zeilenrang von $\mathbb{A}$ heißt die Dimension des von den Zeilen von $\mathbb{A}$ aufgespannten Vektorraumes.

$$\mathrm{rk_z}(\mathbb{A}) = \dim \mathcal{L}(z_1, \dots, z_m)$$

Bemerkung:

1. $\mathrm{rk_s}(\mathbb{A})$ ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten von $\mathbb{A}$
2. $\mathrm{rk_z}(\mathbb{A})$ ist gleich der Maximalzahl linear unabhängigen Zeilen von $\mathbb{A}$

Satz 4.8:
Für jede Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt: $\mathrm{rk_z}(\mathbb{A}) = \mathrm{rk_s}(\mathbb{A})$
(ohne Beweis)

Folgerung 4.3:
Deshalb braucht man $\mathrm{rk_z}(\mathbb{A})$ und $\mathrm{rk_s}(\mathbb{A})$ nicht zu unterscheiden.
Damit ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 4.11 (Rang einer Matrix)**:**
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, dann heißt

$$\mathrm{rk}(\mathbb{A}) := \mathrm{rk_z}(\mathbb{A}) = \mathrm{rk_s}(\mathbb{A})$$

der Rang der Matrix

Bemerkung

Es gilt bei jeder $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$: $rk(\mathbb{A}) \leq \min\{m, n\}$

Beispiel 4.14:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rk}(\mathbb{A}) = 2, \text{ da beide Zeilen linear unabhängig sind.}$$

$$\mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rk}(\mathbb{E}_n) = n$$

$$\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rk}(\mathbb{0}) = 0. \text{ Sei } \mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times n} \text{ und } \mathrm{rk}(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{0}$$

Satz 4.9:
Das Gleichungssystem $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\mathrm{rk}(\mathbb{A}) = \mathrm{rk}(\mathbb{A}, \mathbb{b})$$

Beweis 4.10:
Es gilt immer: $\mathrm{rk}(\mathbb{A}) \leq \mathrm{rk}(\mathbb{A}|\mathbb{b})$, denn $\mathbb{A}$ ist eine Teilmatrix von $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$.
Falls $\mathrm{rk}(\mathbb{A}|\mathbb{b}) > \mathrm{rk}(\mathbb{A})$ dann folgt: $\mathrm{rk}(\mathbb{A}|\mathbb{b}) = \mathrm{rk}(\mathbb{A}) + 1$

Sei $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar. Sei $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right) \in K^n$ diese Lösung.
Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n & = b_1 \\ a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n & = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n & = b_m \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} y_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} y_n = \mathbb{b}$$

$\Rightarrow \mathbb{b}$ ist eine Linearkombination der Spalten von $\mathbb{A}$
$\Rightarrow \mathbb{b}$ ist linear unabhängig, von den Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von $\mathbb{A}$.
$\Rightarrow \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n) = \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n, \mathbb{b})$
$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n) = \dim \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n, \mathbb{b})$
$\Rightarrow \mathrm{rk}(\mathbb{A}) > \mathrm{rk}(\mathbb{A}|\mathbb{b})$

Gelte nun umgekehrt $\mathrm{rk}(\mathbb{A}) = \mathrm{rk}(\mathbb{A}|\mathbb{b})$.
Nach der Definition ist dann $\dim \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n) = \dim \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n, \mathbb{b})$. Dies ist nur möglich, wenn $\mathbb{b}$ linear abhängig von $s_1, \ldots, s_n$ ist.
Das heißt es existieren $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, so dass gilt: $y_1 s_1 + \ldots + y_n s_n = \mathbb{b}$.
Das heißt $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^n$ ist eine Lösung des Gleichungssystems, d.h. es ist lösbar.
$\square$

Merke:

Ein Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang von $\mathbb{A}$ gleich dem Rang von $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ ist

4.4.1 Rangberechnung

Idee Wir führen eine einfache Gestalt von Matrizen ein, wo der Rang sofort ablesbar ist.

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}^* & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{rr}^* & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ii}^* \neq 0$$

$\mathrm{rk}(\mathbb{T}) = r$ weil die Zeilen $z_1, \ldots, z_r$ linear unabhängig sind und die übrigen sind Nullzeilen.

Beispiel 4.15:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Folgerung 4.4:
Das heißt, man kann den Rang einer Matrix sofort angeben, wenn diese in Trapezgestalt vorliegt.

Wir formen daher eine Matrix so um, dass aus ihr Trapezgestalt wird und sich der Rang der Matrix bei diesen Umformungen nicht ändert.

Definition 4.12 (Elementare Umformungen einer Matrix)**:**

1. elementare Zeilenumformungen
2. andere elementare Spaltenumformungen

Satz 4.10:
Bei elementaren Umformungen einer Matrix ändert sich der Rang dieser Matrix nicht.

Beweis 4.11 (Für Zeilenumformungen)**:**
Analog gilt der Beweis für Spaltenumformungen.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

1. Vertauschung von Zeile i mit Zeile j, ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $i < j$.

   Es ist $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m) = \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_m)$ (*)

   Sei $\mathbb{A}'$ die Matrix, die aus $\mathbb{A}$ hervorgeht durch Vertauschung von Zeile i und Zeile j.

   Es ist $\operatorname{rk}(\mathbb{A}') = \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_j, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, z_i, z_{j+1}, \ldots, z_m)$ (**)

(*) und (**) unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Vektoren. Dies hat keinen Einfluss auf die lineare Hülle.

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(\mathbb{A}) = \operatorname{rk}(\mathbb{A}')$$

2. Multiplikation einer Zeile von $\mathbb{A}$ mit $k \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde die i-te Zeile von $\mathbb{A}$ mit $k \neq 0$ multipliziert. Sei $\mathbb{A}'$ die Matrix, die nach der Multiplikation entsteht.

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(\mathbb{A}) &= \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m) \\ \operatorname{rk}(\mathbb{A}') &= \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, kz_i, \ldots, z_m) \end{aligned}$$

Wegen $k \neq 0$ gilt $\mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_m) = \mathcal{L}(z_1, \ldots, kz_i, \ldots, z_m)$

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(\mathbb{A}) = \operatorname{rk}(\mathbb{A}')$$

3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Sei $\mathbb{A}$ die gegebene Matrix, wir addieren das k-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i < j$ (denn nach „1.“ können wir Zeilen vertauschen).

Sei $\mathbb{A}'$ die Matrix, die aus $\mathbb{A}$ entsteht nach Addition des k-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(\mathbb{A}) &= \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_m) \\ \operatorname{rk}(\mathbb{A}') &= \dim \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i + kz_j, \ldots, z_j, \ldots, z_m) \end{aligned}$$

Es ist $z_i, kz_j \in \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m) \Rightarrow z_i + kz_j \in \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i + kz_j, \ldots, z_j, \ldots, z_m) \subseteq \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m) \quad (*)$$

Andererseits ist $\underbrace{(z_i + kz_j)}_{\in \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i + kz_j, \ldots, z_j, \ldots, z_m)} - \underbrace{kz_j}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow z_i \in \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i + kz_j, \ldots, z_j, \ldots, z_m) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m) \subseteq \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i + kz_j, \ldots, z_j, \ldots, z_m) \quad (**) \end{aligned}$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(Z_1, \ldots, z_m) = \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_i + kz_j, \ldots, z_j, \ldots, z_m) \\ &\Rightarrow \operatorname{rk}(\mathbb{A}) = \operatorname{rk}(\mathbb{A}'). \end{aligned}$$

Satz 4.11:
Mittels elementarer Umformungen kann jede Matrix in Trapezgestalt gebracht werden.

Beweis 4.12:
Wir wissen bereits, dass die Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform überführt werden kann. Anschließend vertauscht man, wenn notwendig, die Spalten mit den führenden Einsen so dass diese beginnend mit der 1. Spalte aufeinander folgen. Dies ist eine Trapezgestalt.
□

Beispiel 4.16:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 2 \\ 11 & -4 & 9 & 9 \end{pmatrix}, \text{ gesucht ist } \operatorname{rk}(\mathbb{A})$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 2 \\ 11 & -4 & 9 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & -9 & -10 & -8 \\ 0 & -15 & -13 & -13 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$\cdot(-5)$ $\cdot(-11)$

$\cdot 3$ $\cdot 5$

$\cdot(-2)$

Nun kann man ablesen: $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = 3$

Folgerung 4.5:
Der Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl der führenden Einsen, wenn man diese Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform überführt.

Beweis 4.13:
Mittels elementarer Spaltenumformungen erhält man aus der Zeilenstufenform die Trapezgestalt und dabei gilt:

$$a_{11}^* = \ldots = a_{rr}^* = 1$$

und der Rang der Matrix ist gleich r. r gibt auch die Anzahl der führenden Einsen an.
□

Satz 4.12:
Sei $L(\mathbb{A}, \vec{0})$ der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$ mit $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann gilt:

$$\dim L(\mathbb{A}, \vec{0}) = n - \mathrm{rk}(\mathbb{A})$$

Beweis 4.14:
Lesen die Lösung in der reduzierten Zeilenstufenform ab. Dort setzt man für jede Variable, in deren Spalte keine führende Eins steht, einen Parameter ein.
Die Anzahl dieser Parameter ist $\dim L(\mathbb{A}, \vec{0})$. Weil es $\mathrm{rk}(\mathbb{A})$ führende Einsen und n Variablen gibt, sind dies genau $n - \mathrm{rk}(\mathbb{A})$ Parameter.
□

4.5 Anwendung: Lineare Codes

4.5.1 Fehlerkorrigierende (lineare) Codes

?

Beispiel 4.17:

- Strichcodes
- ISBN-Nummern

$$\text{Sender} \xrightarrow[\text{Nachricht}]{\text{Kanal}} \text{Empfänger}$$

Der Kanal (z.B. Funkkanal) ist im Allgemeinen nicht fehlerfrei.

$$\text{Nachricht d} \quad \overset{\text{Sender}}{\boxed{\text{codiert zu c}}} \xrightarrow[\text{verfälschte Nachricht}]{\text{c} \quad \lightning \quad \text{d'}} \boxed{\text{decodiert x}} \to d'$$

Nur zufällige Fehler, die die Anzahl der Zeichen nicht verändern, können behoben werden.
Modell: Alles wird zu n-Tupeln aus 0 und 1 codiert.
$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{-mal}}$

$V = \{0,1\}^n \qquad$ ($\{0,1\}$ kann man als Körper auffassen)
V ist ein Vektorraum über diesem Körper.
Code: Teilmenge von V

●

Definition 4.13 (Hamming-Abstand)**:**
Seien $u, w \in V$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$.
Dann heißt die Funktion $d(v, w)$: Anzahl $\{i \mid u_i \neq w_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ ein Abstand (Metrik) auf V.

Das heißt: $d(u, w)$ ist die Anzahl der Stellen, an denen sich u und w unterscheiden.

?

Beispiel 4.18:
$n = 7 \qquad V = \{0,1\}^7$

$$\left.\begin{array}{l} w = (0011001) \\ u = (1011101) \end{array}\right\} d(w,u) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} w = (1111111) \\ v = (0000000) \end{array}\right\} d(w,v) = 7$$

d hat folgende Eigenschaften:

1. $d(v,w) \geq 0$, offenbar erfüllt
   $d(u,w) = 0 \Leftrightarrow u = w$, offenbar erfüllt

2. $d(u,w) = d(w,u)$ für alle $u, w \in V$, offenbar erfüllt.

3. Dreiecksungleichung:

   $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ Dreiecksungleichung für alle $u, v, w \in V$

v und w unterscheiden sich an a Stellen, $a = d(v,w)$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien diese die ersten a Stellen. An den folgenden Stellen sind v und w gleich. Unter diesen a Stellen sind b Stellen, an denen sich u und w unterscheiden.
An diesen Stellen stimmen v und u überein.
Sei c die Anzahl der Stellen, nach den ersten a Stellen an denen sich u und w noch unterscheiden.

$$\begin{aligned}
d(v,w) &= a \\
d(u,w) &= b + c \\
d(u,v) &= a - b + c \\
d(u,w) + d(u,v) &= b + c + a - b + c \\
&= \underbrace{2c}_{\geq 0} + a \\
&\geq a = d(v,w)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \overbrace{}^{a} \\
v & x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x \\
w & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,x\,x\,x\,x\,x \\
u & \underbrace{x\,x\,x}_{b}\,0\,0\,0\,\underbrace{0\,0\,0}_{c}\,x\,x\,x
\end{array}$$

□

4.5.2 Hamming-Kugel

Definition 4.14 (Hamming-Kugel)**:**
Sei $r \geq 0$ und $v \in V$. Als **Hamming-Kugel** von v vom Radius r bezeichnet man die Menge

$$S_r(v) := \{w \in V \mid d(v,w) \leq r\}$$

4.5.3 Fehlerkorrigierender Code

Definition 4.15 (Fehlerkorrigierender Code)**:**
Eine Code heißt **t-fehlerkorrigierend**, falls $d(c,c') \geq 2t+1$ für alle $c, c' \in C, c \neq c'$.

4.5.4 Minimalabstand eines Codes

Definition 4.16:
Als Minimalstand eines Codes bezeichnet die Zahl

$$d(C) := \min\{d(c, c') \mid c \neq c', c, c' \in C\}$$

Offenbar ist C genau dann ein t-fehlerkorrigierend, wenn $d(C) \geq 2t + 1$.

Satz 4.13 (Hilfssatz)**:**
Sei C ein t-fehlerkorrigierender Code. Dann gilt

1. Für jedes $v \in V$ enthält $S_t(v)$ höchstens ein Element $c \in C$.
2. Für $c, c' \in C, c \neq c'$ gilt $S_t(c) \cap S_t(c') \neq \emptyset$
   (das heißt $s_t(c)$ und $s_t(c')$ sind disjunkt)

Beweis 4.15:

1. Angenommen $S_t(v)$ enthält 2 Elemente $c, c' \in C$.
   Dann gilt: $d(v, c) \leq t$, $d(v, c') \leq t$ Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt:
   $$d(c, c') \leq d(v, c) + d(v, c') \leq 2t$$
   Aber C ist t-fehlerkorrektur, also $d(c, c') \geq 2t + 1$ für alle $c \neq c'$. Also widerspricht die Existenz zweier solcher c, c' der t-fehlerkorrigierenden Eigenschaft von c.
2. Angenommen $S_t(c) \cap S_t(c') \neq \emptyset$. Dann gibt es $v \in V$:
   $v \in S_t(c)$, $v \in S_t(c')$. Das heißt $d(c, v) \leq t, d(c', v) \leq t$. $\Rightarrow c, c' \in S_t(v)$. Dies ist unmöglich wegen der 1. Eigenschaft von t-fehlerkorrigierenden Codes
   Also folgt $S_t(c) \cap S_t(c') = \emptyset$.
   $\square$

Praxis: Fehleranfälligkeit des Kanals schätzen $\Rightarrow$ Bestimmung von t
(Wenn mehr als t Fehler auftreten, decodiert ein t-fehlerkorrigierender Code nicht mehr korrekt!)
Konstruktion eines effizienten t-fehlerkorrigierenden Codes.
Ziel:

1. Großer Minimalabstand in C

2. effiziente Entschlüsselung

Beispiel 4.19:
$V = \{0,1\}^7$

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1

Definition 4.17:
Ein linearer Code $C \subseteq V = \{0,1\}^n$ ist ein Unterraum von V.

Als Unterraum besitzt C eine Dimension. Sei $\dim C = k$.

4.5.5 Generatormatrix

Definition 4.18 (Generatormatrix)**:**
Sei C ein linearer Code der Dimension k und $c_1, \ldots, c_n$ eine Basis von C.
Dann heißt die Matrix G deren i-te Zeile der Basisvektor C_i ist $(i = 1, \ldots, k)$ eine Generatormatrix von C.

Folgerung 4.6:
Offenbar ist G eine Matrix mit k Zeilen und n Spalten, also vom Typ $k \times n$.

Generatormatrix für den Beispielcode

?

Beispiel 4.20:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Speicheraufwand für C: 2^k-Vektoren
Speicheraufwand für G: k-Vektoren

4.5.6 Gewicht eines Vektors

Definition 4.19 (Gewicht eines Vektors)**:**
Sei $v \in V$. Das **Gewicht** $w(v)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Einträge von v.
Offenbar ist $w(v) = d(v, 0)$

Definition 4.20 (Minimalgewicht von C)**:**

$$w(C) := \min \{w(c) \mid c \in C, c \neq 0\}$$

heißt Minimalgewicht von C.

!

Satz 4.14:
Sei C ein linearer Code. Dann gilt $d(C) = w(C)$.

Beweis 4.16:

$$\begin{aligned} d(C) &= \min \{d(c, c') \mid c, c' \in C, c \neq c'\} \\ &\leq \min \{d(c, 0) \mid c \in C, c \neq 0\} \\ &= \min \{w(c) \mid c \in C, c \neq 0\} \\ &\Rightarrow d(C) \leq w(C) \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt: Es gilt ein $c_0 \in C$ mit $w(c_0) = d(C)$.
Es gilt: $c, c' \in C : d(C) = d(c, c')$

$$\Rightarrow w(c - c') = d(c - c', 0) = d(c, c') = d(c)$$

Wähle $c_0 = c - c' \in C$, weil C ein Unterraum ist. Dies ist die Behauptung.
□

Der Aufwand $w(C)$ zu bestimmen ist höchstens gleich $|C|$ (Anzahl der Elemente von C).
Der Aufwand $d(C)$ zu bestimmen ist viel höher.

4.5.7 Dualer Code

Definition 4.21 (dualer Code)**:**
Sei C ein linearer Code. Dann heißt

$$C^\perp = \{v \in V \mid v \cdot c = 0 \text{ für alle } c \in C\}$$

der **duale Code** zu C. Dabei ist für $v = v_1, \ldots, v_n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$
$v \cdot c = v_1 \cdot c_1 + v_2 \cdot c_2 + \cdots + v_n + c_n$
Zwei Vektoren $v, c \in V$ mit $v \cdot c = 0$ heißen orthogonal zueinander.

Das heißt $C^\perp$ besteht aus allen Vektoren von V, die senkrecht sind zu allen Vektoren von C.

Satz 4.15:
$C^\perp$ ist ein linearer Code der Dimension $n - k$.

Beweis 4.17:
Offenbar ist $C^\perp \subseteq V$. Zu zeigen: $C^\perp$ ist ein Unterraum aus V.
Es gilt $0 \in C^\perp$, denn $0 \cdot c = 0$ für alle $c \in C$. Das heißt: $C^\perp \neq \emptyset$.
Sei $v \in C^\perp$ und $k \in \{0, 1\}$.
$kv = (kv_1, \ldots, kv_n), v \in C^\perp$, also $c = (c_1, \ldots, c_n) \in C \qquad v \cdot c = 0$

$$\begin{aligned}(kv) \cdot c &= (kv_1, \ldots, kv_n)(c_1, \ldots, c_n) \\ &= k(v_1c_1) + k(v_2c_2) + \cdots + k(v_nc_n) \\ &= k(v_1c_1) + \cdots + (v_nc_n) = k \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Das heißt aus $v \in C^\perp \Rightarrow k' \cdot v \in C^\perp$ für alle $k \in \mathbb{K}$
Seien $v, v' \in C^\perp$, das heißt $v \cdot c = 0$ und $v' \cdot c = 0$ für alle $c \in C$
$(v - v')c = v \cdot c - v' \cdot c = 0 - 0 = 0 \Rightarrow v - v' \in C^\perp$
Unterraumkriterium liefert $C^\perp$ ist Unterraum von V, also ein linearer Code.
Berechnung der Dimension $C^\perp$:
Sei $c_1, \ldots, c_n$ eine Basis von C. Dann ist $v \in C^\perp \Leftrightarrow v \cdot c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$
Das heißt die Bestimmung aller Vektoren von $C^\perp$ ist äquivalent zur Lösung folgendes linearen und homogenen Gleichungssystems:

$v \cdot c_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$

$$\left.\begin{array}{l} v \cdot c_1 = 0 \\ v \cdot c_2 = 0 \\ \vdots \\ v \cdot c_k = 0 \end{array}\right\} \text{Lösungsraum ist } C^\perp$$

$\Rightarrow \dim C^\perp = n - rg(\mathbb{A}), \quad \mathbb{A}$ Koeffizientenmatrix

Es ist $\mathbb{A} = G$ (Generatormatrix): Das heißt $v \cdot G = 0$ $\mathrm{rk}(h) = k$ (da $c_1, \ldots, c_n$ linear unabhängig)

$\Rightarrow \dim C^\perp = n - k$

$\square$

Satz 4.16:
Es gilt: $C^{\perp\perp} = C$. $\left(\text{dabei ist } C^{\perp\perp} = \left(C^\perp\right)^\perp\right)$

Beweis 4.18:
Offenbar gilt $C \subseteq C^{\perp\perp}$. Denn $C^{\perp\perp}$ besteht aus allen Vektoren die senkrecht stehen auf allen Vektoren von $C^\perp$. Dies erfüllen offenbar alle Vektoren aus C.
Das heißt $C \subseteq C^{\perp\perp}$
Weiter folgt

$$\begin{aligned} C^{\perp\perp} &= n - \dim C^\perp \quad \text{nach obiger Formel} \\ &= n - (n-k) = k \\ &\Rightarrow \dim C^{\perp\perp} = k,\ C \subseteq C^{\perp\perp},\ \dim C = k \\ &\Rightarrow C = C^{\perp\perp} \end{aligned}$$

$\square$

4.5.8 Syndrom eines Vektors

Definition 4.22 (Syndrom eines Vektors)**:**
Als Syndrom $s(v)$ eines Vektors $v \in V$ bezeichnet man

$$s(v) = v \cdot H^T$$

H^T ist die transponierte Matrix zu H, sie entsteht aus H durch Vertauschung von Zeilen und Spalten.
Hat H den Typ $(m \times n)$, so hat H^T den Typ $(m \times n)$.

Beispiel 4.21:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 4.23:
H ist die Generatormatrix des dualen Codes zu C.
Man nennt H die **Kontrollmatrix** von C.

$$\begin{aligned} v \cdot H^T : \qquad & H \quad \text{Typ} : (n-k) \times n \\ & H^T \ \text{Typ} : n \times (n-k) \end{aligned}$$

v ist vom Typ $(1 \times n)$
das heißt v und H^T sind verkettet $\Rightarrow v \cdot H^T$ ist definiert. $s(v) = v \cdot H^T$ ist also ein linearer $(n-k)$ -Zeilenvektor.

Satz 4.17:
Sei C ein linearer Code mit Kontrollmatrix H. Dann gilt

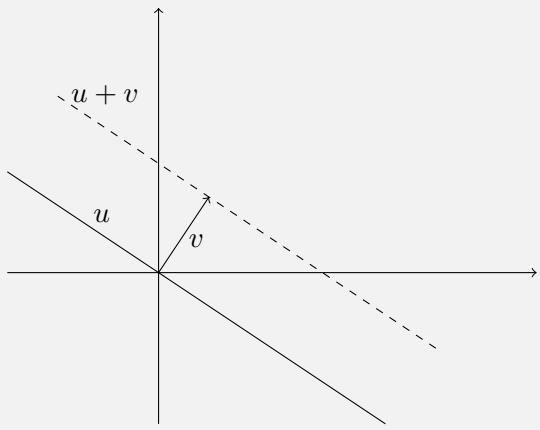
$$s(c) = 0 \Leftrightarrow c \in C$$

Beweis 4.19:
$s(c) = 0 \Leftrightarrow c \cdot H^T = 0 \Leftrightarrow c$ steht senkrecht auf den Zeilen von H
$\Leftrightarrow c \in C^{\perp\perp} \Leftrightarrow c \in C$.
$\square$

4.5.9 Nebenklassen

Definition 4.24 (Nebenklasse)**:**
Sei V irgendein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum.
Dann heißt die Menge $v+U = \{v+u \mid u \in U\}$ eine **Nebenklasse** von V bezüglich U. („Nebenklasse von U“)
v heißt **Repräsentant** dieser Nebenklasse.

Beispiel 4.22 (Im $\mathbb{R}^2$)**:**



Satz 4.18:

$$s(v) = s(w) \Leftrightarrow v + C = w + C$$

Das heißt v und w haben genau dann das gleiche Syndrom, wenn sie in derselben Nebenklasse liegen.

Beweis 4.20:

$$\begin{aligned} s(v) = s(w) &\Leftrightarrow vH^T = wH^T \\ &\Leftrightarrow (v-w)H^T = 0 \\ &\Leftrightarrow s(v-w) = 0 \\ &\Leftrightarrow v - w \in V \\ \\ &\Leftrightarrow v + C = w + C \end{aligned}$$

□

4.5.10 Anführer einer Nebenklasse

Definition 4.25 (Anführer einer Nebenklasse)**:**
Anführer einer Nebenklasse ist derjenige Vektor dieser Nebenklasse $v+C$ mit dem geringsten Gewicht.
Im Allgemeinen kann es mehrere Anführer geben.

In der folgenden Situation ist der Anführer einer Nebenklasse eindeutig.

Satz 4.19:
Sei C ein linearer, t-fehlerkorrigierender Code. Dann gilt:

1. Jeder Vektor $v \in V$ vom Gewicht $\leq t$ ist Anführer einer Nebenklasse
2. Jeder Anführer einer Nebenklasse, die einen Vektor vom Gewicht $\leq t$ enthält, ist eindeutig bestimmt.

Beweis 4.21:
Zu zeigen ist: Gibt es in einer Nebenklasse einen Vektor v mit $w(v) \leq t$ so hat jeder andere Vektor v' aus dieser Nebenklasse mindestens das Gewicht $t+1$, wobei $v \neq v'$ ist
Es ist $v \in v + C$, $v' \in v + C$ (da v, v' aus der gleichen Nebenklasse sind)
$\Rightarrow v - v' \in V$ und $v - v' \neq 0$ (weil $v \neq v'$)

$$w(v - v') = d(v - v', 0) \geq 2t + 1$$

da C ein t-fehlerkorrigierender Code ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2t + 1 \leq w(v - v') &= d(v - v', 0) = d(v, v') \\ &\leq \underbrace{d(v, 0)}_{w(v)} + d(0, v') \quad \text{Dreiecksungleichung} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2t + 1 \leq t + w(v') \Rightarrow t + 1 \leq w(v')$
$\square$

4.5.11 Decodierung linearer Codes

gesendet c, empfangen x, t-fehlerkorrigierender Code.

$$\Rightarrow x = c + e, \ e - \text{Fehlervektor}$$

Voraussetzung

x hat höchstens t Fehler.
Bestimmung der Nebenklasse von x, also $x + C$:

$$s(x) = s(c + e) = s(c) + s(e) = 0 + s(e)$$

das heißt x und e haben gleiches Syndrom. Weil es höchstens t Fehler sind, ist e **Anführer** dieser Nebenklasse. Dann kennt man also e sobald man die Nebenklasse von x kennt. (Denn diese Anführer sind eindeutig)

Rezept

Erstellung einer Liste aller Nebenklassenanführer. Für jede dieser Anführer ermittelt man sein Syndrom
Dann berechnet man $s(x)$, sucht in dieser Liste den Anführer mit diesem Syndrom und berechnet $c = x + e$.

?

Beispiel 4.23:
Für unseren Beispielcode mit Generatormatrix G haben wir folgende Kontrollmatrix H:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nebenklassenanführer:	**Syndrom:**
0 0 0 0 0 0 0	0 0 0
0 0 0 0 0 0 1	1 1 1
0 0 0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1 0 0	1 0 1
0 0 0 1 0 0 0	1 1 0
0 0 1 0 0 0 0	0 0 1
0 1 0 0 0 0 0	0 1 0
1 0 0 0 0 0 0	1 0 0

Liste der Nebenklassenanführer mit Syndrom.

1. $x \in C$ das heißt keine Fehler.

   $s(x) = 0 \Rightarrow$ Nebenklassenanführer ist $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

   $c = x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; x = c$

2. $x = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$

   $s(x) = x \cdot H^T = 1 \quad 1 \quad 0$

   $\Rightarrow$ Fehlervektor aus Liste ist: $0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$$\begin{aligned} c &= x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

Definition 5.1:
Eine Abbildung f zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektoren V und W heißt linear, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ (Additivität von f)
2. $f(k \cdot v_1) = k \cdot f(v_1)$ für alle $k \in \mathbb{K}$, alle $v_1 \in V$ (Homogenität von f)

Bemerkung:

$$f(v_1 \overbrace{+}^{+ \text{ in } V} v_2) = \underbrace{f(v_1)}_{\in W} \overbrace{+}^{+ \text{ in } W} \underbrace{f(v_2)}_{\in W}$$

analog Multiplikation:

$$f(k \overbrace{\cdot}^{\text{skalare Multiplikation in } V} v_1) \quad = \quad k \overbrace{\cdot}^{\text{skalare Multiplikation in } W} f(v_1)$$

Das heißt für lineare Abbildungen ist es egal, ob erst $v_1 + v_2$ berechnet wird und dann $f(v_1 + v_2)$ oder erst $f(v_1), f(v_2)$ und dann addiert wird: $f(v_1) + f(v_2)$. Analog für die skalare Multiplikation.

(„strukturerhaltende Abbildung“)

Folgerung 5.1:
Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2. $f(V) = \{w \in W \mid w = f(v),\ v \in V\}$ („Bild von f“)
   ist ein Unterraum von W

Beweis 5.1:

1. $f(\vec{0}_V) = f(\vec{0}_V + \vec{0}_W)$ (denn $\vec{0}_V = \vec{0}_V + \vec{0}_V$)
   $= f(\vec{0}_V) + f(\vec{0}_V)$ (Additivität von f)
   $\Rightarrow f(\vec{0}_V) = f(\vec{0}_V) + f(\vec{0}_V) \quad | + (-f(\vec{0}_V))$
   $\Rightarrow \vec{0}_W = \vec{0}_W + f(\vec{0}_V) \Rightarrow f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

2. Wir wollen mittels Unterraumkriterium zeigen: $f(V)$ ist Unterraum von W

   $f(V) \subseteq W$ nach Definition von f.
   $f(V) \neq \emptyset$, denn $f(\vec{0}) = \vec{0}_w \in f(V)$.

   Sei $w \in f(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$: $f(v) = w$

   $$\left.\underbrace{f(k \cdot v)}_{\in f(V)} \overset{\text{Homogenität}}{=} k \cdot f(v) = k \cdot w \quad \right\} \Rightarrow k \cdot w \in f(V) \text{ für jedes } k \in \mathbb{K}$$

   Seien nun $w_1, w_2 \in f(V)$. Dann gibt es $v_1, v_2 \in V$ so das gilt: $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$

   $\Rightarrow \underbrace{f(v_1 - v_2)}_{\in f(V)} = f(v_1 + (-v_2)) = f(v_1) + f(-v_2) = f(v_1) + f((-1)v_2) = f(v_1) + (-1)f(v_2) = f(v_1) - f(v_2) = w_1 - w_2$

   $\Rightarrow w_1 - w_2 \in f(V)$ für alle w_1, $w_2 \in f(V)$.

   Nach dem Unterraumkriterium folgt: $f(V)$ ist Unterraum von W.

□

Beispiel 5.1:
$f(v) = \vec{0}_W$ für alle $v \in V$ „Nullabbildung“
$f\colon V \to W$
Behauptung: f ist lineare Abbildung

$$f(v_1 + v_2) = \vec{0}_W, f(v_1) = \vec{0}, f(v_2) = \vec{0} \text{(nach Definition von } f\text{)}.$$

Es folgt:

$$f(v_1 + v_2) = \vec{0}_w = \vec{0}_w + \vec{0}_w = f(v_1) + f(v_2)$$

Beispiel 5.2:
$f : V \to V$, $f(v) := k_0 \cdot \mathbb{K}$, $k_0 \in \mathbb{K}$ fest gewählt.

Behauptung: f ist linear
$f(v_1+v_2) \overset{\text{Def.}}{=} k_0(v_1+v_2) \overset{\text{Distributiv}}{=} k_0v_1+k_0v_2 \overset{\text{Def.}}{=} f(v_1)+f(v_2)$
$\Rightarrow f$ ist additiv

$f(k\cdot v) \overset{\text{Def.}}{=} k_0\cdot(k\cdot v) \overset{\text{Assoziativ}}{=} (k_0\cdot k)\cdot v \overset{\text{Kommutativ}}{=} (k\cdot k_0)\cdot v \overset{\text{Assoziativ}}{=} k\cdot(k_0\cdot v) \overset{\text{Def.}}{=} k\cdot f(v)$
für alle $k\in\mathbb{K}$ und alle $v\in V \Rightarrow$ f ist homogen.
$\square$
Spezialfall:
$k_0=1: f(v)=1\cdot v=v$ für alle $v\in V$
Dann ist f die identische Abbildung von V

$$f=id_v,\ id_v(v)=v \text{ für alle } v\in V$$

Das heißt $id_vV\to V$ ist lineare Abbildung

?

Beispiel 5.3:
$f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \quad f\left((x,y,z)^T\right)=(2x-2y,3x+y-z)^T\in\mathbb{R}^2$

Behauptung: f ist linear, f ist additiv:
$(x,y,z)^T,\ (x',y',z')^T\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
f\left((x,y,z)^T+(x',y',z')^T\right) &= f\left((x+x',\ y+y',\ z+z')^T\right)\\
&= \left(2(x+x')-2(y+y'),\ 3(x+x')+(y+y')-(z+z')\right)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left((x,y,z)^T\right) &= (2x-2y,3x+y-z)^T\\
f\left((x',y',z')^T\right) &= (2x'-2y',3x'+y'-z')^T\\
f\left((x,y,z)^T\right)+f\left((x',y',z')^T\right) &= (2x-2y,3x+y-z)^T+(2x'-2y',3x'+y'-z')^T\\
&= (2x-2y+2x'-2y',3x+y-z+3x'+y'-z')^T\\
&= (2(x+x')-2(y+y'),3(x+x')+(y+y')-(z+z'))^T\\
&\Rightarrow f\left((x,y,z)^T+(x',y',z')^T\right)\\
&= f((x,y,z)^T)+f((x',y',z')^T)\\
&\Rightarrow f \text{ ist additiv}
\end{aligned}$$

Homogenität:

$$\begin{aligned}
f\left(k(x,y,z)^T\right) &= f\left((kx,ky,kz)^T\right)\\
&= (2(kx)-2(ky),3(kx)+(ky)-(kz))^T\\
&= k(2x-2y,3x+y-z)^T\\
&= k\cdot f\left((x,y,z)^T\right) \text{ für alle } k\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist homogen
$\Rightarrow f$ ist lineare Abbildung

?

Beispiel 5.4:

$$f\left((x,y,z)^T\right) := (0,1,x+y-z)^T \; f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$f\left(0,0,0)^T\right) = (0,1,0)^T \neq \vec{0}$$

das heißt f bildet den Vektorraum nicht auf den Nullvektor ab
$\Rightarrow f$ ist nicht linear!

?

Beispiel 5.5:

$$f\left((x,y,z)^T\right) = (0,x+y,xy,z)^T \in \mathbb{R}^4, \; f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

ist nicht linear:

$$\begin{aligned} f\left(k(x,y,z)^T\right) &= f\left((kx,ky,kz)\right) \\ &= (0,kx+ky,k^2xy,kz) \\ &= k(0,x+y,kxy,z) \\ &\neq k \cdot f\left((x,y,z)^T\right) \end{aligned}$$

Sei $k = 2$:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (1,1,1) \\ f\left(2(1,1,1)^T\right) &= f\left((2,2,2)^T\right) && = (0,4,\underline{4},2)^T \\ 2 \cdot f\left((1,1,1)^T\right) &= 2 \cdot (0,2,1,1)^T && = (0,4,\underline{2},2)^T \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist nicht linear

?

Beispiel 5.6:
V sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum; U Unterraum von V.
Sei W ein komplementärer Unterraum zu U in V, also $U \cap W = \{\vec{0}\}, \langle U, W\rangle = V$.
$v \in V$ so exisitieren eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U, w \in W$:

$$v = u + w$$

$f : V \to U, \; f(v) := u$ („Projektion von V auf U entlang W“)
Behauptung: f ist lineare Abbildung

Seien $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$ $(u_1, u_2 \in U,\ v_1, v_2 \in W)$

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{u_1 + u_2}_{\in U} + \underbrace{w_1 + w_2}_{\in W}$$

(eindeutig)

$$\Rightarrow f(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2)$$

das heißt f ist additiv

$k \cdot v_1 = k(u_1 + w_1) = \underbrace{ku_1}_{\in U} + \underbrace{kw_1}_{inW}$

(eindeutig)

$\Rightarrow f(kv_1) = ku_1 = k \cdot f(v_1)$ für alle $k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow f$ ist homogen

$\Rightarrow f$ ist lineare Abbildung

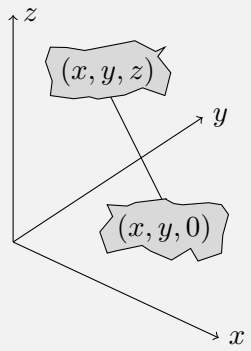
?

Beispiel 5.7:

$\mathbb{R}^3$, $U = (x - y)$-Ebene, $W = z$-Achse

f sei die Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U entlang W.

$f(x, y, z)^T = (x, y, 0) \in (x - y)$-Ebene.



?

Beispiel 5.8:

g Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf W entlang U:

$$g\left((x, y, z)^T\right) = (0, 0, z)^T$$

$$\text{denn } (x, y, z)^T = \underbrace{(0, 0, z)^T}_{\in W} + \underbrace{(x, y, 0)^T}_{\in U}$$

Faustregeln bei linearen Abbildungen

1. Variablen nur in erster Potenz
2. keine Produkte

3. keine Konstanten

5.1 Isomorphistische lineare Abbildungen

5.1.1 Surjektivität und Injektivität

Definition 5.2 (Surjektivität)**:**
Surjektiv: $f : V \to W$, $W = f(V)$ („Abbildung auf“)

Definition 5.3 (Injektivität)**:**
Injektiv: $f : V \to W$ eindeutig, das heißt aus $f(v) = f(w)$ folgt $v = w$.

5.1.2 Isomorphismus

Definition 5.4:
Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt **Isomorphismus**, falls f surjektiv und injektiv ist.
Falls $V = W$ ist, so heißt der Isomorphismus f ein **Automorphismus**.

5.2 Kern einer linearen Abbildung

Definition 5.5 (Kern einer linearen Abbildung)**:**
Sei $f : V \to W$, linear. Dann heißt die Menge

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$$

der Kern von f

Satz 5.1:
$\ker(f)$ ist ein Unterraum von V.

Beweis 5.2:
Nach Definition ist $\ker(f) \subseteq V$. Es ist $\vec{0}_V \in \ker(f) \Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset$
Sei nun $v \in \ker(f)$ und $k \in \mathbb{K}$. Weil $v \in \ker(f) \Rightarrow f(v) = \vec{0}_W$

$\Rightarrow k \cdot f(v) = k \cdot \vec{0}_W = \vec{0}_W$
$\overset{f \text{ ist homogen}}{\Rightarrow} f(k \cdot v) = \vec{0}_W \Rightarrow k \cdot v \in \ker(f)$ für alle $k \in \mathbb{K}$, alle $v \in V$
Seien nun $v_1, v_2 \in \ker(f) \Rightarrow f(v_1) = f(v_2) = \vec{0}w$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(v_1 - v_2) &= f(v_1 + (-v_2)) \\
&\overset{f \text{ ist additiv}}{=} f(v_1) + f(-v_2) \\
&= f(v_1) + f((-1)v_2) \\
&= f(v_1) + (-1)f(v_2) \\
&= \vec{0}_w + (-1)\vec{0}_w = \vec{0}_w
\end{aligned}$$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(f)$
$\Rightarrow$ Nach Unterraumdefinition ist $\ker(f)$ ein Unterraum von V.

□

5.3 Konstruktion einer linearen Abbildung mittels Bildern der Basiselemente

Satz 5.2 (Hilfssatz)**:**
Seien $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängige Elemente aus V und $w_1, \ldots, w_r$ beliebige Elemente aus W. Dann gibt es **mindestens** eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Beweis 5.3:
Wir ergänzen $v_1, \ldots, v_r$ zu einer Basis $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ von V.
Seien $w_{r+1}, \ldots, w_n \in W$ beliebig gewählt (z.B. $w_{r+1} = \ldots = w_n = 0$)
Definiere $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und für $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$, definieren wir $f(v) := \sum_{i=1}^n k_i w_i$.
Offenbar ist $f : V \to W$ (Wirklich Abbildung, da $k_1, \ldots, k_n$ eindeutig sind)
Damit ist f als Abbildung definiert.
Zu zeigen bleibt: f ist lineare Abbildung. Seien $v, v' \in V$. Dann gibt es $k_1, \ldots, k_n, k'_1, \ldots, k'_n \in \mathbb{K}$ (eindeutig bestimmt), so dass gilt

$$v = \sum_{i=1}^n k_i v_i \qquad\qquad v' = \sum_{i=1}^n k'_i v_i$$

(denn $v_1, \ldots, v_n$ ist Basis von V)

$$\Rightarrow v + v' = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i + \sum_{i=1}^{n} k_i' v_i = \sum_{i=1}^{n} (k_i + k_i') v_i$$

$$\begin{aligned} f(v+v') &= \sum_{i=1}^{n} (k_i + k_i') w_i \\ &\overset{\text{Distributiv}}{=} \sum_{i=1}^{n} (k_i w_i) + \sum_{i=1}^{n} (k_i' w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i f(v_i) + \sum_{i=1}^{n} k_i' f(v_i) \text{ (denn } f(v_i) = w_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i' v_i\right) = f(v) + f(v') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist additiv.

Sei nun $k \in \mathbb{K}$, $v \in V$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte $k_i \in \mathbb{K}$: $v = \sum_{i=1}^{n}$.

Nach Definition folgt $f(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k \cdot v = k(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i) &= \sum_{i=1}^{n} k(k_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (k \cdot k_i) v_i \Rightarrow f(k \cdot v) \\ = \sum_{i=1}^{n} (k \cdot k_i) w_i &= \sum_{i=1}^{n} k(k_i w_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i w_i \end{aligned}$$

$= k \cdot f(v)$ für alle $k \in \mathbb{K}$, alle $v \in V$.

$\Rightarrow f$ ist homogen
$\Rightarrow f$ ist linear.
$\square$

! **Satz 5.3** (Hilfssatz)**:**
Sei $v_1, \ldots, v_r$ ein Erzeugendensystem von V und seien $w_1, \ldots, w_r \in W$ beliebig gegeben.
Dann gibt es **höchstens** eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i (i = 1, \ldots, r)$

Beweis 5.4 (V hat höchstens eine lineare Abbildung)**:**
Seien f_1 und f_2 zwei lineare Abbildungen mit $f_i : V \to W$ $(i = 1, 2)$ und $f_i(v_j) = w_j$ $(i = 1, 2), j = 1, \ldots, r$.
Zu zeigen ist: $f_1(v) = f_2(v)$ für alle $v \in V$ (Denn dann gilt $f_1 = f_2$)
$v_1, \ldots, v_r$ sind ein Erzeugendensystem von $V \Rightarrow$ Es gibt $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{K}$, so dass gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{r} k_i v_i$$

(k_i nicht eindeutig bestimmt im Allgemeinen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_1(v) = f_1\left(\sum_{i=1}^{r} k_i v_i\right) &\overset{\text{f ist linear}}{=} \sum_{i=1}^{r} k_i f_1(v_i) \\ &\overset{\text{nach Vorr.}}{=} \sum_{i=1}^{r} k_i f_2(v_i) \\ &\overset{\text{f ist linear}}{=} f_2\left(\sum_{i=1}^{r} k_i v_i\right) \\ &= f_2(v) \end{aligned}$$

Satz 5.4:
Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.
Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen $w_1, \ldots, w_n \in W$ **genau eine** lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Beweis 5.5:
$v_1, \ldots v_n$ bilden Basis von V, also sind die linear unabhängig. Nach obigen Satz 5.2 gibt es mindestens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Andererseits bilden $v_1, \ldots, v_n$ auch ein Erzeugendensystem von V. Nach Satz 5.3 gibt es höchstens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
$\Rightarrow$ Es existiert genau eine Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$
$\square$

Folgerung 5.2:
Der Satz besagt: Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so kann man sich die Bilder $w_1, \ldots, w_n$ der Basiselemente beliebig vorgeben und dann existiert genau eine li-

neare Abbildung $f : V \to W$ mit

$$f(v_1) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

5.4 Charakterisierung einer linearen Abbildung mittels der Bilder von Basiselementen

Satz 5.5:
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit $f(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$
Dann gilt:

1. f ist genau dann injektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ ein Erzeugendensystem von W bilden.
3. f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W bilden.

Beweis 5.6: 1. Seien $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig. Zu zeigen ist f ist injektiv. Gelte $f(v_1) = f(v_2)$. Dann ist zu zeigen. Es folgt $v_1 = v_2$.

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \qquad\qquad v_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i' v_i$$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) \\ &\overset{\text{f ist linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} k_i f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i w_i \end{aligned}$$

analog:

$$\begin{aligned} f(v_2) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i' b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i' f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i' w_i \end{aligned}$$

Aus $f(v_1) = f(v_2)$ folgt durch

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} k_i w_i = \sum_{i=1}^{n} k_i' w_i \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} k_i w_i - \sum_{i=1}^{n} k_i' w_i = \vec{0} \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} (k_i - k_i') w_i = \vec{0} \end{aligned}$$

Weil $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, folgt $k_i = k_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$. Wegen $v_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ und $v_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i' v_i$ folgt daraus $v_1 = v_2$, das heißt f ist injektiv.

Sei nun umgekehrt f injektiv. Zu zeigen bleibt: $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig, $w_i = f(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Sei $k_1 w_1 + \ldots + k_n w_n = \vec{0} \Rightarrow k_1 f(v_1) + \ldots + k_n f(v_n) = \vec{0} \Rightarrow f(k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n) = \vec{0}$ (weil f lineare ist)

Andererseits gilt immer $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Nach Voraussetzung ist f injektiv

$$\Rightarrow k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = \vec{0}$$

Weil $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, folgt $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ als einzige Lösung. Also folgt aus $\sum_{i=1}^{n} k_i w_i = \vec{0}$ und $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ $\Rightarrow w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig.

2. Angenommen, $w_1, \ldots, w_n$ bilden ein Erzeugendensystem von W. Zu zeigen ist f ist surjektiv, dass heißt zu jedem $w \in W$ gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$.

   Sei $w \in W$ beliebig gegeben. Weil $w_1, \ldots, w_n$ ein Erzeugendensystem von W bilden, gibt es $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$, so dass gilt: $w = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i$.

   Wähle $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$.

   Es folgt: $f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) \overset{\text{f ist linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} k_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i = w$.

   $\Rightarrow$ f ist surjektiv.

   Die Umkehrung: f surjektiv $\Rightarrow$ $w_1, \ldots, w_n$ sind Erzeugendensystem ist Übungsaufgabe

3. Sei f ein Isomorphismus. Dann ist f injektiv und surjektiv. Nach „1.“ $w_1, \ldots w_n$ sind linear unabhängig, da f injektiv ist. Nach „2.“ folgt: $w_1, \ldots, w_n$ bilden Erzeugendensystem. Also ist $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W.

   Sei umgekehrt $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W. Aus „1.“ folgt f ist injektiv und aus „2.“ folgt f ist surjektiv. Somit ist f ein Isomorphismus.

□

Folgerung 5.3:
Das heißt „3.“ besagt: Isomorphismen bilden Basen auf Basen ab!
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Sind die Bilder **einer** Basis von V linear unabhängig, so sind die Bilder **jeder** Basis von V linear unabhängig.

2. Sind die Bilder **einer** Basis von V ein Erzeugendensystem von W, so sind die Bilder **jeder** Basis von V ein Erzeugendensystem von W.

3. Sind die Bilder **einer** Basis von V eine Basis von W, so sind die Bilder **jeder** Basis von V eine Basis von W.

Beweis 5.7:

1. folgt analog.
2. Sind die Bilder einer Basis von V ein Erzeugendensystem von W, so ist f surjektiv nach „2.“ des letzten Satzes. Wenn f surjektiv ist, so bildet f eine beliebige Basis auf ein Erzeugendensystem ab (Nach „2.“ des letzten Satzes).
3. Sind die Bilder einer Basis von V eine Basis von W, so folgt aus „3.“ des letzten Satzes: f ist ein Isomorphismus. Das heißt f ist injektiv und surjektiv. Nach „1.“ und „2.“ des letzten Satzes bilden dann die Bilder einer beliebigen Basis von V eine Basis von W.

Folgerung 5.4:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume gleicher Dimension n, so gibt es zu jeder Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und jeder Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von W genau eine lineare Abbildung

$$f : V \to W \text{ mit } f(v_i) = w_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

f ist ein Isomorphismus

Beweis 5.8:
Nach dem letzten (oder vorletzten?) Satz kann man $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebig vorgeben und es existiert dann genau eine lineare Abbildung : $V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$
Da nach Voraussetzung die w_i $(i = 1, \ldots, n)$ eine Basis von W bilden ist ebenfalls nach vorherigen Satz f surjektiv und injektiv, also ein Isomorphismus.
$\square$

Satz 5.6:
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.
Dann gibt es zu jeder weiteren Basis $\{v'_1, \ldots, v'_n\} \in V$ genau eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $v'_i = f(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und f ist ein Automorphismus.

Beweis 5.9:
Siehe letzte Folgerung mit $W = V$.
$\square$

Definition 5.6:
Zwei Vektorräume V und W heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt.

Bemerkung:
Sind zwei Vektorräume isomorph, so gilt $\dim V = \dim W$, denn ein Isomorphismus bildet Basen auf Basen ab.

Satz 5.7 (Theorem)**:**
Seien V und W zwei n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann sind V und W isomorph.

Beweis 5.10:
Wählen Basen $\{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ und $\{w_1, \ldots, w_n\} \in W$. Dann existiert (genau) eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, f ist ein Isomorphismus, das heißt V und W sind isomorph.
$\square$

Folgerung 5.5:
Das heißt bis auf Isomorphie ist $\mathbb{K}^n$ der einzige $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n

5.5 Darstellung von linearen Abbildungen mittels Matrizen

Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\dim V = n$, $\dim W = n$.
$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung.

Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W.

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k \text{ mit } a_{ki} \in \mathbb{K} \ (n = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$$

denn $f(v_i) \in W$ und $w_1, \ldots, w_n$ bilden eine Basis von W.

Sei $\mathbb{A} = (a_{ki})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$\mathbb{A}$ nennt man eine **Darstellungsmatrix** von f bezüglich der Basen B und C. Wir schreiben dafür:

$${}_B M_C(f) := \mathbb{A}$$

Offenbar hängt ${}_BM_C(f)$ von der Wahl der Basen ab! Das heißt, man kann von der Darstellungsmatrix bezüglich der gewählten Basen sprechen.
Diese ist aber dann eindeutig (dabei kommt es auch auf die Reihenfolge der Basiselemente an).

Berechnung von $\mathbb{A} = {}_{\mathbf{B}}\mathbf{M}_{\mathbf{C}}(\mathbf{f})$.

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k$$

Das heißt man stellt $f(v_i)$ als Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ dar. Die Koeffizienten dieser Linearkombination bilden gerade die i-te Spalte von $\mathbb{A}$

?

Beispiel 5.9:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3x-2y \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$
Wähle als Basis in $V = W = \mathbb{R}^2$, $B = C = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = f(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \quad = 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \Rightarrow \text{1. Spalte von } \mathbb{A} \text{ ist } \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ f(e_2) = f(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \text{2. Spalte von } \mathbb{A} \text{ ist } \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\mathbb{A} = {}_BM_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Wähle jetzt als Basis von $\mathbb{R}^2$: $B = \{e_1, e_2\}$, $C = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\right\}$
$\mathbb{A} = {}_BM_C(f) \quad f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = a_{11} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + a_{21} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{cc|c|l} 1 & -1 & 3 & \\ 1 & 3 & 1 & \rceil - \\ \hline 1 & -1 & 3 & \\ 0 & 4 & -2 & \mid \cdot 1/4 \\ \hline 1 & -1 & 3 & \\ 0 & 1 & -1/2 & \rfloor + \\ \hline 1 & 0 & 5/2 & \\ 0 & 1 & -1/2 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow a_{11} = \frac{5}{2}$, $a_{21} = -\frac{1}{2}$

$f\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right) = a_{12}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) + a_{21}\left(\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{cc|c}
1 & -1 & -2 \\
1 & 3 & 1 \\
\hline
1 & -1 & -2 \\
0 & 4 & 3 \\
\hline
1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 3/4 \\
\hline
1 & 0 & -5/4 \\
0 & 1 & 3/4 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right]- \\
\\
| \cdot 1/4 \\
\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right]+ \\
\\
\\
\end{array}$$

$\Rightarrow a_{12} = -\frac{5}{4}$, $a_{22} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \mathbb{A} = {}_BM_C(f) = \begin{pmatrix} 5/2 & -5/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit $\mathbb{A} = {}_BM_C(f)$ statt mit $f : V \to W$, $\dim V = n, \dim W = m$
B ist Basis von V, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis von W.
Sei $v \in V$ beliebig: $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$, $v = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ in dieser Basis.
Um $f(V)$ zu berechnen, bildet man $\mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$
und erst dann: $f(v) = \sum_{k=1}^{m} k_k' w_k$

Also: Wählt man eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V, so kann man jedem $v \in V$ ein n-Tupel $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ zuordnen mittels $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ (eindeutige Zuordnung).
$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ heißen Koordinaten von v bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
$f : V \to W$, linear in W Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$
$\mathbb{A} = {}_BM_C(f) = (a_{ki})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}}$ $\quad B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$
Koordinaten von $f(v)$: mittels Matrizenmultiplikation: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_m' \end{pmatrix}$ sind die Koordinaten von $f(v)$ bezüglich der Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$

?

Beispiel 5.10:

$$f : \mathbb{R}^2 \to R^2,\ f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 3x-2 \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$$

$B = (e_1, e_2)$, $C = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))$, ${}_B\mathbb{A}_C = \begin{pmatrix} 5/2 & -5/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

$f(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} 5/2 & -5/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, (denn $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind bezüglich $\{e_1, e_2\}$ gerade die Koordinaten des Vektors)

$= \begin{pmatrix} 25/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}$, Das sind die Koordinaten von $f(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ bezüglich der anderen Basis C.

$f(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ darstellen in Basis C.

$$\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \stackrel{?}{=} \frac{25}{4} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{3}{4} \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

Sei nun eine Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gegeben und V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\dim V = n$, $\dim W = m$.
Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W.
Wir konstruieren eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mittels Angabe der Bilder $f(v_i)$:

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k$$

Hierdurch ist die lineare Abbildung f eindeutig bestimmt.
Nach Definition ist ${}_BM_C(f) = \mathbb{A}$. Das heißt jede Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ kann als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f : V \to W$ mit $\mathbb{K}$-Vektorraum V, W, $\dim V = n$ und $\dim W = m$ auftreten.
Damit ist der nachfolgende Satz bewiesen.

!

Satz 5.8:
Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V und $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W.

1. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix ${}_BM_C(f) = (a_{ki}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definiert durch $f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k$

   ${}_BM_C(f)$ heißt Darstellungsmatrix von f bezüglich B und C.

   Für $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ ist $f(v) = \sum_{j=1}^{m} k_j' w_j$ und $\begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

2. Umgekehrt gilt es zu jeder Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine lineare Abbildung

$$f : V \to W \text{ mit } {}_B M_C(f) = \mathbb{A}$$

?

Beispiel 5.11:
$\mathrm{id} : V \to V$, identische Abbildung $\mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$.
Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\} = C$, ${}_B M_C(\mathrm{id}) = \mathbb{A}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{id}(v_i) = \sum_{n=1}^{n} a_{ni} v_k = v_i \text{ (wegen } \mathrm{id}(v_i) = v_i) \\ \Rightarrow a_{ii}, a_{ki} = 0 \ (K \neq i) \end{array}\right\} \Rightarrow {}_B M_B(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}_n$$

Wählt man $B \neq C$, dann folgt daraus ${}_B M_C(f) \neq \mathbb{E}_n$

Bemerkung: Man wählt B und C oft so, dass ${}_B M_C(f)$ eine einfache Gestalt hat.

!

Satz 5.9:
Sei $f : V \to W$ lineare Abbildung und $g : W \to U$ lineare Abbildung
Dann ist $g \circ f : V \to U$ eine lineare Abbildung.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] & W \arrow[r, bend left, "g"] & U \end{tikzcd}$$

$$(g \circ f)(v) = g(f(v))$$

□

Beweis 5.11:
Wir zeigen

$$(g \circ f)(\alpha v + \beta v') = \alpha (g \circ f)(v) + \beta (g \circ f)(v')$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alle $v, v' \in V$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha v + \beta v') &\overset{\text{Definition}}{=} g(f(\alpha v + \beta v')) \\ &\overset{f \text{ linear}}{=} g(\alpha f(v) + \beta f(v')) \\ &\overset{g \text{ linear}}{=} \alpha g(f(v)) + \beta g(f(v')) \\ &\overset{\text{Definition}}{=} \alpha (g \circ f)(v) + \beta (g \circ f)(v') \end{aligned}$$

□

?

Beispiel 5.12 (Berechnung einer Darstellungsmatrix)**:**
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 3x-2y \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$
$B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $C = \{\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$,
gesucht ist: ${}_BM_C(f)$

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \quad = 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$
$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \ {}_BM_C(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

„Verhaltung linearer Abbildungen f dim g ist die lineare Abbildung $g \circ f$“
$f \to W,\ g : W \to U$
Wie kann man die Darstellungsmatrix von $g \circ f$ berechnen aus Kenntnis der Darstellungsmatrizen von g und f?

!

Satz 5.10:
Sei $f : V \to W$ und $g : W \to U$ lineare Abbildungen und seien $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $D = \{w_1, \ldots, w_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ Basen von V, W und U, dann gilt:

$${}_BM_C(g \circ f) = \ {}_DM(g)_C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrizenprodukt}}}{\cdot} {}_BM_D(f)$$

Beweis 5.12 (Matrizenmultiplikation)**:**
Es ist

$$
\begin{aligned}
{}_BM_D(f) &= (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots r\\ j=1,\dots n}} \\
{}_DM_C(g) &= (b_{ki})_{\substack{k=1,\dots n\\ i=1,\dots r}} \\
{}_BM_C(g\circ f) &= (C_{kj})_{\substack{n=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \\
{}_BM_C(g\circ f)(v_j) &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m} C_{kj}U_k (j=1,\dots,n)
\end{aligned}
$$

Zu zeigen ist:

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^{r} b_{ki}a_{ij}$$

denn dann gilt: ${}_BM_C(g\circ f) = {}_DM_C(g)\cdot {}_BM_D(f)$

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(v_j) &= g\left(f(v_j)\right) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij}w_i\right) \\
&\overset{g \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{r} a_{ij}g(w_i) \\
&= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}u_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} b_{ki}a_{ij}\right)}_{\substack{\text{Einträge in der}\\ \text{Darstellungsmatrix von g}\circ\text{f}}} u_k
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow C_{kj} = \sum_{i=1}^{r} b_{kj}a_{ij}$$

□

Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimensionen n bzw. m.

$\mathbb{A}$ kann eine lineare Abbildung $f_{\mathbb{A}} : V \to W$ durch

$$f_{\mathbb{A}}(v_i) := \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$$

für irgendwelche Basen $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von W sein.
Es sei ${}_B M_C(f_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$
Es gibt eine weitere Möglichkeit $\mathbb{A}$ eine lineare Abbildung $f_{\mathbb{A}}$ zu zuordnen:

$$f_{\mathbb{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$f_{\mathbb{A}}(v) = \mathbb{A} \cdot v$ (Matrizenprodukt)

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{A}}(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \mathbb{A}(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha \mathbb{A} v_1 + \beta \mathbb{A} v_2 \\ &= \alpha f_{\mathbb{A}}(v_1) + \beta f_{\mathbb{A}}(v_2) \end{aligned}$$

Darstellungsmatrix von $f_{\mathbb{A}} : B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ kanonische Basis von $\mathbb{K}^m$

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{A}}(e_i) = \mathbb{A} e_i &= i\text{-te Spalte von } \mathbb{A} \\ &= i\text{-te Spalte von } {}_B M_C(f_{\mathbb{A}}) \ (i = 1, \ldots, n) \\ &\Rightarrow \ {}_B M_C(f_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A} \end{aligned}$$

Satz 5.11:
Sei $f : V \to W$ linear und $\dim(V) < \infty$,
dann gilt:

1. $\dim \operatorname{Bild}(f) < \infty$
2. $\dim \operatorname{Bild}(f) + \dim \operatorname{Kern}(f) = \dim(V)$

Beweis 5.13:

1. Die Abbildung $f : V \to \operatorname{Bild}(f)$ ist surjektiv.

   $\Rightarrow$ Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild}(f)$
   $\Rightarrow \operatorname{Bild}(f)$ ist endlich erzeugt
   $\Rightarrow \operatorname{Bild}(f)$ besitzt endliche Basis
   $\Rightarrow \dim \operatorname{Bild}(f) < \infty$

2. $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V. Sei U ein komplementärer Teilraum zu $\mathrm{Kern}(f)$ in V, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) \cap U &= \{\vec{0}\}, \\ \langle \mathrm{Kern}(f), U \rangle &= V \end{aligned}$$

Es ist $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Sei $f_{|U}$ die Einschränkung von f auf U. $f_{|U}$ ist lineare Abbildung (weil U Unterraum von V ist)
Es ist $\mathrm{Kern}(f_u) = \{\vec{0}\}$, weil $\mathrm{Kern}(f) \cap U = \{\vec{0}\}$.

Also ist $f_{|U} : U \to V$ injektiv.

Zeigen noch: $f_{|U} : U \to \mathrm{Bild}(f)$ ist surjektiv:
Sei $w \in \mathrm{Bild}(f)$, dann gibt es ein $v \in V : f(v) = w$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $v_0 \in \mathrm{Kern}(f)$ und $u \in U : v = v_0 + u$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= f(v) \\ &= f(v_0 + u) \\ &= f(v_0) + f(u) \\ &= \vec{0} + f(u) \\ &= f(v) \end{aligned}$$

Das heißt zu jedem $w \in \mathrm{Bild}(f)$ gibt es ein $u \in U : f(u) = w$, das heißt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Bild}(f_{|U})$
Andererseits gilt offensichtlich: $\mathrm{Bild}(f_{|U}) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f_{|U}) \\ &\Rightarrow f_{|U} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Also ist gezeigt: $f_{|U} : U \to \mathrm{Bild}(f)$ ist linear, injektiv und surjektiv, das heißt $f_{|U}$ ist ein Isomorphismus zwischen U und $\mathrm{Bild}(f) \Rightarrow \dim U = \dim \mathrm{Bild}(f)$.
Weil U und $\mathrm{Kern}(f)$ komplementäre Teilräume sind, gilt $\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim U = \dim V$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$$

□

! **Satz 5.12:**
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$ und $f : V \to W$ eine lineare

Abbildung, dann gilt:

$$\dim \operatorname{Bild}(f) = \operatorname{rk}(\mathbb{A})$$

wobei $\mathbb{A}$ irgendeine Darstellungsmatrix von f ist.
Insbesondere ist der Rang einer Darstellungsmatrix von f unabhängig von den gewählten Basen.

□ **Beweis 5.14:**
Sei:
- $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V
- $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W
- $\mathbb{A} = {}_B M_C(f)$
- $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von $\mathbb{A}$, $s_i \in \mathbb{K}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $U = \mathcal{L}\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{K}^m$.
- $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = \dim U$ (nach der Definition 4.11).
- $W' = \mathcal{L}\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$. Offenbar ist $W' = \operatorname{Bild}(f)$

Behauptung: U und W' sind isomorph. Konstruktion eines Isomorphismuses:
Sei $u \in U \subseteq \mathbb{K}^m$

$$g(u) = g\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} u_k w_k \in W$$

Offenbar ist g eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned}
g(\alpha\hat{u} + \beta\tilde{u}) &= g\left(\alpha \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}\right) \\
&= g\left(\begin{pmatrix} \alpha\hat{u}_1 + \beta\tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \alpha\hat{u}_m + \beta\tilde{u}_m \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m} (\alpha\hat{u}_k + \beta\tilde{u}_k)\, w_k \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{m} \hat{u}_k w_k + \beta \sum_{k=1}^{m} \tilde{u}_k w_k \\
&= \alpha g(\hat{u}) + \beta g(\tilde{u}) \\
&\Rightarrow g \text{ ist lineare Abbildung}
\end{aligned}$$

g ist injektiv:

$$\begin{aligned} g(u) = g(\overline{u}) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} u_k w_k = \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k w_k \\ &\Leftrightarrow u_k = \overline{u}_k \ (u = 1, \ldots, n) \text{ (Koeffizientenvergleich, da} \\ &\quad \{w_1, \ldots, w_m\} \text{ Basis von } W \\ &\Leftrightarrow u = \overline{u} \text{ Das heißt } g \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

g bildet U in W ab, $U = \mathcal{L}(s_1, \ldots, s_n)$, s_i ist i-te Spalte von $\mathbb{A}$
Sei

$$\begin{aligned} s_i &= \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \ (i = 1, \ldots, n) \\ g(s_i) &= \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_n \\ &= f(v_i) \end{aligned}$$

weil $\mathbb{A} = (a_{ki})$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich B und C ist.
Es ist $f(v_i) \in \text{Bild}(f)$, das heißt $g : U \to \text{Bild}(f)$ sind surjektiv.
$\Rightarrow g : U \to \text{Bild}(f)$ ist ein Isomorphismus
$\Rightarrow \dim \text{Bild}(f) = \dim U = \text{rk}(\mathbb{A})$
$\square$

Es ist somit einfach, $\dim \text{Kern}(f)$ und $\dim \text{Bild}(f)$ zu bestimmen.
$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$, $\dim \text{Kern}(f)$ ist also die Dimension eines Lösungsraumes eines homogenen Gleichungssystems, während $\dim \text{Bild}(f)$ mittels des Rangs irgendeiner Darstellungsmatrix $\mathbb{A}$ von f bestimmt ist.

Folgerung 5.6:
Sei $\mathbb{A}\mathbb{x} = \vec{0}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem mit $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, dann gilt:

$$\dim L(\mathbb{A}, \vec{0}) = n - \text{rk}(\mathbb{A})$$

Beweis 5.15:
Behauptung: die lineare Abbildung $f_{\mathbb{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f_{\mathbb{A}}(v) = \mathbb{A} \cdot v$ (Matrizenmultiplikation)

Es ist $\operatorname{Kern}(f_{\mathbb{A}}) = L(\mathbb{A}, \vec{0})$

$$\Rightarrow \dim L(\mathbb{A}, \vec{0}) + \underbrace{\dim \operatorname{Bild}(f_{\mathbb{A}})}_{\operatorname{rk}(\mathbb{A})} = \dim V = n$$

$$\Rightarrow \dim L(\mathbb{A}, \vec{0}) = n - \operatorname{rk}(\mathbb{A})$$

□

5.6 Rang einer linearen Abbildung

Definition 5.7 (Rang einer linearen Abbildung)**:**
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V, W und $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$.
Sei $\mathbb{A}$ eine Darstellungsmatrix von f, dann nennen wir $\operatorname{rk}(f) := \operatorname{rk}(\mathbb{A})$ den **Rang der linearen Abbildung f**.

Satz 5.13 (Charakterisierung von Isomorphismen)**:**
Seien V und W zwei n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.
Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\operatorname{rk}(f) = n$ ist.

Beweis 5.16:
Sei $\mathbb{A}$ irgendeine Darstellungsmatrix von f, dann gilt:

$$\operatorname{rk}(f) = \operatorname{rk}(\mathbb{A})$$

a) Sei $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) < n$. Dann sind die Spalten von $\mathbb{A}$ linear abhängig, dann sind die Bilder einer Basis von V auch linear abhängig. Das heißt $\dim \operatorname{Bild}(f) < n$, daher ist $\dim \operatorname{Kern}(f) \geq 1$, f nicht injektiv, also **kein Isomorphismus**

   Damit ist gezeigt: Ist f ein Isomorphismus, so ist $\operatorname{rk}(f) = n$.

b) Gelte nun $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = n$, dann sind die Spalten von $\mathbb{A}$ linear unabhängig, also auch die Bilder einer Basis von V. Das heißt $\operatorname{Bild}(f)$ hat die Dimension n.

   Es ist daher $\operatorname{Bild}(f) \subseteq W$, $\dim \operatorname{Bild}(f) = n = \dim W$

   $$\Rightarrow \operatorname{Bild}(f) = W$$

Das heißt f ist surjektiv und wegen

$$\dim \mathrm{Kern}(f) + \underbrace{\dim \mathrm{Bild}(f)}_{=n} = n$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(f) = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ ist injektiv}$$

$\Rightarrow f$ ist Isomorphismus

□

Satz 5.14:
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, $\dim V = n$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. f ist Isomorphismus
2. f ist injektiv
3. f ist surjektiv

Beweis 5.17:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv } &\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\} \\ &\Leftrightarrow \dim V = \dim Bild(f) \\ &\Leftrightarrow \text{f ist surjektiv} \end{aligned}$$

□

5.6.1 Invertierbare Matrizen

Definition 5.8 (invertierbare Matrizen)**:**
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
$\mathbb{A}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $\mathbb{A}' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}' = \mathbb{A}' \cdot \mathbb{A} = \mathbb{E}_n$$

$$\mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Bezeichnung:

- $\mathbb{A}^{-1} := \mathbb{A}'$
- $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_n$
- $\mathbb{A}^{-1}$ heißt **inverse Matrix** zu $\mathbb{A}$

z.B.: $\mathbb{E}_n \cdot \mathbb{E}_n = \mathbb{E}_n$, $\mathbb{Q}_n$ besitzt keine inverse Matrix

?

Beispiel 5.13:
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

analog folgt $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
keine inverse Matrix besitzt z.B.:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ denn } \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Angenommen, es gäbe zu $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine inverse Matrix $\mathbb{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nach Definition} \quad | \cdot \mathbb{B} \\ &(\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A}) \cdot \mathbb{B} = \mathbb{E}_n \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \\ &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \mathbb{B} \\ &\Rightarrow \underbrace{\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{0}}_{\mathbb{0}} = \mathbb{B} \quad \lightning \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{A}$ besitzt keine inverse Matrix

?

Beispiel 5.14:
$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$
Besitzt $\mathbb{A}$ eine inverse Matrix $\mathbb{A}^{-1}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{x}) = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{b} \\ &\Rightarrow \qquad \mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b} \end{aligned}$$

$\mathbb{x}$ ist eindeutige Lösung.

Satz 5.15:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann gilt:
$\mathbb{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = n$.

Beweis 5.18:
Sei zunächst $\mathbb{A}$ invertierbar. Dann existiert ein $\mathbb{A}^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{E}_n$$

Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis irgendeines n-dimensionalen Vektorraumes V.
$\mathbb{A}$ kann man eine lineare Abbildung $f_{\mathbb{A}} : V \to V$ wie folgt zuordnen:

$$f_{\mathbb{A}}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k$$

$\mathbb{A}$ ist die Darstellungsmatrix von $f_{\mathbb{A}}$.
Analog induziert $\mathbb{A}^{-1}$ eine lineare Abbildung $f_{\mathbb{A}^{-1}} : V \to V$

$$f_{\mathbb{A}^{-1}}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} v_k, \quad \mathbb{A}^{-1} = (a'_{ki})$$

$\mathbb{A}^{-1}$ ist Darstellungsmatrix von $f_{\mathbb{A}^{-1}}$ bezüglich Basis $B = C$

$$f_{\mathbb{A}} \circ f_{\mathbb{A}^{-1}} : V \to V, \text{ linear}$$

Es gilt

$${}_B M_B(f_{\mathbb{A}}) \cdot {}_B M_B(f_{\mathbb{A}^{-1}}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_n = {}_B M_B(\mathrm{id})$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f_{\mathbb{A}} \cdot f_{\mathbb{A}^{-1}} = \mathrm{id} \\ \text{Analog zeigt man } f_{\mathbb{A}^{-1}} \cdot f_{\mathbb{A}} = \mathrm{id} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow f_{\mathbb{A}} \text{ ist invertierbar und } (f_{\mathbb{A}})^{-1} = f_{A^{-1}} \\ \Rightarrow f_{\mathbb{A}} \text{ ist injektiv} \\ \Rightarrow f_{\mathbb{A}} \text{ ist Isomorphismus} \\ \Rightarrow \operatorname{rk} \text{ jeder Darstellungsmatrix von } f_{\mathbb{A}} \text{ ist } n \\ \Rightarrow \operatorname{rk}(\mathbb{A}) = n \end{array}$$

Gelte nun umgekehrt $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = n$.
Dann folgt $f_{\mathbb{A}} : V \to V$ ist ein Isomorphismus. Sei $f_{\mathbb{A}}^{-1}$ der inverse Isomorphismus (siehe Übungsaufgaben)

$$f_{\mathbb{A}} \circ f_{\mathbb{A}^{-1}} = f_{\mathbb{A}^{-1}} \circ f_{\mathbb{A}} = \mathrm{id}_V$$

Es ist $\mathbb{A} = {}_B M_B(f_{\mathbb{A}})$, $\mathbb{A}' = {}_B M_B(f_{\mathbb{A}^{-1}})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}' &= \mathbb{A}' \cdot \mathbb{A} \\ &= {}_B M_B(\mathrm{id}) \\ &= \mathbb{E}_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ ist invertierbar, wenn $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}'$

Statt „$\mathbb{A}$ ist invertierbar“ sagt man auch „$\mathbb{A}$ ist regulär“ oder „umkehrbar“.
□

Folgerung 5.7:
Eine $n \times n$ Matrix ist genau dann invertierbar, wenn der Rang gleich n ist.

Folgerung 5.8:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann gilt:
$\mathbb{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten (oder Zeilen) von $\mathbb{A}$ linear unabhängig sind.

Beweis 5.19:
$\mathbb{A}$ ist regulär $\Leftrightarrow \operatorname{rk} \mathbb{A} = n \Leftrightarrow$ es gibt n linear unabhängige Spalten/Zeilen.
□

Wir betrachten jetzt folgende Situation:
$f : V \to W$ ist eine lineare Abbildung.

B sei Basis von V, C sei Basis von W.
B' sei Basis von V, C' sei Basis von W.

Sei $\mathbb{A} = {}_B M_C(f)$ und $\mathbb{A}' = {}_{B'} M_{C'}(f)$

Satz 5.16:
Unter diesen Voraussetzungen gilt: Es gibt reguläre Matrizen $\mathbb{T} \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $\mathbb{S} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so dass gilt:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{T}\,\mathbb{A}\,\mathbb{S}$$

Beweis 5.20 (Konstruktiv, das heißt wie man $\mathbb{T}$ und $\mathbb{S}$ berechnet!)**:**
Sei $\mathbb{S} = {}_{B'} M_B(\mathrm{id}_V)$ und $\mathbb{T} = {}_C M_{C'}(\mathrm{id}_W)$
Weil id_V, id_W Isomorphismen sind, sind $\mathbb{S}$ und $\mathbb{T}$ reguläre Matrizen.

Die Behauptung folgt sofort aus:

$$f = \mathrm{id}_W \circ f(\mathrm{id}_V) \text{ gilt immer}$$

Gehe über zu den Darstellungsmatrizen:

$$\underbrace{{}_{B'}M_{C'}(f)}_{\mathbb{A}'} = \underbrace{{}_{C}M_{C'}(\mathrm{id}_W)}_{\mathbb{T}} \cdot \underbrace{{}_{B}M_{C}(f)}_{\mathbb{A}} \cdot \underbrace{{}_{B'}M_{B}(\mathrm{id}_V)}_{\mathbb{S}}$$

Bemerkung: $\mathbb{T}$ und $\mathbb{S}$ können also unabhängig von f gewählt werden.
□

!

Satz 5.17:
Sei $f : V \to V$ lineare Abbildung, B eine Basis von V und B' eine weitere Basis von V, dann sei $\mathbb{A} = {}_{B}M_{B}(f)$ und $\mathbb{A}' = {}_{B'}M_{B'}(f)$
Dann gibt es eine invertierbare Matrix $\mathbb{S} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ($n = \dim V$), so dass gilt:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{S}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{S}$$

□

Beweis 5.21:
Setzt man im vorhergehenden Satz $W = V$, so gilt $\mathbb{T} = {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)$ und $\mathbb{S} = {}_{B'}M_{C}(\mathrm{id}_W)$, so dass gilt:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{T} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{S}$$

Weiter folgt: $\mathrm{id}_v \circ \mathrm{id}_v = \mathrm{id}_v$
Durch Übertragung auf die Darstellungsmatrizen bezüglich $B = C$ und $B' = C'$ folgt:

$$\begin{aligned} {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V) \cdot {}_{B'}M_{B}(\mathrm{id}_V) &= {}_{B}M_{B}(\mathrm{id}_V) = \mathbb{E}_n \\ \text{bzw. } {}_{B'}M_{B}(\mathrm{id}_V) \cdot {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V) &= {}_{B'}M_{B'}(\mathrm{id}_V) = \mathbb{E}_n \end{aligned}$$

$$\mathbb{T} \cdot \mathbb{S} = \mathbb{S} \cdot \mathbb{T} = \mathbb{E}_n$$
$$\Rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^{-1}$$

□

?

Beispiel 5.15:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$
\begin{aligned}
{}_{B'}M_B(\mathrm{id}) : \ \mathrm{id} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathrm{id} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
{}_{B'}M_B(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}) : \mathrm{id} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\qquad \alpha = 2, \ \beta = -1, \\
\mathrm{id} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\qquad \alpha' = -1, \ \beta' = 1 \\
&\Rightarrow \ {}_{B}M_{B'}(f) : \mathrm{id} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
{}_{B'}M_B(\mathrm{id}) \cdot \ {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{B}M_B(f) : f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \ {}_{B}M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{B'}M_{B'}(f) = \ {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}) \cdot \ {}_{B}M_B(f) \cdot \ {}_{B'}M_B(\mathrm{id}) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad \alpha = 0, \quad \beta = 1$$

$$f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \alpha' \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta' \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad \alpha' = -3, \beta' = 3$$

6 Determinanten

Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Definition 6.1 (Determinantenfunktion)**:**
Eine Determinantenfunktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ mit folgenden 3 Eigenschaften:

1. f ist linear in den Spalten von $\mathbb{A}$, das heißt $\mathbb{A} = (s_1, \ldots, s_n)$ sind die Spalten von $\mathbb{A}$, so gilt:

$$f(s_1, \ldots, s_i + s_i', \ldots, s_n) = f(s_1, \ldots, s_n) + f'(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n)$$
$$\text{und } f(s_1, \ldots, ks_i, \ldots, s_n) = k \cdot f(s_1, \ldots, s_n) \text{ für jedes } i \in \{1, \ldots, n\}$$

2. Stimmen zwei Spalten von $\mathbb{A}$ überein, so gilt:

$$\det \mathbb{A} = 0$$

3. Es gilt:

$$\det \mathbb{E}_n = 1$$

Beispiel 6.1:
$n = 1$: $\mathbb{K}^{1 \times 1} = \mathbb{K}$
$\det a := a$

1. $\left.\begin{aligned} &\det(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot a = \lambda \cdot \det(a) \\ &\det(a + b) = a + b = \det(a) + \det(b) \end{aligned}\right\}$ linear

2. entfällt

3. $\mathbb{E}_1 = 1,\ \det \mathbb{E}_1 = \det 1 = 1$

?

Beispiel 6.2:
$n = 2$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det \mathbb{A} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

zu zeigen: „1.“, „2.“, „3.“, sind erfüllt:

3. $\det \mathbb{E}_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

2. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0$

1. für die erste Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} \\ &= \lambda (a_{11} a22 - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda \det \mathbb{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (a_{11} + b_{11}) \cdot a_{22} - a_{12} \cdot (a_{21} + b_{21}) \\ &= a_{11} a_{22} + b_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} - a_{12} b_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} + b_{11} a_{22} - a_{12} b_{21} \\ &= \det \mathbb{A} + \det \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

Analog für die zweite Spalte

!

Satz 6.1:

1. Der Wert von $\det \mathbb{A} = \det(s_1, \ldots, s_n)$ ändert sich nichts, wenn man ein beliebiges Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert.

2. Vertauscht man in $\det(s_1, \ldots, s_n)$ zwei Spalten, so ändert sich der Wert der Determinanten um das Vorzeichen.

Beweis 6.1: 1. Wir addieren das λ-fache der j-ten Spalte zur i-ten Spalte. Sei $i < j$.

$$\begin{aligned}
&\det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i + \lambda s_j, s_{i+1}, \ldots, s_n) \\
&\overset{\substack{\text{Linearität an} \\ \text{der } i\text{-ten Spalte}}}{=} \underbrace{\det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)}_{\det \mathbb{A}} \\
&\qquad + \lambda \underbrace{\det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_j, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n}_{=0} \\
&\Rightarrow \text{1. Behauptung}
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen die Behauptung bei Vertauschung von Spalte 1 und Spalte 2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) \\
\mathbb{A}' &= (s_2, s_1, s_3, \ldots, s_n)
\end{aligned}$$

zu zeigen ist: $\det \mathbb{A} = -\det \mathbb{A}'$

$$\begin{aligned}
\det(s_1 + s_2, s_2, s_3, \ldots, s_n) &\overset{1.}{=} \det(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \det \mathbb{A} \\
\det(s_2 + s_1, s_1, s_3, \ldots, s_n) &= \det(s_2, s_1, \ldots, s_n) = \det \mathbb{A}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathbb{A} + \det \mathbb{A}' &= \det(s_1 + s_2, s_2, s_3, \ldots, s_n) + \det(s_1 + s_2, s_1, s_3, \ldots, s_n) \\
&= \det(s_1 + s_2, s_2 + s_1, s_3, \ldots, s_n) \\
&\overset{\text{Def}}{=} 0 \\
\Rightarrow \det \mathbb{A} &= -\det \mathbb{A}'
\end{aligned}$$

Analog für alle übrigen Spalten.

□

Beispiel 6.3:
$\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$
$\det(\lambda \cdot \mathbb{A}) = \lambda^n \cdot \det \mathbb{A}$

(denn λ wird als Faktor aus jeder Spalte angehoben)

6.1 Permutation

Permutationen sind essentieller Bestandteil von Determinanten.

Permutation: $\{1, 2, \ldots, n\}$
Permutation einer Menge ist eine Anordnung dieser Menge.
Menge aller Permutationen ist die Menge aller Anordnungen von $\{1, \ldots, n\}$.

?

Beispiel 6.4:
$n = 1 : (1)$ eine Anordnung
$n = 2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ zwei Anordnungen
$n = 3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sechs Anordnungen

•

Definition 6.2 (Bijektive Abbildungen auf Permutatoinen)**:**
Sei M eine Menge von n Elementen.
Eine Permutation von M ist eine bijektive Abbildung von M auf sich selbst.

Damit kann man Permutationen verknüpfen. Sind π_1 und π_2 Permutationen, so ist $\pi_1 \circ \pi_2$ definiert und wieder eine bijektive Abbildung von M auf sich.

?

Beispiel 6.5:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Jede Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.
- Es gibt ein neutrales Element: identische Abbildung. id

  $$\pi \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \pi$$

- Jede Permutation besitzt als injektive Abbildung eine inverse Permutation

?

Beispiel 6.6:

$$\begin{aligned}
\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
\pi \circ \pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \pi^{-1} \circ \pi \\
&= \mathrm{id}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Menge aller Permutationen einer endlichen Menge bildet eine **Gruppe**.

6.1.1 symmetrische Gruppe

•

Definition 6.3 (symmetrische Gruppe)**:**
Die Gruppe aller Permutationen von n Elemente heißt symmetrische Gruppe und wird mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet.
Die Gruppe ist bei $n = 3$ nicht kommutativ.

6.1.2 Vorzeichen einer Permutation

$\mathrm{sign}(\pi)$ - Vorzeichen der Permutation von π
$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^{|F|}$ $|F|$ ist die Anzahl der Fehlstände von π
π: Permutationen $i < g$ und $\pi(i) > \pi(j)$ dann ist (i, j) ein Fehlstand

?

Beispiel 6.7:
$n = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{|F|=0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{|F|=1}, \ 1 < 2, \ \pi(1) = 2 > \pi(2) = 1$
$\mathrm{sign}(\mathrm{id}) = 1 \ \mathrm{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^1 = -1$

?

Beispiel 6.8:
$n = 3$

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sign}(\mathrm{id}) &= (-1)^0 = 1 \\
\mathrm{sign}(\pi_1) &= (-1)^1 = -1 \\
\mathrm{sign}(\pi_2) &= (-1)^1 = -1 \\
\mathrm{sign}(\pi_3) &= (-1)^2 = 1 \\
\mathrm{sign}(\pi_4) &= (-1)^2 = 1 \\
\mathrm{sign}(\pi_5) &= (-1)^3 = -1
\end{aligned}$$

Anzahl der Permutationen von n-Elementen: $n! = \mathrm{Ord}\,\mathfrak{S}_n$.

!

Satz 6.2:
Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Dann gilt:

$$\det(s_1, \ldots, s_n) = \mathrm{sign}(\pi) \det(s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})$$

□

Beweis 6.2:
Idee: Jede Permutation π kann als Produkt $\pi = \pi \circ \pi_{i-1} \circ \ldots \circ \pi_i$ von Permutationen geschrieben werden, die nur benachbarte Elemente vertauschen.

Jetzt kann die Determinantenformel gezeigt werden.

6.2 Leibnizsche Determinantenformel

Definition 6.4:
Durch

$$\det(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

für $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ wird eine Determinantenfunktion gegeben.

Beispiel 6.9:

$$n = 2 : \gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\pi} \right\}$$

$$\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = +1$$

$$\operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) a_{1\,\mathrm{id}(1)} a_{2\,\mathrm{id}(2)} + \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Beispiel 6.10:
$n = 3 : \mathrm{id}$,

$$\left(\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right), \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$|F| = 0 \qquad |F| = 1 \qquad |F| = 1$$

$$\operatorname{sign}(\pi_0) = 1 \qquad \operatorname{sign}(\pi_1) = -1 \qquad \operatorname{sign}(\pi_2) = -1$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|F| = 2 \qquad |F| = 2 \qquad |F| = 3$$

$$\operatorname{sign}(\pi_3) = 1 \qquad \operatorname{sign}(\pi_4) = 1 \qquad \operatorname{sign}(\pi_5) = -1$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} && (\widehat{=}\,\pi_0) \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} && (\widehat{=}\,\pi_1) \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} && (\widehat{=}\,\pi_2) \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} && (\widehat{=}\,\pi_3) \\ & + a_{13}a_{21}a_{32} && (\widehat{=}\,\pi_4) \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} && (\widehat{=}\,\pi_5) \end{aligned}$$

Zu jedem Summanden kommt aus jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag vor.
Es bleibt zu zeigen: Diese Definition ist eine Determinantenfunktion
Es ist zu zeigen: (L) erfüllt die Eigenschaften „1.“ – „3.“ einer Determinantenfunktion.

$$\mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E}_n = (\delta_{ij}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ bei } i = j \\ 0 \text{ bei } i \neq j \end{cases}$$

$$\det \mathbb{E}_n = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi)\, \delta_{1\pi(1)}\, \delta_{2\pi(2)} \cdots \delta_{n\pi(n)} \qquad \delta_{n\pi(n)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } n \neq \pi(n) \\ 1 \text{ bei } n = \pi(n) \end{cases}$$

$$\delta_{(n-1)\pi(n-1)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } \pi(n-1) \neq n-1 \\ 1 \text{ bei } \pi(n-1) = n-1 \end{cases}$$

$$\delta_{1\pi(1)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } \pi(1) \neq 1 \\ 1 \text{ bei } \pi(1) = 1 \end{cases}$$

Das heißt:

$$\delta_{1\pi(1)} \cdots \delta_{n\pi(n)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } \pi \neq \mathrm{id} \\ 1 \text{ bei } \pi = \mathrm{id} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \mathbb{E}_n &= (+1)\delta_{1d(1)} \cdots \delta_{nd(n)} \text{ alle anderen Summanden mit } 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ „3.“ ist doch (L) erfüllt.

?

Beispiel 6.11:

$$n = 2 : \gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\pi} \right\}$$

$$\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = +1$$

$$\operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) a_{1\,\mathrm{id}(1)} a_{2\,\mathrm{id}(2)} + \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n = 3 : \mathrm{id}, \pi_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right), \pi_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right), \pi_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \pi_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \pi_5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & - a_{13}a_{21}a_{32} \\ & + a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Zu jedem Summanden kommt aus jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag vor.
Es bleibt zu zeigen: Diese Definition ist eine Determinantenfunktion
Es ist zu zeigen: (L) erfüllt die Eigenschaften „1.“–„3.“ einer Determinantenfunktion.

$$\mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E}_n = (\delta_{ij}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ bei } i = j \\ 0 \text{ bei } i \neq j \end{cases}$$

$$\det \mathbb{E}_n = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi)\ \delta_{1\pi(1)}\ \delta_{2\pi(2)}\ \cdots\ \delta_{n\pi(n)} \quad \delta_{n\pi(n)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } n \neq \pi(n) \\ 1 \text{ bei } n = \pi(n) \end{cases}$$

$$\delta_{(n-1)\pi(n-1)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } \pi(n-1) \neq n-1 \\ 1 \text{ bei } \pi(n-1) = n-1 \end{cases}$$

$$\delta_{1\pi(1)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } \pi(1) \neq 1 \\ 1 \text{ bei } \pi(1) = 1 \end{cases}$$

Das heißt:

$$\delta_{1\pi(1)} \cdots \delta_{n\pi(n)} = \begin{cases} 0 \text{ bei } \pi \neq \mathrm{id} \\ \\ 1 \text{ bei } \pi = \mathrm{id} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \mathbb{E}_n &= (+1)\delta_{1d(1)} \cdots \delta_{nd(n)} \text{ alle anderen Summanden mit } 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ „3.“ ist doch (L) erfüllt.

$$\begin{aligned} &\det(s_1, \ldots, s_{i-1}, k_1 s_i + k_2 \hat{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \\ &\quad = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi)\, s_{1\pi(1)} \cdots s_{(i-1)\pi(i-1)} \left(k_1 s_{i\pi(i)} + k_2 \hat{s}_{i\pi(i)}\right) s_{(i+1)\pi(s+1)} \cdots s_{n\pi(n)} \\ &\quad = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi)\, s_{1\pi(1)} \cdots \left(k_1 s_{i\pi(i)}\right) s_{(i+1)\pi(i+1)} \cdots s_{n\pi(n)} \\ &\quad + \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi)\, s_{1\pi(1)} \cdots s_{(i-1)\pi(i-1)} \left(k_2 \hat{s}_{i\pi(i)}\right) s_{(i+1)\pi(i+1)} \cdots s_{n\pi(n)} \\ &\quad = k_1 \det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) + k_2 \det(s_1, \ldots, s_{i-1}, \hat{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \end{aligned}$$

das heißt die Determinantenfunktion ist linear in den Spalten.

Bleibt zu zeigen: Wenn es 2 gleiche Spalten gibt, so ist die Determinante *Null*.
Bemerkung: $\operatorname{sign}(\pi \cdot \pi_1) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \operatorname{sign}(\pi_1)$.

$\Rightarrow$ Die geraden Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ heißt die alternierende Gruppe von $\mathfrak{S}_n$.
$\operatorname{Ord} \mathfrak{A}_n = \frac{n!}{2}$. Dann gilt für $\tau \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{A}_n$ (d.h. τ ist eine ungerade Permutation!):

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{A}_n \cdot \tau \text{ Weiter gilt } \operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$$

Sei $\mathbb{A}$ eine Determinante mit $s_1 = s_2$:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\det(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) \\ &\quad = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sign} \pi)\, s_{1\pi(1)}\, s_{2\pi(2)}\, s_{3\pi(3)} \cdots s_{n\pi(n)} \\ &\quad = \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} s_{1\pi(1)}\, s_{2\pi(2)}\, s_{3\pi(3)} \cdots s_{n\pi(n)} + \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{A}_n} (-1) s_{1\pi(1)}\, s_{2\pi(2)}\, s_{3\pi(3)} \cdots s_{n\pi(n)} \end{aligned}$$

$$(\pi = \pi' \circ \tau, \pi' \in \mathfrak{A}_n)$$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \underline{s_{1\pi(1)}\ s_{2\pi(2)}}\ s_{3\pi(3)}\ \cdots\ s_{n\pi(n)} - \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \underline{s_{1\pi\circ\tau(1)}\ s_{2\pi\circ\tau(2)}}\ s_{3\pi\circ\tau(3)}\ \cdots\ s_{n\pi\circ\tau(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \left(s_{1\pi(1)}\ s_{2\pi(2)}\ s_{3\pi(3)}\ \cdots\ s_{n\pi(n)} - \underbrace{s_{1\pi\circ\tau(1)}\ s_{2\pi\circ\tau(2)}}_{s_{1\pi(2)}\ s_{2\pi(1)}}\ s_{3\pi\circ\tau(3)}\ \cdots\ s_{n\pi\circ\tau(n)}\right)$$

Das heißt wir haben gezeigt:

$$\det(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) s_{1\pi(1)}\ \cdots\ s_{n\pi(n)}$$

ist eine Determinantenfunktion für jedes n.
$\Rightarrow$ Für jedes n existiert eine Determinantenfunktion.
Zeigen noch: Jede Determinantenfunktion hat die Gestalt

$$\det(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi)\ s_{1\pi(1)}\ \cdots\ s_{n\pi(n)}$$

Sei also $\det$ irgendeine Determinantenfunktion, also eine Funktion, die „1.“ – „3.“ einer Determinantenfunktion erfüllt

$$\det(s_1, \ldots, s_n) \qquad s_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow s_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{-k-te Zeile}$$

$$\Rightarrow \det(s_1, \ldots, s_n) = \det\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 i} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 i} e_{k_2}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n i} e_{k_n}\right)$$

$$\overset{\text{„1.“}}{=} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_1 i} a_{k_2 i} \ldots a_{k_n i} \det(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n})$$

Es ist $\det(e_{k1}, \ldots, e_{kn}) = 0$, sobald 2 Indizes den gleichen Wert haben.
Daher summiert man nur über die Terme, wo $k_1, \ldots, k_n$ punktweise verschieden sind. Jedes solcher n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n)$ ist dann genau Permutation von $1, \ldots, n$

$$\overset{\text{„2.“}}{=} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1)1}\ a_{\pi(2)2}\ \cdots\ a_{\pi(n)n}\ \underbrace{\det(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)})}_{\operatorname{sign}(\pi)\cdot\underbrace{\det(e_1, \ldots, e_n)}_{=1}}$$

$$\overset{\text{„3.“}}{=} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) a_\pi(1)1 a_\pi(2)2 \ldots a_\pi(n)n$$

Es ist $a_{\pi(1)1}\ a_{\pi(2)2}\ \cdots\ a_{\pi(n)n} = a_{\pi^{-1}(1)1}\ a_{\pi^{-1}(2)2}\ \cdots\ a_{\pi^{-1}(n)n}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1)1}\ a_{\pi(2)2}\ \cdots\ a_{\pi(n)n} \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1}) a_{1\pi^{-1}(1)}\ a_{2\pi^{-1}(2)}\ \cdots\ a_{n\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi^{-1}\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1}) a_{1\pi(1)}\ \cdots\ a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)}\ \cdots\ a_{n\pi(n)}
\end{aligned}$$

das heißt ist $\det(s_1,\ldots,s_n)$ eine beliebige Determinantenfunktion $\Rightarrow$ $\det(s_1,\ldots,s_2) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) s_{1\pi(1)}\cdots s_{n\pi(n)}$.
$\Rightarrow$ Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Determinantenfunktion und diese ist gegeben durch

$$\det(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) s_{1\pi(1)}\ \cdots\ s_{n\pi(n)}$$

Dieser Ausdruck enthält $n!$ Summanden, daher ist er für die Berechnung von Determinanten ungeeignet.

6.3 Berechnung von Determinanten

Definition 6.5:
Eine **obere Dreiecksmatrix** ist ein Element aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ deren Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen alle 0 sind.
Eine **untere Dreiecksmatrix** ist ein Element aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ deren Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen alle verschieden sind.

obere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$

untere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$

Folgerung 6.1:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\mathbb{A}$ sei obere Dreiecksmatrix,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (analog für untere Dreiecksmatrix)

Beweis 6.3:
In der Summe $\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)}$ verschwinden alle Summanden die eine Null enthalten. Jeder Summand hat genau einen Eintrag aus jeder Zeile und Spalte. Das heißt aus der 1.Spalte kommt nun a_{11} in Frage, aus der 2.Spalte a_{22} und so weiter.
$\Rightarrow \det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
$\square$

Idee: $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ so umformen, dass eine Dreiecksmatrix $\mathbb{A}'$ entsteht und $\det \mathbb{A} = \pm \det \mathbb{A}'$ gilt, mit Kontrolle des Vorzeichens.

Anwendung:

Elementare Spaltenoperationen:	Addition von Vielfachen von Spalten zu anderen Spalten. Dabei ändert sich die Determinante nicht. Vertauschung von Spalten: Determinante ändert Vorzeichen

Auf diese Weise überführt man $\mathbb{A}$ in eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante sich von der ursprünglichen nur um das Vorzeichen unterscheidet.

Satz 6.3:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Dann gilt $\det \mathbb{A}^T = \det \mathbb{A}$

Beweis 6.4:
Siehe Übungsaufgaben

Folgerung 6.2:
Alles, was bei Spalten gilt, gilt ebenso für Zeilen.

?

Beispiel 6.12:
Berechnung von Determinanten:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

?

Beispiel 6.13:

$$\mathbb{A}^K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 15 \end{vmatrix}}_{=2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 15 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot 2(-5)$$

$$= \underline{\underline{20}}$$

?

Beispiel 6.14:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 13 = \underline{\underline{26}}$$

Der folgende Satz führt die Berechnung einer Determinante einer $n \times n$-Matrix zurück auf die Berechnung von n Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen.

!

Satz 6.4 (Entwicklungssatz von Laplace)**:**
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Dann gilt:

1. $\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ („Entwicklung nach i-ter Zeile“)

2. $\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ („Entwicklung nach j-ter Spalte“)

$\mathbb{A}_{ij}$ entsteht aus $\mathbb{A}$ durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Vorzeichenregel: $\begin{matrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$

?

Beispiel 6.15:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach 2. Zeile (d.h. $i = 2$)

$$
\begin{aligned}
\det \mathbb{A} &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} \det \mathbb{A}_{2j} \\
&= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j} a_{2j} \det \mathbb{A}_{2j} \\
&= (-1)^1 a_{21} \det \mathbb{A}_{21} + (-1)^2 a_{22} \det \mathbb{A}_{22} + (-1)^3 a_{23} \det \mathbb{A}_{23} \\
&= -2 \cdot \det \mathbb{A}_{21} + 1 \cdot \det \mathbb{A}_{22} - 3 \cdot \det \mathbb{A}_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_{21} &= \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 8 \end{smallmatrix}\right) & \mathbb{A}_{22} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right) & \mathbb{A}_{23} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{smallmatrix}\right) \\
\det \mathbb{A}_{21} &= 22 & \det \mathbb{A}_{22} &= 12 & \det \mathbb{A}_{23} &= -2
\end{aligned}
$$

$$
= -2 \cdot 22 + 12 - 3 \cdot (-2) = \underline{\underline{-26}}
$$

Methode ist günstig, wenn viele $a_{ij} = 0$
z.B.:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -(-8-4) = 12
$$

das heißt nach Zeilen oder Spalten entwickeln, in denen viele Nullen stehen.

z.B.: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -(7-20) = \underline{\underline{13}}$

?

Beispiel 6.16:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 27 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 27 \end{vmatrix} \\
&= -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \underline{\underline{4}}
\end{aligned}$$

Berechnung mittels Entwicklung der Determinante:
Wir entwickeln nach der Zeile/Spalte mit den meisten Nullen.
$\Rightarrow$ entwickeln nach der dritten Spalte

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad +3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&\qquad \cdot(-2) \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad +3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \qquad +3(-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot (10 - 6) - 3 \cdot \big((-1)(-2) - 3 \cdot (-2)\big) \\
&= 28 - 3 \cdot 8 \\
&= \underline{\underline{4}}
\end{aligned}
$$

Definition 6.6 (Zusammenfassung von Determinantenumformungen)**:**

- Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man ein beliebiges Vielfaches einer Zeile oder Spalte zu einer anderen addiert.
- Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen oder Spalten vertauscht.
- Eine Determinante ist 0, wenn sie zwei gleiche Zeilen oder Spalten besitzt.
- eine Determinante ist linear in jeder Zeile oder Spalte.
- Es gilt $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T \quad \forall \mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
- Multipliziert man eine Zeile oder Spalte mit k, so multipliziert sich der Wert der Determinante auch mit k.
- $\det(\lambda \mathbb{A}) = \lambda^n \det \mathbb{A} \quad \mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Satz 6.5:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
Dann gilt: $\det \mathbb{A} \neq 0 \Leftrightarrow$ Die Zeilen von $\mathbb{A}$ (Spalten von $\mathbb{A}$) sind linear unabhängig.

Beweis 6.5 (Lineare Unabhängigkeit für Spalten)**:**
Angenommen, die Spalten sind linear abhängig.
Das heißt, eine Spalte ist eine Linearkombination der übrigen Spalten.
Sei dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit die letzte Spalte.

$\mathbb{A} = (s_1, \ldots, s_n), s_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j s_j$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det \mathbb{A} = \det(s_1, \ldots, s_n) &= \det\left(s_1, \ldots, s_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} c_j s_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} c_j \det(s_1, \ldots, s_{n-1}, s_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} c_j \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

denn in jedem Summanden heben sich zwei gleiche Spalten auf.
Sei nun umgekehrt $\det \mathbb{A} = 0$. Angenommen, $s_1, \ldots, s_n$ wären linear unabhängig. Dann bilden $s_1, \ldots, s_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$.
Dann gibt es Skalare c_{kj}, so dass gilt $e_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} s_k$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \det(\mathbb{E}_n) \\
&= \det(e_1, \ldots, e_n) \\
&= \det\left(\sum_{k_1=1}^{n} c_{k_1 1} s_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} c_{k_2 2} s_{k_2}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} c_{k_n n} s_{k_n}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} c_{k_1 1} c_{k_2 2} \cdots c_{k_n n} \det(s_{k_1}, \ldots, s_{k_n})
\end{aligned}$$

Wenn hier zwei Indizes k_i, k_j den gleichen Wert annehmen, treten in der Determinante zwei gleiche Spalten auf, diese wird aber 0.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} c_{\pi(1)1} c_{\pi(2)2} \cdots c_{\pi(n)n} \underbrace{\det(s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})}_{\operatorname{sign} \pi \cdot \det(s_1, \ldots, s_n)} \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} c_{\pi(1)1} c_{\pi(2)2} \ldots c_{\pi(n)n} \operatorname{sign}(\pi) \underbrace{\det(s_1, \ldots, s_n)}_{=0 \text{ nach Voraussetzung}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

also wäre $1 = 0$, das ist ein Widerspruch $\Rightarrow s_1, \ldots, s_n$ können nicht linear unabhängig sein.

Daraus folgt: $s_1, \ldots, s_n$ sind linear abhängig.
$\square$

Folgerung 6.3:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbb{A}$ ist invertierbar
2. $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) = n$
3. $\det \mathbb{A} \neq 0$

Beweis 6.6:

1. $\Leftrightarrow$ 2. schon gezeigt.
2. $\Leftrightarrow$ 3. ist der letzte Satz.

$\square$

6.3.1 Multiplikation von Determinanten

Satz 6.6 (Multiplikationssatz für Determinanten)**:**
Sei $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann gilt:

$$\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$$

Beweis 6.7:

1. Sei $\det \mathbb{A} = 0$ Damit ist $\operatorname{rk}(\mathbb{A}) < n$
   Nach Übungsaufgabe: $\operatorname{rk}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \leq \operatorname{rk}(\mathbb{A}) < n$
   $\Rightarrow \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = 0$ (nach Folgerung)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) &= 0 \\ &= 0 \cdot \det \mathbb{B} \\ &= \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B} \end{aligned}$$

2. Sei nun $\det \mathbb{A} \neq 0$. Halten $\mathbb{A}$ fest, also ist nur noch $\mathbb{B}$ variabel. Betrachte folgende Abbildung: $\mathbb{B} \mapsto \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$
   Diese Abbildungen $\mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$, $\mathbb{E}_n \mapsto \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{E}_n) = 1$

Angenommen $\mathbb{B}$ hat zwei gleiche Spalten

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(\mathbb{B}) < n$$
$$\Rightarrow \operatorname{rk}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) < n$$
$$\Rightarrow \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = 0$$

das heißt $\mathbb{B} \mapsto 0$, falls $\mathbb{B}$ zwei gleiche Spalten besitzt.

Diese Abbildung ist auch linear in den Spalten von $\mathbb{B}$: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ ist linear in den Spalten von $\mathbb{B}$ $\det(\mathbb{C})$ ist linear in den Spalten von $\mathbb{C} \Rightarrow \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$ ist linear in den Spalten von $\mathbb{B}$.

Das heißt die Abbildung $\mathbb{B} \mapsto \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$ erfüllt die Eigenschaften „1.“ bis „3.“ einer Determinantenfunktion. Es gibt aber nur genau eine Determinantenfunktion, diese ist ist $\det \mathbb{B}$.

$$\Rightarrow \det \mathbb{B} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$$
$$\Rightarrow \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B} = \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$$

□

Folgerung 6.4:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\det \mathbb{A} \neq 0$, dann gilt:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}$$

Beweis 6.8:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_n \overset{\text{Multiplikationssatz}}{\Rightarrow} \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{A}^{-1}) = \det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1}) = \det \mathbb{E}_n = 1$$
$$\Rightarrow \det \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}$$

□

Berechnung der inversen Matrix mittels Determinanten:
$\mathbb{A}_{ij}$ - entsteht aus $\mathbb{A}$ durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}_{ji} \qquad \text{(Stellung der Indizes beachten)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{in} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+j} \det \mathbb{A}_{jk} \overset{i=j}{=} \det \mathbb{A}$$

links steht Entwicklung nach j-ter Zeile

$$\sum_{k=1}^{n} a_{in} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+j} \det \mathbb{A}_{jk} \overset{i\neq j}{=} 0$$

Denn links steht die Entwicklung der Determinanten von $\mathbb{A}$ wobei die j-te Zeile durch die i-te ersetzt wird.

Sei $\mathbb{A}^{ad} := (b_{ij})$. Dann haben wir gezeigt:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{ad} = \det \mathbb{A} \cdot \mathbb{E}_n$$

Analog zeigt man:

$$\mathbb{A}^{ad} \cdot \mathbb{A} = \det \mathbb{A} \cdot \mathbb{E}_n$$

Falls $\det \mathbb{A} \neq 0$ ist $\Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{ad}\right) \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \left(\frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{ad}\right) = \mathbb{E}_n$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{ad}$$

?

Beispiel 6.17:
$n = 2$, $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $\det \mathbb{A} \neq 0$.

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{ad} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{lll} \mathbb{A}_{11} = a_{22}, & \mathbb{A}_{22} = a_{11} & \det \mathbb{A}_{11} = a_{22}, \quad \det \mathbb{A}_{22} = a_{11} \\ \mathbb{A}_{12} = a_{21}, & \mathbb{A}_{21} = a_{12} & \det \mathbb{A}_{12} = a_{21}, \quad \det \mathbb{A}_{21} = a_{12} \end{array}$$

$$\mathbb{A}^{ad} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

?

Beispiel 6.18:
$n = 3$, $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\det \mathbb{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \det \mathbb{A}_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \det \mathbb{A}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det \mathbb{A}_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \det \mathbb{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \det \mathbb{A}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det \mathbb{A}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \det \mathbb{A}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad \det \mathbb{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbb{A}^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = \underline{\underline{-5}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{E}_3}}$$

Das Verfahren ist für Matrizen $n \geq 4$ unhandlich. Besser ist die folgende Methode:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}, \det \mathbb{A} \neq 0$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \ x_{ij} \text{ sind zu berechnen}$$

$\mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Dies ist äquivalent zu n Gleichungssystemen der Gestalt $\mathbb{A} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = e_i \ (i = 1, \dots, n)$

Das heißt es sind n Gleichungssysteme zu lösen, die alle die gleiche Koeffizientenmatrix $\mathbb{A}$ haben. Deswegen geht man wie folgt vor:

$$\mathbb{A} \left| \ \mathbb{E}_n \xrightarrow[Umformung]{elementare} \mathbb{E} \ \right| \ \mathbb{A}^{-1}$$

?

Beispiel 6.19:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} (\alpha_{ij}), \ (\det \mathbb{A} \neq 0) \qquad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}_{ji}$$

$\mathbb{A}_{ji}$ entsteht aus $\mathbb{A}$ durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte.

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}, \ \mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}, \ \det \mathbb{A} \neq 0$$

bekannt ist: Gleichungssystem eindeutig lösbar $\Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\det \mathbb{A}} \alpha_{ij} b_j \\ &= \frac{1}{\det \mathbb{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}_{ji} b_j \\ &= \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \det \mathbb{A}_i \end{aligned}$$

$\mathbb{A}_i$ entsteht aus $\mathbb{A}$ durch Ersetzung der i-ten Spalte von $\mathbb{A}$ durch $\mathbb{b}$.

das heißt: Cramersche Regel zur Lösung von $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\det \mathbb{A} \neq 0$

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}_i$$

$\mathbb{A}_i$ entsteht aus $\mathbb{A}$ indem man die i-te Spalte von $\mathbb{A}$ ersetzt durch die rechte Seite $\mathbb{b}$.

?

Beispiel 6.20:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}, \ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{6}{4} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(-1) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 14 = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$$

$$x_3 = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (-2) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Idee: $f : V \to V$, V hat Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, V ist n- dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$$_BM_B(f) = (m_{ij}),\ f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} v_j,\ \text{Darstellungsmatrix von } f \text{ bezüglich } B$$

B so wählen, dass $_BM_B(f)$ einfach wird, zum Beispiel eine Diagonalmatrix.

Definition 7.1 (Diagonalmatrix)**:**
Eine Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ heißt **Diagonalmatrix**, falls gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{ii} & i = j \end{cases}$$

das heißt: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

Definition 7.2 (diagonalisierbare lineare Abbildung)**:**
Eine lineare Abbildung $f : V \to V$, $\dim V = n$ heißt diagonalisierbar genau dann wenn es eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V gilt, so dass gilt: $_BM_B(f)$ ist eine Diagonalmatrix.

Das heißt: $_BM_B(f) = \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & k_n \end{pmatrix}$ das heißt: $f(v_i) = k_i v_i$ muss in dieser Basis gelten.

Definition 7.3 (Eigenwert und Eigenvektor)**:**
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, V sei ein Vektorraum über $\mathbb{K}$
Eine Zahl $k \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von f, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt, mit folgenden Eigenschaften

1. $v \neq \vec{0}$
2. $f(v) = k \cdot v$

v heißt dann **Eigenvektor** zum Eigenwert k.

$$f(v) = k \cdot v \Leftrightarrow f(v) - k \cdot v = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{(f - k\,\mathrm{id})(v) = \vec{0}}_{\substack{\text{homogenes Gleichungssystem zur} \\ \text{Bestimmung von v. Wegen } v \neq \vec{0} \\ \text{muss es eine nichttriviale Lösung besitzen}}}$$

?

Beispiel 7.1:

1. $f = \mathrm{id}_V : \ \mathrm{id}_V(v) = v$ für alle $v \in V$
   $k = 1$ ist einziger Eigenwert; Eigenvektor ist jedes $v \in V$, $v \neq \vec{0}$
   $$\mathrm{id}_V(v) = v = \underbrace{1}_{k=1} \cdot v$$
2. $f(v) = \vec{0}$ für alle $v \in V$.
   $f(v) = 0 \cdot v \Rightarrow 0$ ist einziger Eigenwert,
   Eigenvektor sind alle $v \in V$, mit $v \neq \vec{0}$.
3. Seien U_1, U_2 zwei komplementäre Unterräume von V
   $P_1 : V \to U_1$ „Projektion von V entlang U_2 auf U_1“
   $v \in V : v = u_1 + u_2$ eindeutige Zerlegung $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$
   $P_1(v) = u_1$
   Sei $v \in U_1$: $v = v + \vec{0}$, $P_1(v) = v = 1 \cdot v$, das heißt P_1 hat den Eigenwert 1 und Eigenvektoren zu 1 sind alle Vektoren aus U_1 verschieden vom Nullvektor.
   Sei $v \in U_2$: $v = \vec{0} + v$, $P_1(v) = \vec{0} = 0 \cdot v \Rightarrow 0$ ist Eigenwert von P_1,
   Eigenvektoren sind alle Vektoren $\neq \vec{0}$ aus U_2
4. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$
   Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$
   Dann ist $f_{\mathbb{A}}(v_i) := \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k$ die $\mathbb{A}$ zugeordnete lineare Abbildung
   $\Rightarrow f_{\mathbb{A}}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \delta_{ki} v_k = a_{ii} v_i$
   $\Rightarrow a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sind Eigenwerte von $f_{\mathbb{A}}$

Satz 7.1:
Sei $f : V \to V$ lineare Abbildung.
Dann ist f genau dann injektiv, wenn 0 kein Eigenwert von f ist.

Beweis 7.1:
Sei f injektiv.
Dann gilt $\text{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$.
Es ist $\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = \vec{0} = 0 \cdot v\}$
Das heißt alle Eigenvektoren zum Eigenwert 0 liegen in $\text{Kern}(f)$.
Wegen $\text{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ gibt es somit keine Eigenvektoren zum Eigenwert $0 \Rightarrow 0$ ist kein Eigenwert.
Sei 0 kein Eigenwert von $f \Rightarrow$ es gibt kein $v \neq \vec{0}$: $f(v) = 0 \cdot v = \vec{0}$.
$\Rightarrow \text{Kern}(f) = \{\vec{0}\} \Rightarrow$ f ist injektiv.
$\square$

Satz 7.2:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n.
Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V gibt, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.

Beweis 7.2:
Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.
Für ${}_BM_B(f)$ ergibt sich:
$f(v_i) = k_i v_i \quad (i = 1, \ldots, n)$

$$\Rightarrow \ {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & k_n \end{pmatrix} \Rightarrow \ {}_BM_B(f) \text{ ist Diagonalmatrix}$$

Umgekehrt sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so dass ${}_BM_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

$$\Rightarrow f(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} v_k = m_{ii} v_i \Rightarrow v_1, \ldots v_n$$

sind Eigenvektoren von f zum Eigenwert $m_{11}, \ldots, m_{nn}$.

7.1 Eigenwerte von Matrizen

Definition 7.4 (Eigenwerte von Matrizen)**:**
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Eine Zahl $k \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von $\mathbb{A}$, wenn es einen n-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ gibt, so dass bezüglich einer Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Abbildung

$$f_{\mathbb{A}} : f_{\mathbb{A}}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \ (i = 1, \ldots, n)$$

den Eigenwert k besitzt.

Satz 7.3:
Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann gilt:
$k \in \mathbb{K}$ ist genau dann Eigenwert von $\mathbb{A}$, wenn es ein $\mathbb{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = k \cdot \mathbb{x}$, $\mathbb{x} \neq \vec{0}$ gibt.

Beweis 7.3:
Ist eine Übungsaufgabe.

7.2 Struktur von Eigenvektoren

Satz 7.4:
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer linearen Abbildung sind immer linear unabhängig.

Genauer: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $f : V \to V$ mit den Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ (also $f(v_i) \models \lambda_i v_i$) so sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

Beweis 7.4:
Vollständige Induktion nach m:
Induktionsanfang:
$m = 1$: $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $v_1 \neq 0 \Rightarrow \{v_1\}$ ist linear unabhängig
Induktionsvoraussetzung:
Seien $v_1, \ldots, v_{m-1}$ linear unabhängig.
Betrachten:

$$h_1 v_1 + \ldots + h_m v_m = \vec{0}$$

Zu zeigen: Einzige Lösung ist $h_1 = \ldots = h_m = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{0} &= f(\vec{0}) \\
&= f(h_1 v_1 + \ldots + h_m v_m) \\
&\overset{f \text{ linear}}{=} f_1 f(v_1) + \ldots + h_m f(v_m) \\
&\overset{f(v_i)=\lambda_i v_i}{=} h_1 \cdot \lambda v_1 + \ldots + h_m \cdot \lambda_m v_m
\end{aligned}$$

Weiter folgt aus $h_1 v_1 + \ldots + h_m v_m = \vec{0}$: $\vec{0} = \lambda_m \cdot \vec{0} = \lambda_m (h_1 v_1 + \ldots + h_m v_m)$
$\Rightarrow$ 2 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
h_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \underline{h_m \lambda_m v_m} &= \vec{0} \\
h_1 \lambda_m v_1 + \ldots + \underline{h_m \lambda_m v_m} &= \vec{0}
\end{aligned}\right] \cdot (-1)$$

$h_1(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \ldots + h_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} = \vec{0}$
Weil $v_1, \ldots, v_{m-1}$ nach Induktionsvoraussetzung linear unabhängig sind folgt als einzige Lösung:

$$h_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \ , \ h_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \ , \ \ldots \ , \ h_{m-1} \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow h_1 = 0, \ldots, h_{m-1} = 0$
$\Rightarrow h_m v_m = \vec{0}$. Wegen $v_m \neq \vec{0} \Rightarrow h_m = 0$
Also gilt die Behauptung auch für $v_1, \ldots, v_m$.
$\Rightarrow$ Satz ist bewiesen.
$\square$

Satz 7.5:
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $f : V \to V$ lineare Abbildung. Besitzt f n verschiedene Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Beweis 7.5:
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte mit Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ ($f(v_i) = \lambda_i v_i$).
Nach dem letzten Satz folgt: $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig. Weil $\dim V = n$ gilt, bilden somit $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Das heißt $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.
$\Rightarrow f$ ist diagonalisierbar.
$\square$

?

Beispiel 7.2:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \; f_{\mathbb{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; f_{\mathbb{A}}(\mathbb{x}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{x}$$

$$(f_{\mathbb{A}} - \lambda \,\mathrm{id})(\mathbb{x}) = \mathbb{A}\mathbb{x} - \lambda\mathbb{x} = \underbrace{(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})\mathbb{x}}_{\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \vec{0}$$

gesucht ist injektive Lösung:

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 2$ sind die einzigen Eigenwerte.
$n = 2$; 2 verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow f_{\mathbb{A}}$ ist diagonalisierbar

Eigenvektoren

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 = 0 &\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ (2x_1 + 2x_2 = 0) & \end{aligned}$$

Eigenvektor zu λ_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ (2x_1 - 2x_2 &= 0) \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Eigenvektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalgestalt von $f_{\mathbb{A}}$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

•

Definition 7.5 (Eigenraum)**:**
Sei $f : V \to V$, linear und λ ein Eigenwert von f. Der **Eigenraum** $E_\lambda(f)$ von f zum Eigenwert ist wie folgt definiert:

$$E_\lambda(f) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Bemerkung:
$E_\lambda(f) = \{\vec{0}\} \cup$ Menge aller Eigenvektoren

Satz 7.6:
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f.
Dann gilt:

1. $E_\lambda(f) = \operatorname{Kern}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$
2. $E_\lambda(f)$ ist ein Unterraum von V
3. Sei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f. Seien $E_{\lambda_i}(f)$ $(i = 1, \ldots, s)$ die zugehörigen Eigenräume.

   Sei B_i eine Basis von $E_{\lambda_i}(f)$ $(i = 1, \ldots, s)$

   $\Rightarrow B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$ ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.

Beweis 7.6: 1.

$$\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) - \lambda v = \vec{0}\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) - \lambda \operatorname{id}_V(v) = \vec{0}\} \\ &= \{v \in V \mid (f - \lambda \operatorname{id})(v) = \vec{0}\} \\ &= \operatorname{Kern}(f - \lambda \operatorname{id}_V) \end{aligned}$$

2. Folgt aus „1.“, da wir schon wissen, dass $\operatorname{Kern}(f - \lambda \operatorname{id}_v)$ ein Unterraum ist.
3. Sei $B_i = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_{n_i}^{(i)}\}$ die Basis B_i $(i = 1, \ldots, s)$

   Zu zeigen:

   $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$ ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.

   $$\text{Betrachten: } \sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{n_i} c_r^{(i)} v_r^{(i)} = \vec{0}$$

   Zu zeigen ist: Einzige Lösung ist $c_r^{(i)} = 0$ $(r = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, s)$

   $$v_i = \sum_{r=1}^{n_i} c_r^{(i)} v_r^{(i)} \quad \text{Es ist } v_r^{(i)} \in E_{\lambda_i}(f)\ (r = 1, \ldots, n_i)$$

   $\Rightarrow v_i \in E_{\lambda i}(f)$.

Damit lautet die Gleichung wie folgt:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_s = \vec{0} \quad \text{mit } v_i \in E_{\lambda i}(f)$$

$\Rightarrow v_1 = v_2 = \ldots = v_s = \vec{0}$ (nach Satz über die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten)

$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n_i} C_r^{(i)} v_r^{(i)} = \vec{0} \qquad (i = 1, \ldots, s)$

$v_1^{(i)}, \ldots, v_{ni}^{(i)}$ bilden Basis von $E_{\lambda i}(f) \Rightarrow c_r^{(i)} = 0 \quad r = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, s.$
Also ist $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren.
□

Satz 7.7 (1. Kriterium für Diagonalisierbarkeit)**:**
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, $\dim V = n$.
Dann gilt: f ist genau dann diagonalisierbar wenn die Summe der Dimensionen aller Eigenräume gleich n ist.

Beweis 7.7:
Sei f diagonalisierbar. Dann gibt es eine Basis von V aus Eigenvektoren von f. Jeder Eigenvektor von f liegt in einem Eigenraum von f.
Das heißt die Eigenräume erzeugen genau V. Daher ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume mindestens n. Weil $E_{\lambda_i}(f) \subseteq V$ folgt auch, die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist $\leq n$.
$\Rightarrow$ Die Summe der Eigenräume ist gleich n.
Sei nun umgekehrt die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich n. Seien $B_1, \ldots, B_s$ Basen von allen Eigenräumen. $E_{\lambda_i}(f)(i = 1, \ldots, s)$. Sei $n_i = \dim B_i(i = 1, \ldots, s)$.
Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = n$$

Nach dem letzten Satz ist $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus V. Diese Menge besteht aus genau n Vektoren (wegen $n = \sum_{i=1}^{s} n_i$).
n linear unabhängige Vektoren aus V bilden eine Basis von V.
Das heißt $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$ bildet eine Basis von V, die nur aus Eigenvektoren von f besteht. Das heißt f ist diagonalisierbar
□

Damit haben wir eine Strategie zur Entscheidung darüber, ob eine lineare Abbildung $f : V \to V$ diagonalisierbar ist oder nicht:

1. Bestimmung aller Eigenwerte von f
2. Bestimmung aller Dimensionen der Eigenräume von f
3. Kontrolle, ob die Summe aller dieser Dimensionen gleich n ist ($\Rightarrow$ f ist diagonalisierbar) oder ungleich n ist ($\Rightarrow$ f nicht diagonalisierbar)

?

Beispiel 7.3:
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\mathbb{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f_{\mathbb{A}}(\mathbb{x}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{x}$

Eigenwerte und Eigenvektoren erfüllen: $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})\mathbb{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0$$

das heißt $\lambda = 0$ ist einziger Eigenwert.
Bestimmung von Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
das heißt allgemeine Lösung des System ist

$$E_0(f_{\mathbb{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim E_0(f_{\mathbb{A}}) = 1 < 2 = n$$

$\Rightarrow f_{\mathbb{A}}$ ist nicht diagonalisierbar.

7.3 Das charakteristische Polynom

!

Satz 7.8 (Hilfssatz)**:**
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und B eine Basis von V. Sei ${}_BM_B(f)$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich B. Dann gilt:
Die Eigenwerte von f sind genau die $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$\det(\,{}_BM_B(f) - \lambda\mathbb{E}_n) = 0$$

□

Beweis 7.8:

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ Eigenwert von } f &\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\vec{0}\} \\
&\Leftrightarrow f - \lambda\,\mathrm{id} \text{ ist nicht injektiv} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{rk}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) < n \\
&\Leftrightarrow \det(\,{}_B M_B(f - \lambda\,\mathrm{id})) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\,{}_B M_B(f) - \lambda\,{}_B M_B(\mathrm{id}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\,{}_B M_B(f) - \lambda \mathbb{E}_n) = 0
\end{aligned}$$

□

Definition 7.6:
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, $\dim V = n$ mit B eine Basis von V.
Dann heißt $\chi_f(x) = \det(\,{}_B M_B(f) - x\,\mathbb{E}_n)$ das charakteristische Polynom von f (bezüglich der Basis B)

Beispiel 7.4:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f_{\mathbb{A}}(\mathbb{x}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{x} \quad B = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ kanonische Basis}$$

$$\Rightarrow \; {}_B M_B(f_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{f_{\mathbb{A}}}(x) &= \det(\mathbb{A} - x\mathbb{E}_n) \\
&= \det\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)(1-x)(1-x) \\
&= (1-x)^3
\end{aligned}$$

das heißt $\chi_{f_{\mathbb{A}}}(x) = (1-x)^3$ ist das charakteristische Polynom von $f_{\mathbb{A}}$.

Allgemein:

$$\det(\mathbb{M} - x\mathbb{E}_n) = \begin{vmatrix} m_{11} - x & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - x & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} - x \end{vmatrix}$$

Nach der Leibniz'schen Determinantenformel wird dies ein Polynom von x.
Es folgt:

1. Grad $\chi_f(x) = n$
2. $\chi_f(x) = (-1)^n x^n$ + niedrigere Ordnungsterme

?

Beispiel 7.5:

1. $f = \text{id} \quad {}_B M_B(f) = \mathbb{E}_n \; \chi_f(x) = |\mathbb{E}_n - x\mathbb{E}_n| = (1-x)^n$
2. $f =$ Nullabbildung, das heißt $f(v) = \vec{0}$ für alle $v \in V$.
   ${}_B M_B(f) = \mathbb{0}$

   $$\chi_f(x) = |\mathbb{0} - x\mathbb{E}_n| = (-x)^n$$

!

Satz 7.9 (Hilfssatz)**:**
Sei $f : V \to V$ lineare Abbildung mit den Darstellungsmatrizen ${}_B M_B(f) = \mathbb{M}$ und ${}_{B'} M_{B'}(f) = \mathbb{M}'$
Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\chi(x) = \det(\mathbb{M} - x\mathbb{E})$$
$$\chi'(x) = \det(\mathbb{M}' - x\mathbb{E})$$

und es ist $\chi(x) = \chi'(x)$ für alle x

□

Beweis 7.9:
Nach einem früheren Satz gibt es eine reguläre Matrix: $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\mathbb{M}' = S^{-1}\, \mathbb{M}\, S$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \chi'(x) &= \det(\mathbb{M}' - x\mathbb{E}) \\
&= \det(S^{-1}\mathbb{M}S - x\mathbb{E}) \\
&= \det\left(S^{-1}(\mathbb{M}S - x\underbrace{S\mathbb{E}}_{S})\right) \\
&= \det S^{-1}(\mathbb{M}S - xS) \\
&= \det\left\{S^{-1}(\mathbb{M} - x\underbrace{SS^{-1}}_{\mathbb{E}_n}S\right\} \\
&= \det(S^{-1}(\mathbb{M} - x\mathbb{E})S) \\
&= \det S^{-1} \cdot \det(\mathbb{M} - x\mathbb{E} \cdot \det S \\
&= \frac{1}{\det S} \cdot \chi(x) \cdot \det S \\
&= \chi(x)
\end{aligned}
$$

□

Das heißt das charakteristische Polynom ist unabhängig von der Darstellungsmatrix.

Satz 7.10:
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_f(x)$ sind genau die Eigenwerte von f.

Beweis 7.10:
λ ist Eigenwert von $f \Leftrightarrow \det({}_BM_B(f) - \lambda\mathbb{E}) = 0 \Leftrightarrow \chi_f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle von χ_f.
□

$f : V \to V$, linear, $\dim V = n$ χ_f: charakteristische Polynom Dann ist M irgendeine Darstellungsmatrix von f

$$\chi_f(x) = \det(M - x\mathbb{E}_n)$$

Nullstelle von χ_f in $\mathbb{K}$ sind die Eigenwerte von f über $\mathbb{K}$.

7.3.1 Strategie zur Bestimmung der Eigenwerte von f

1. Aufstellung von χ_f (trivial)
2. Bestimmung der Nullstellen von χ_f

7.3.2 Nullstellen von Polynomen

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
$\operatorname{Grad} p = n \Leftrightarrow a_n \neq 0$
$\mathbb{K}[x]$ – Vektorraum aller Polynome in x mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$. Auch Multiplikation von Polynomen möglich.

Division mit Rest

$h, g \in \mathbb{K}$, g sei nicht das Nullpolynom.
Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{K}[x]$, so dass gilt

$$h = q \cdot g + r$$

und es gilt:

$$\operatorname{Grad}(r) < \operatorname{Grad}(g) \quad \text{(oder } r \text{ ist das Nullpolynom)}$$

Durchführung mittels Polynomdivision

$h(x) = 2x^5 - x^3 + 3x^2 + 1$ und $g(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$ es sollen q und r berechnet werden:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(\,2x^5 & & -\ x^3 + & 3x^2 + & 1\ ) & \div\,(\,2x^3 - x^2 + 2x - 3\,) = \mathbf{x^2 + {}^1\!/_2 x - {}^5\!/_3} \\
-(\,2x^5 & -\ x^4 + & 2x^3 - & 3x^2\ ) & & \\
\hline
 & x^4 - & 3x^3 + & 6x^2 + & 1 & \\
 & -(\,x^4 - {}^1\!/_2 x^3 + & & x^2 - {}^3\!/_2 x\ ) & & \\
\hline
 & & -\,{}^5\!/_2 x^3 + & 5x^2 + {}^3\!/_2 x + & 1 & \\
 & & -(\,-\,{}^5\!/_2 x^3 + & {}^5\!/_4 x^2 - {}^5\!/_2 x + {}^{15}\!/_4\,) & & \\
\hline
 & & & {}^{15}\!/_4 x^2 + & 4x - {}^{11}\!/_4 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^5 - x^3 + 3x^2 + 1 = \underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right)}_{q(x)} \cdot (2x^3 - x^2 + 2x - 3) + \underbrace{\frac{15}{4}x^2 + 4x - \frac{11}{4}}_{r(x)}$$

„h ist teilbar durch q, wenn gilt r ist das Nullpolynom“

Folgerung 7.1:
Sei $h \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom mit der Nullstelle $k \in \mathbb{K}$.
Dann gilt $h(x) = q(x) \cdot (x - k)$ mit $q \in \mathbb{K}[x]$. Das heißt h ist durch $(x - k)$ teilbar.

Beweis 7.11:
Nach der Division mit Rest gilt:

$$h(x) = q(x)(x-k) + r(x)$$
$$\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(x-k) = 1$$

Das heißt entweder ist r das Nullpolynom oder $\mathrm{Grad}\, r = 0$. Im zweiten Fall gilt $r(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{K},\ a \neq 0$.

$$\Rightarrow h(x) = q(x)(x-k) + a$$

für alle x.

$$x := k \Rightarrow 0 = q(x)(k-k) + a \Rightarrow a = 0$$

Das heißt $\mathrm{Grad}\, r = 0$ ist nicht möglich.
$\Rightarrow r$ ist das Nullpolynom
$\square$

Dies ermöglicht es eventuell Nullstellen zu berechnen.

Polynom 3. Grades:
Alle Nullstellen mittels Wurzeln berechenbar

Polynom 4. Grades:
Alle Nullstellen mittels Wurzeln berechenbar

Polynom 5. Grades:
Im Allgemeinen sind die Nullstellen nicht mittels Wurzeln berechenbar.
Möglichkeit: Eine Nullstelle erraten, dann $q(x)$ ausrechnen aus

$$h(x) = q(x)(x-k) \quad (\mathrm{Grad}\, q = \mathrm{Grad}\, h - 1)$$

Jetzt die Nullstelle von q bestimmen.

Definition 7.7 (Vielfachheit einer Nullstelle)**:**
Sei $h \in \mathbb{K}[x]$ und keine Nullstelle von h.
Sei $\nu \in \mathbb{N}$ wie folgt bestimmt:

$$h(x) = q(x) \cdot (x-k)^{\nu} \qquad \text{mit } q(k) \neq 0\ q \in \mathbb{K}[x]$$

Dann heißt ν die Vielfachheit der Nullstelle k. (Gelegentlich: k hat die Vielfachheit $0 \Leftrightarrow k$ ist keine Nullstelle von h.)

⇒ **Folgerung 7.2:**
Sei $h \in \mathbb{K}[x]$ mit den paarweise verschiedenen Nullstellen $k_1, k_2, \ldots, k_r$ der Vielfachheiten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ und $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$h(x) = (x - k_1)^{\nu_1} \cdot (x - k_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (x - k_r)^{\nu_r} \cdot q(x)$$

mit $q(k_j) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, r)$

⇒ **Folgerung 7.3:**
Sei $h \in \mathbb{K}[x]$ und $\operatorname{Grad} h = n$, dann besitzt h **höchstens** n (verschiedene) Nullstellen in $\mathbb{K}$

Es ist möglich, dass h **keine** Nullstellen besitzt in $\mathbb{K}$

? **Beispiel 7.6:**

$$h(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$$

hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$!

7.4 Fundamentalsatz der Algebra

! **Satz 7.11:**
Sei $h \in \mathbb{C}[x]$. Dann besitzt h eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

⇒ **Folgerung 7.4:**
Sei $h \in \mathbb{C}[x]$ und h nicht das Nullpolynom, $\operatorname{Grad} k = n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{C}$ (paarweise verschieden)
$\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{r} \nu_j = n$, so dass gilt:

$$h(x) = (x - k_1)^{\nu_1} \cdot (x - k_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (x - k_r)^{\nu_r} \cdot a \qquad (a \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$$

Bemerkung:
Sei $h \in \mathbb{R}(x) \Rightarrow h(x) = a \cdot (x - k_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x - k_r)^{\nu_r}$ ($k_i \in \mathbb{C}$ alle paarweise

verschieden)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{h(x)} &= h(x)\\ &= \overline{a}\cdot\overline{(x-k_1)}^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\overline{(x-k_r)}^{\nu_r}\\ &= a(x-\overline{k_1})^{\nu_1}\cdot(x-\overline{k_2})^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot(x-\overline{k_r})^{\nu_r}\end{aligned}$$

Das heißt, ist k_j eine Nullstelle des reellen Polynoms dann folgt, dass auch $\overline{k_j}$ eine Nullstelle dieses reellen Polynoms ist.
Keine neue Information bei $k_j \in \mathbb{R}$ wegen $k_j = \overline{k_j}$
Aber falls $k_j = \alpha + \beta_i$ ist, $\beta \neq 0$ dann folgt: $\overline{k_j} = \alpha - \beta_i$ ist auch Nullstelle.
$\overline{k_j}$ hat die selbe Vielfachheit wie k_j

?

Beispiel 7.7:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\begin{aligned}\det M - x\mathbb{E}_2 &= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}\\ &= (m_{11}-x)(m_{22}-x) - m_{12}\cdot m_{21}\\ &= x^2 - (m_{11}+m_{22})x + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}\\ &= 0\end{aligned}$$

3 Möglichkeiten:

1. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ sind Nullstellen $\Rightarrow$ 2 verschiedene reelle Eigenwerte
2. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2$ sind Nullstellen, das heißt eine Nullstelle der Vielfachheit 2
   $\Rightarrow$ 1 Eigenwert, reell
3. $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$
   $\Rightarrow x_2 = \overline{x_1}$
   keine reellen Eigenwerte. Betrachtet man aber $M \in \mathbb{C}^{2\times 2} \Rightarrow$ 2 komplexe Eigenwerte $x_1, \overline{x_1}$.

?

Beispiel 7.8:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$
$$= 0$$

$\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i = \bar{i}$ sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Satz 7.12 (Koeffizienten des charakteristischen Polynoms)**:**
Sei $f : V \to V$ lineare Abbildung, $\dim V = n$, V sei Vektorraum über $\mathbb{K}$, dann gilt:

1. χ_f hat den Grad n
2. $\chi_f(x) = (-1)^n x^n +$ Terme niedriger Ordnung
3. $\chi_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn})x^{n-1} +$ Terme niedriger Ordnung
4. $\chi_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn})x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \det \mathbb{M}$ wobei $\mathbb{M} = \big(m_{ij}\big)$ eine Darstellungsmatrix von f ist

Bemerkung zu „4.“:

$\chi_f(x) = \det(\mathbb{M} - x\mathbb{E}_n) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

$x = 0$: $\chi_f(0) = a_0 = \det(\mathbb{M} - 0 \cdot \mathbb{E}_n) = \det \mathbb{M}$.

Nullstellen erraten: Nullstellen teilen das Absolutglied des charakteristischen Polynoms.

7.5 Wir drehen die Zeit zurück zur Diagonalisierbarkeit

Satz 7.13:
Sei λ ein Eigenwert von $g : V \to V$, $\dim V = n$.
Sei $\dim \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ die Dimension des Eigenraumes von f zum Eigenwert λ.
Sei $\nu(f, \lambda)$ die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms von f.
Dann gilt:

$$\dim \operatorname{Eig}(f, \lambda) \leq \nu(f, \lambda)$$

Beweis 7.12:
Sei $d = \dim \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, sei $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V.
Sei $\mathbb{M}$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich dieser Basis.

$$\Rightarrow \mathbb{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} \overbrace{\lambda & 0 & \ldots & 0}^{d \text{ Spalten}} & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbb{M}' \end{array}\right) \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} d \text{ Zeilen} \qquad (\mathbb{M} \in \mathbb{K}^{(d+1)\times(d+1)})$$

$$\det(\mathbb{M} - x\mathbb{E}_n) = \begin{vmatrix} \lambda - x & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda - x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}' - x\mathbb{E}_{n-d} \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - x)^d \cdot \det(\mathbb{M}' - x\mathbb{E}_{n-d})$$

$\Rightarrow$ die Vielfachheit der Nullstelle λ ist mindestens d.
$\Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(f, \lambda) \leq \nu(f, \lambda)$
$\square$

Definition 7.8:
Die Zahl $\dim \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit von λ
Die Zahl $\nu(f, \lambda)$ heißt algebraische Vielfachheit von λ
Nach dem Satz gilt: geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Satz 7.14 (2. Kriterium über Diagonalisierbarkeit)**:**
Sei $f : V \to V$, lineare Abbildung, $\dim V = n$, V sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum,
dann gilt:
f ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

1. Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren, das heißt:

$$\chi_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)_1^{\nu} (x - \lambda_2)^{\nu_2} \ldots (x - \lambda_r)^{\nu_r}$$

mit $\sum_{j=1}^{r} \nu_j = n$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$

2. Es gilt für jeden Eigenwert λ von f:

$$\dim \operatorname{Eig}(f, \lambda) = \nu(f, \lambda)$$

das heißt für jeden Eigenwert ist die geometrische Vielfachheit gleich der allgemeinen Vielfachheit.

Beweis 7.13:
Sei f diagonalisierbar (bereits gezeigt).
$\Rightarrow$ „1.“ und „2.“ gelten. Gelte nun „1.“ und „2.“.

Dann gibt es mit Vielfachheit gezählt genau n Eigenwerte. Wegen „2.“ gibt es zu jedem Eigenwert λ $\nu(f, \lambda)$ linear unabhängige Eigenfunktionen, das heißt es gibt insgesamt n linear unabhängige Eigenfunktionen von f, diese bilden eine Basis von V aus Eigenvektoren, das heißt f ist diagonalisierbar.
$\square$

Aus $\sum_{j=1}^{r} \dim E(f, \lambda_j) = n$, $\sum_{j=1}^{r} \nu(f, \lambda_j) = n$ und $\dim E(f, \lambda_j) \leq \nu(f, \lambda_j)$ folgt:

$$n = \sum_{j=1}^{r} \dim E(f, \lambda_j) \leq \sum_{j=1}^{r} \nu(f, \lambda_j) = n$$
$$\Rightarrow \dim E(f, \lambda_j) = \nu(f, \lambda_j) \quad (j = 1, \ldots, r)$$

Beispiel 7.9:
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, Bestimmung des charakteristischen Polynoms.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}(x) = \det(\mathbb{A} - x\mathbb{E}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \qquad + (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad + (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\big\{ -(1-1+\lambda) \qquad + (\lambda^2 - \lambda - 4 + 2\lambda)\big\} \\
&= (2-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 + \lambda - 4) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) \\
&= (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-2) \\
&= -(\lambda-2)^2(\lambda+2)
\end{aligned}
$$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \nu(\mathbb{A}, \lambda_1) = 1,\ \nu(\mathbb{A}, \lambda_2) = 2$

geometrische Vielfachheit: $1 \leq \dim \operatorname{Eig}(\mathbb{A}, \lambda_1) \leq \nu(\mathbb{A}, \lambda_1) = 1$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(\mathbb{A}, \lambda_1) = 1$

Eigenraum zu λ_2 muss berechnet werden: $(\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{E}) = \vec{0}$

$$
\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{E} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Berechnen $\operatorname{rk}(\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{E})$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rk}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
n = 3 = \operatorname{rk}(\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{E}) + \dim \underbrace{\operatorname{Kern}(\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{E})}_{\operatorname{Eig}(\mathbb{A},\lambda_2)} \Rightarrow 3 = 2 + \dim \operatorname{Eig}(\mathbb{A}, \lambda_2)
$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(\mathbb{A}, \lambda_2) = 1 < \nu(\mathbb{A}, \lambda_2) = 2$

$\Rightarrow \mathbb{A}$ nicht diagonalisierbar

8 Längen- und Winkelmessung in Vektorräumen

8.1 Skalarprodukte über reellen Vektorräumen

Idee: Wollen in reellen Vektorräumen eine Winkel- und Längenmessung einführen.

Definition 8.1:
Sei V ein reeller Vektorraum. Ein Skalarprodukt über V ist eine bilineare Abbildung $\langle \cdots, \cdots \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:
Symmetrisch:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \qquad (\forall v, w \in V)$$

Bilinear: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V$ gilt:

$$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle \quad \text{(Linearität in der 1. Komponente)}$$
$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle \quad \text{(Linearität in der 2. Komponente)}$$

Beispiel 8.1:

$$V = \mathbb{R}^n \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^{\perp} \cdot w$$

Definition 8.2 (Euklidischer Raum)**:**
Ein reeller Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle \cdots, \cdots \rangle$ heißt **Euklidischer Raum**, $\mathbb{E} = (V, \langle \cdots, \cdots \rangle)$.

Definition 8.3 (Norm)**:**
Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Norm $\|\cdots\|$ auf V ist eine Abbildung $\|\cdots\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $v \in V$
3. Dreiecksungleichung:
   $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$

Beispiel 8.2:

$\mathbb{R}^n, \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ „Längenmessung“

übliche Längenmessungen werden in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ durchgeführt.

Wir wollen zeigen: Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm.

Satz 8.1 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)**:**
Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ Dann gilt:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \text{ für alle } v, w \in V$$

Beweis 8.1:

1. Betrachte den Fall $w = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} |\left\langle v, \vec{0} \right\rangle| = 0 \\ \|\vec{0}\| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |\left\langle v, \vec{0} \right\rangle| = \|v\| \cdot \|\vec{0}\| \quad (\forall v \in V)$$

   Das heißt für $w = \vec{0}$ gilt die Ungleichung.

2. Sei $w \neq \vec{0}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{R}$, alle $v, w \in V, w \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v - kw, v - kw \rangle &= \langle v, v - kw \rangle + \langle -kw, v - kw \rangle \\ &= \langle v, v - kw \rangle - k \langle w, v - kw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, -kw \rangle - k \langle w, v \rangle - k \langle w, -kw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - k \langle \underline{v, w} \rangle - k \langle \underline{w, v} \rangle + k^2 \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2k \langle v, w \rangle + k^2 \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

Das heißt es gilt für alle $v, w \in V, k \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle v, v \rangle - 2k \langle v, w \rangle + k^2 \langle w, w \rangle$$

Wähle $k = \frac{\langle v,w \rangle}{\langle w,w \rangle}$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle v, v \rangle - 2\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle^{\cancel{2}}} \cancel{\langle w, w \rangle} \forall v, w \in V, w \neq \vec{0}$$

Multiplizieren mit $\langle w, w \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - 2 \langle v, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \\
&\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \\
&\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \\
&\sqrt{\langle v, w \rangle^2} \leq \|v\| \ \|w\| \\
&\Rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \ \|w\| \qquad (\text{da } \sqrt{a^2} = |a|)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Die Gleichheit in $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ gilt genau dann, wenn v, w linear abhängig sind.

Beweis 8.2:

Gleichheit am Schluss des Beweises gilt genau dann, wenn sie im 1. Schritt gilt, das heißt, wenn gilt:

$$0 = \langle v - kw, v - kw \rangle$$

Das heißt genau dann wenn, $v - kw = \vec{0}, w \neq 0$ oder $w = \vec{0}$ gilt.

Satz 8.2:

Sei $(V, \langle \cdots, \cdots \rangle)$ eine Euklidischer Raum. Dann wird durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V definiert.

Beweis 8.3:
$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}$ und $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\geq 0}} \Rightarrow \|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.

Sei $v = \vec{0} : \|\vec{0}\| = \sqrt{\left\langle \vec{0}, \vec{0} \right\rangle} = \sqrt{0} = 0$

Sei nun

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\| = 0 \Rightarrow 0 &= \sqrt{\langle v, v\rangle} && \mid ()^2 \\ \Rightarrow 0 &= \langle v, v\rangle \Rightarrow v = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle v, v\rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle v, v\rangle} \\ &= |\lambda| \, \|v\| \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, alle $v \in V$.

Zu zeigen bleibt noch die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \end{aligned}$$

Es ist $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle v, w\rangle \leq \|v\| \cdot \|w\| \\ &\Rightarrow \|v + w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 && \mid \sqrt{} \\ &\qquad = \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \\ &\qquad (\forall v, w \in V) \end{aligned}$$

□

Definition 8.4:
Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein Euklidischer Raum und sei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$
Dann heißt diese Menge eine Menge von **orthogonalen** Vektoren genau dann,

wenn gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

Eine orthogonale Menge heißt **orthonormal** genau dann wenn zusätzlich gilt:

$$\|v_i\| = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Das heißt $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$ („v und w stehen senkrecht aufeinander“)

Bemerkung:

Der einzige Vektor, der auf allen Vektoren von V senkrecht steht, ist der Nullvektor.

Denn: $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in V \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$

Satz 8.3:

Sei $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V \backslash \{\vec{0}\}$ eine Menge von orthogonalen Vektoren. Dann sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

Beweis 8.4:

$k_1 \cdot v_1 + \ldots + k_m \cdot v_m = \vec{0} \quad | \langle \cdots, v_i \rangle$

$$= \langle k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m, v_i \rangle = \left\langle \vec{0}, v_i \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \langle v_1, v_i \rangle + k_2 \langle v_2, v_i \rangle + \ldots + k_m \langle v_m, v_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow k_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow k_i = 0$$

$(i = 1, \ldots, m) \Rightarrow$ alle $k_1, \ldots, k_m$ müssen 0 sein $\Rightarrow v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig.
$\square$

Folgerung 8.1:
Sei $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V \backslash \{\vec{0}\}$ eine Menge von orthogonalen Vektoren. Dann ist $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_m}{\|v_m\|}\right\}$ eine orthogonale Menge.

$$\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \|v_i\| = 1$$

und

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \frac{1}{\|v_j\|} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{0 \text{ bei } i \neq j} = 0$$

□

Definition 8.5 (Orthonormalbasis)**:**
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum.
Eine Orthonormalbasis B von V ist eine Basis B von V die gleichzeitig eine orthonormale Menge ist.

Beispiel 8.3:

$\mathbb{R}^n$, kanonische Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \mathbb{v}^T \cdot \mathbb{w}$

$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ für alle } i \neq j \\ 1 \text{ für alle } i = j \end{cases}$ das heißt $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist bezüglich des kanonischen Skalarproduktes eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ (**ONB**).

Beweis 8.5:
Besitzt jeder reelle, n-dimensionaler, euklidischer Raum eine Orthonormalbasis?
Wir zeigen: Ist $B_{m-1} = \{w_1, \ldots, w_{m-1}\}$ eine orthonormale Menge von $\mathbb{E}_n$ so gilt immer ein $w_m \in \mathbb{E}_n : B_m = B_{m-1} \cup \{w_m\}$ ist eine orthonormale Menge, solange $m \leq n$ ist.

m = 1:
Wähle $v_1 \neq \vec{0}, v_1 \in \mathbb{E}_n \Rightarrow \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}\right\}$ ist eine orthonormale Menge.
Wähle $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Falls $n = 1$ ist, so bildet $\{w_1\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{E}_1$
Sei nun $n \geq 2$.
Sei v_2 ein zu w_1 linear unabhängiger Vektor. Dieser existiert weil $\dim \mathbb{E}_1 \geq 2$
Betrachte $x = k_i w_1 + v_1$ und versuche $k \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass gilt $\langle w_1, x\rangle = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \langle w_1, x\rangle = \langle w_1, k_1 w_1 + v_1\rangle = k_1 \underbrace{\langle w_1, w_1\rangle}_{=1} + \langle w_1, v_1\rangle = k_1 + \langle w_1, v_1\rangle$$

Wähle daher $k_1 = -\langle w_1, v_1\rangle$ und es folgt $\langle w_1, x\rangle = 0$. Es ist $x \neq 0$, denn sonst wäre $0 = k_1 w_1 + v_1$ mit linear unabhängigen v_1, w_1.

$$\Rightarrow w_2 = \frac{x}{\|x\|} \perp w_1$$

und es gilt $\|w_1\| = 1, \|w_2\| = 1 \Rightarrow \{w_1, w_2\}$ ist eine orthogonale Menge.
Für $n = 2$ bildet daher $\langle w_1, w_2\rangle$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{E}_2$.

Sei nun $n \geq 3$. Dann gibt es einen Vektor $v_3 \in \mathbb{E}_n : w_1, w_2, v_3$ sind linear unabhängig. (weil $\dim \mathbb{E}_n \geq 3$)
Ansatz: $x = k_1 w_1 + k_2 w_2 + v_3$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sind so zu bestimmen, dass gilt: $\langle x, w_1\rangle = 0$; $\langle x, w_2\rangle = 0$

Das heißt

$$\begin{aligned}
\langle x, w_1\rangle = 0 &= \langle k_1 w_1 + k_2 w_2 + v_3, w_1\rangle \\
&= k_1 \underbrace{\langle w_1, w_1\rangle}_{1} + k_2 \underbrace{\langle w_2, w_1\rangle}_{0} + \langle v_3, w_1\rangle \\
\Rightarrow 0 &= k_1 + \langle v_3, w_1\rangle
\end{aligned}$$

Wähle $k_1 = -\langle w_1, v_3\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x, w_2\rangle = 0 &= \langle k_1 w_1 + k_2 w_2 + v_3, w_2\rangle \\
&= k_1 \underbrace{\langle w_1, w_2\rangle}_{=0} + k_2 \underbrace{\langle w_2, w_2\rangle}_{=1} + \langle v_3, w_2\rangle \\
\Rightarrow 0 &= k_2 + \langle w_2, v_3\rangle \\
\Rightarrow k_2 &= -\langle w_2, v_3\rangle
\end{aligned}$$

und es war $k_1 = -\langle w_1, v_3\rangle$

Wählt man k_1, k_2 auf diese Weise, $\Rightarrow x \perp w_1, x \perp w_2$.

Außerdem ist $x \neq \vec{0}$, weil w_1, w_2, v_3 linear unabhängig sind.
Wähle $w_3 = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ ist eine orthonormale Menge.
Für $n = 3$ bildet $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Orthonormalbasis.
Für $n \geq 4$ kann man das Verfahren identisch fortsetzen.
Allgemein: eine Menge von $(m-1)$ orthonomalen Vektoren in $\mathbb{E}_n$, $n \geq m$
Ansatz:

$$x = k_1 w_1 + \ldots + k_{m-1} w_{m-1} + v_m$$

und v_m ist linear unabhängig von $w_1, \ldots, w_{m-1}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k_i = -\langle w_i, v_i \rangle \quad (i = 1, \ldots, m-1) \\
&\Rightarrow x \perp w_i \qquad (i = 1, \ldots, m-1),\ x \neq \vec{0} \\
&\Rightarrow w_m = \frac{x}{\|x\|},\ \{w_1, \ldots, w_m\}
\end{aligned}$$

ist orthonormale Menge.
Das Verfahren endet, wenn kein linear unabhängiger Vektor mehr zu finden ist, also wenn $m = n$ ist.

Dieses Verfahren nennt sich **Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren**

Folgerung 8.2:
Man kann jede Menge von orthonormalen Vektoren zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Insbesondere kann man jeden Einheitsvektor $\mathbb{v}$ mit $\|\mathbb{v}\| = 1$ zu einer Orthonormalbasis ergänzen

8.2 Winkelmessung

$\mathbb{E}_n$, n-dimensionaler euklidischer Vektorraum
$v, w \in \mathbb{E}_n$
Definieren den Winkel φ zwischen v und w durch:

$$(*) \quad \cos\varphi := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}, \quad 0 \leq \varphi\pi, \quad v \neq \vec{0}, w \neq \vec{0}$$

Cauchy-Schwarz:

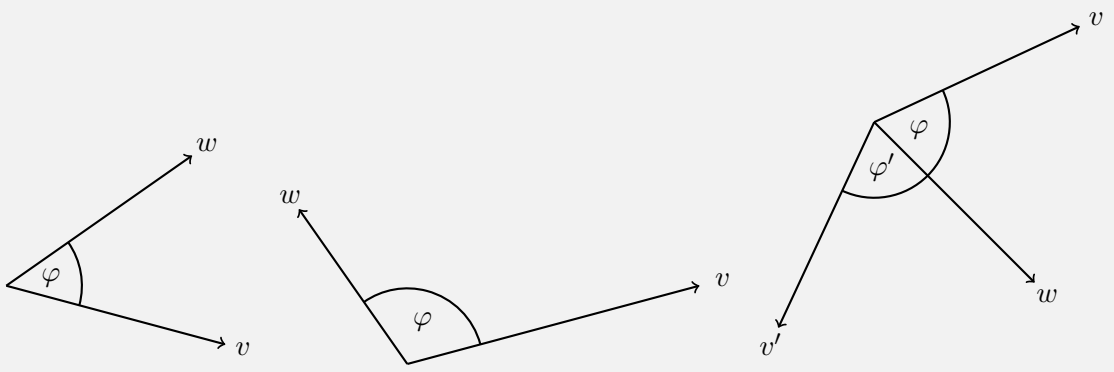
$$
\begin{aligned}
&|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \\
&\Rightarrow \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1 \\
&\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1
\end{aligned}
$$

das heißt aus $(*)$ ist φ eindeutig definiert für alle $v, w \neq \vec{0}$

$$
\begin{aligned}
v \perp w &\Rightarrow \langle v, w\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \cos\varphi = 0 \\
&\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ
\end{aligned}
$$

?

Beispiel 8.4:



Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist, bildet dies den üblichen Winkel.

Längenmessung im $\mathbb{R}^n$ mit $\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

$$
\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}}
$$

$P = (p_1, \ldots, p_n),\ Q = (q_1, \ldots, q_n)$: Ortsvektoren $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

Abstand von P und Q: $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\|$

$$= \left\| \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2}$$

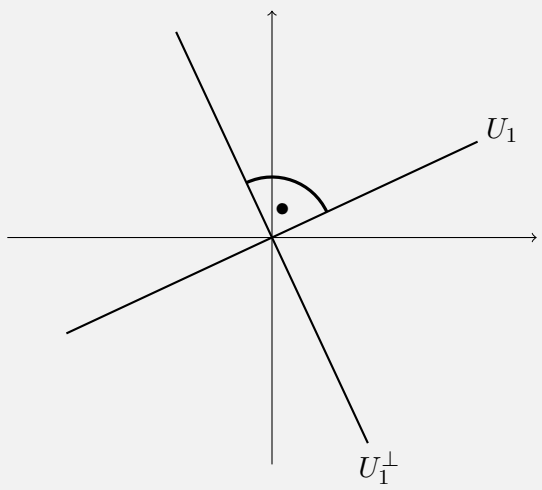
Wählt man $n = 2$ oder $n = 3$: Üblicher Abstand im $\mathbb{E}_2$, $\mathbb{E}_3$.

8.3 Orthogonale Unterräume

Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein euklidischer Raum.

Definition 8.6:
$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ *„U senkrecht“*
Das heißt $U^\perp$ besteht aus allen Vektoren von V, die senkrecht auf allen Vektoren von U stehen.

Beispiel 8.5 ($\mathbb{R}^2$)**:**



Satz 8.4:
$U^\perp$ ist ein Unterraum von V.

Beweis 8.6:

1. Es ist $\left\langle \vec{0}, u \right\rangle = 0$ für alle $u \in U \Rightarrow \vec{0} \in U^{\perp} \neq \emptyset$

2. Sei $v \in U^{\perp}$. Dann gilt $\langle v, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.
   $\Rightarrow k \langle v, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$
   $\Rightarrow \langle k \cdot v, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.
   $\Rightarrow k \cdot v \in U^{\perp}$ für jedes $k \in \mathbb{R}$.

3. Sei $v, w \in U^{\perp} \Rightarrow \langle v, u \rangle = 0, \langle w, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.
   $\Rightarrow \langle v, u \rangle - \langle w, u \rangle = 0$ für alle $u \in U \Rightarrow \langle v - w, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$
   $\Rightarrow v - w \in U^{\perp}$. Nach Unterraumkriterium $\Rightarrow U^{\perp}$ ist Unterraum von V.

□

Satz 8.5:
Es gilt:

$$U \cap U^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

Beweis 8.7:
Sei $w \in U \cap U^{\perp}$. Dann gilt $w \in U$ und und $w \in U^{\perp}$. Daraus folgt:

$$\langle w, w \rangle = 0 \Rightarrow w = \vec{0}$$
$$\Rightarrow U \cap U^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

□

Definition 8.7:
Sei $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ eine Basis des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}_n$ Dann heißt diese Matrix $G = (g_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$ die Gram'sche Matrix dieser Basis.

Satz 8.6:
Es gilt: $\mathrm{rk}(G) = n$.

Beweis 8.8 (indirekt)**:**
Angenommen, es wäre $\operatorname{rk}(G) < n$. Dann sind die Zeilen von G linear abhängig. Das heißt es gibt eine nichttriviale Linearkombination der Zeilen, die die Nullzeile liefert.

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \langle v_n, v_3\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

Damit existieren $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, die nicht alle 0 sind, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & k_1(\langle v_1, v_1\rangle\ , \langle v_1, v_2\rangle\ , \ldots, \langle v_1, v_n\rangle) \\ + & k_2(\langle v_2, v_1\rangle\ , \langle v_2, v_2\rangle\ , \ldots, \langle v_2, v_n\rangle) \\ + & \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , \ldots, \quad \ldots \\ + & k_n(\langle v_n, v_1\rangle\ , \langle v_n, v_2\rangle\ , \ldots, \langle v_n, v_n\rangle) = (0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Komponentenweise folgt:

$$\begin{aligned} k_1(\langle v_1, v_1\rangle) + k_2(\langle v_2, v_1\rangle) + \ldots + k_n(\langle v_n, v_1\rangle) &= 0 \\ k_1(\langle v_1, v_2\rangle) + k_2(\langle v_2, v_2\rangle) + \ldots + k_n(\langle v_n, v_2\rangle) &= 0 \\ \ldots \quad + \quad \ldots \quad + \ldots + \quad \ldots \quad &= 0 \\ k_1(\langle v_1, v_n\rangle) + k_2(\langle v_2, v_n\rangle) + \ldots + k_n(\langle v_n, v_n\rangle) &= 0 \end{aligned}$$

Das heißt dieses lineare Gleichungssystem ist erfüllt, falls $\operatorname{rk}(G) < n$.
Betrachte:

$$x = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$$

1. $x \neq \vec{0}$: Sonst wäre $k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$ eine nichttriviale Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

2. $$\begin{aligned} \langle v, v_i\rangle &= \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n, v_i\rangle \\ &= \underbrace{k_1 \langle v_1, v_i\rangle + k_2 \langle v_2, v_i\rangle + \ldots k_n \langle v_n, v_i\rangle}_{\text{ist die } i\text{-te Zeile des letzten Gleichungssystems.}} \\ &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow \langle x, v_i\rangle = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ $\Rightarrow \langle x, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$ weil $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis bildet.

   $\Rightarrow x = \vec{0}$. Dies ist ein Widerspruch zu „1.“ $(x \neq 0)$

   Aus diesem Widerspruch folgt: $\operatorname{rk}(G) = n$.

□

Satz 8.7:
Sei U ein Unterraum des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}_n$. Dann gilt:

$$\dim U + \dim U^{\perp} = n \quad (= \dim \mathbb{E}_n)$$

Beweis 8.9:
Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von U und wir ergänzen diese Basis zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V. Zu zeigen ist:

$$\dim V = n - m$$

$U^{\perp}$ besteht aus allen Vektoren $u = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ mit $U \perp v_1, \ldots, v_m$. das heißt $U^{\perp}$ besteht aus alle Vektoren für deren Koeffizienten $k_1, \ldots, k_n$ gilt.

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i \right), v_j \right\rangle = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i \langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \quad (**)$$

Dies sind genau die ersten m Gleichungen des obigen Systems.
Wir ergänzen: Der Lösungsraum $(**)$ hat die Dimension n-Rang (Koeffizientenmatrix).
Der Rang dieser Koeffizientenmatrix ist gleich m, denn es sind die ersten m Zeilen des obigen Gleichungssystems und diese sind linear unabhängig.
$\Rightarrow$ Die Dimension des Lösungsraumes ist $n - m$
$\Rightarrow \dim U^{\perp} = n - m = n - \dim U$
$\square$

Folgerung 8.3:
U und $U^{\perp}$ sind komplementäre Teilräume. Das heißt es gilt

$$U + U^{\perp} = \mathbb{E}_n$$

Beweis 8.10:
$U \cap U^{\perp} = \{\vec{0}\}$, $\dim U + \dim U^{\perp} = n$
Daraus folgt die Behauptung
$\square$

9 Längen- und Winkelmessung in Vektorräumen

9.1 Hauptachsentransformation von Quadratischen Formeln

Definition 9.1 (adjungierte Abbildung)**:**
Sei $(V, \langle \cdots, \cdots \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung
Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f^* : V \to V$ mit folgender Eigenschaft:

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle \text{ für alle } v, w \in V$$

f^* heißt die die zu f bezüglich $\langle \cdots, \cdots \rangle$ **adjungierte Abbildung**.

Definition 9.2 (selbstadjungierte Abbildung)**:**
$f : V \to V$ heißt **selbstadjungiert** oder symmetrisch, wenn gilt: $f = f^*$

Satz 9.1:
Sei $(V, \langle \cdots, \cdots \rangle)$ ein euklidischer Raum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.
Dann gilt:

1. Ist f eine selbstadjungierte Abbildung, so ist die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ für jede Orthonormalbasis B eine symmetrische Matrix
   (das heißt: ${}_BM_B(f) = {}_BM_B(f)^T$)

2. Gibt es eine Orthonormalbasis B von V, so dass ${}_BM_B$ eine symmetrische Matrix ist, so ist f selbstadjungiert

Beweis 9.1:
1.
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Orthonormalbasis.
Weil $f = f^*$ gilt, folgt $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$
Sei ${}_BM_B(f) = (a_{ij})$ gegeben durch

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\langle f(v_j), v_i\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k, v_i \right\rangle & \langle v_j, f(v_i)\rangle &= \left\langle v_j, \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle v_k, v_i\rangle & &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \langle v_j, v_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ki} & &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_{jk} \\
&= \underline{\underline{a_{ij}}} & &= \underline{\underline{a_{ji}}}
\end{aligned}$$

Wegen $\langle f(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, f(v_i)\rangle \Rightarrow a_{ij} a_{ji} \Rightarrow {}_BM_B(f)^T$
2.
Sei $\langle f(v_j), v_i\rangle$ eine Orthonormalbasis von V, so dass ${}_BM_B(f) = {}_BM_B(f)^T$ ist, das heißt ${}_BM_B(f) = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$
so ist $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.
Es ist $f(v_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k$

$$\langle f(v_j), v_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k, v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle v_k, v_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ki} = a_{ij}$$
$$\langle v_j, f(v_i)\rangle = \ldots = a_{ji} = a_{ij} = \langle f(v_j), v_i\rangle$$

Daraus folgt wegen der Bilinearität: $\langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle$ für alle $v, w \in V$
$\Rightarrow f$ ist selbstadjungiert.
$\square$

Folgerung 9.1:
Seien λ_1, λ_2 Eigenwerte der selbstadjungierten Abbildung $f : V \to V$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Seien $E(f, \lambda_1), E(f, \lambda_2)$ die zugehörigen Eigenräume.

Dann gilt: $E(f, \lambda_1)$ ist senkrecht zu $E(f, \lambda_2)$.
(das heißt für alle $u \in E(f, \lambda_1), v \in E(f, \lambda_2) : \langle u, v \rangle = 0$
Seien $u \in E(f, \lambda_1), v \in E(f, \lambda_2) \quad f(u) = \lambda_1 u,\ f(v) = \lambda_2 v$

$$\lambda_1 \langle u, v \rangle = \langle \lambda_1 u, v \rangle = \langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle = \lambda_2 \langle u, v \rangle$$

Das heißt wir haben gezeigt:
Für alle $u \in E(f, \lambda_1), v \in E(f, \lambda_2)$.

$$\lambda_1 \langle u, v \rangle = \lambda_2 \langle u, v \rangle$$

bzw.:

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

□

Satz 9.2:
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung.
Dann gilt: Alle Eigenwerte von f sind reell und für jeden Eigenwert stimmen die algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Beweis 9.2:

42

□

Folgerung 9.2:
Jede selbstadjungierte Abbildung $f : V \to V$ ist diagonalisierbar.
Das heißt es gibt eine Matrix $S, \det S \neq 0$.

$$D = S^{-1}\ {}_B M_B(f)\, S \text{ ist eine Diagonalmatrix.}$$

Das heißt sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der selbstadjungierten linearen Abbildung $f : V \to V$ mit den zugehörigen Eigenräumen $E(f, \lambda_1), \ldots, E(f, \lambda_n)$ so ermittelt man für jeden Eigenraum eine Basis.

Mittels des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens erhält man eine Orthonormalbasis in jedem $E(f, \lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$

Die Vereinigung aller dieser Orthonormalbasen bildet eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Berechnet man bezüglich dieser Orthonormalbasis die Darstellungsmatrix von f, so ist dies eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte von f stehen und dabei jeder so oft, wie die Dimension des Eigenraumes angibt.

9.1.1 Hauptachsentransformation quadratischer Form

?

Beispiel 9.1:

$$q(\mathbb{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \quad (q_{ij} \in \mathbb{R})$$

ist eine quadratische Form.

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $q_{ij} = q_{ji}$ ist symmetrische Matrix.

Es existiert dann eine orthogonale Matrix S

$$\left(\begin{array}{l}\text{das heißt } S^T = S^{-1} \text{ genau dann, wenn alle Spalten von } S \text{ paarweise} \\ \text{senkrecht aufeinander stehen und der Betrag der Spalten } = 1 \text{ bezüglich} \\ \text{des üblichen Skalarprodukts ist.}\end{array}\right)$$

so dass gilt: $S^{-1}\,\mathbb{Q}\,S$ ist eine Diagonalmatrix.

Führen neue Koordinaten ein: $\mathbb{x} = S\mathbb{x}'$

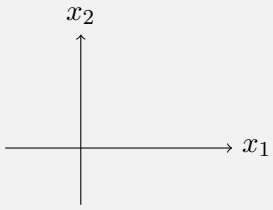
$$\begin{aligned} q(\mathbb{x}) &= \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\ &= \mathbb{x}^T \mathbb{Q} \mathbb{x} \\ &= (S\mathbb{x}')^T \mathbb{Q} \cdot S\mathbb{x}' \\ &= \mathbb{x}'^T S^T \mathbb{Q} S \mathbb{x}' = \mathbb{x}'^T S^{-1} \mathbb{Q} S \mathbb{x}' \\ &= \mathbb{x}'^T \mathbb{D} \mathbb{x}' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \end{aligned}$$

λ_i ist Eigenwert von Q

?

Beispiel 9.2:

Im $\mathbb{E}_2$, das heißt im $\mathbb{R}^2$ mit dem üblichen Skalarprodukt
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - rechtwinkliges Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$



$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 + 2Dx_1 + 2Ex_2 + F = 0$$

Welche Gestalt hat die Menge aller Punkte, die diese Gleichung erfüllen?

Kreis: $x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$

Ellipse: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Hyperbel: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Wir versuchen zunächst, den linearen Term zu beseitigen: $\mathbb{x}' = \mathbb{x} + c$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Schreiben die Gleichung in Matrixform:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} Ax_1 & + & Bx_2 \\ Bx_1 & + & Cx_2 \end{pmatrix} \\
&= Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 \\
&= Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 \\
2Dx_1 + 2Ex_2 &= 2 \underbrace{DE}_{=\mathbb{c}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{x}^T \mathbb{A} \mathbb{x} + 2\mathbb{c}^T \mathbb{x} + a_{00} &= 0 \qquad \mathbb{x} = \mathbb{x}' + c \\
(\mathbb{x}' + c)^T \mathbb{A} (\mathbb{x}' + c) + 2\mathbb{c}^T (\mathbb{x}' + c) + a_{00} &= 0 \\
(\mathbb{x}'^T + c^T) \mathbb{A} (\mathbb{x}' + c) + 2\mathbb{c}^T \mathbb{x}' + 2\mathbb{c}^T c + a_{00} &= 0 \\
\mathbb{x}'^T \mathbb{A} (\mathbb{x}' + c) + c^T \mathbb{A} (\mathbb{x}' + c) + 2\mathbb{c}^T \mathbb{x}' + 2\mathbb{c}^T c + a_{00} &= 0 \\
\underline{\mathbb{x}'^T \mathbb{A} \mathbb{x}'} + \mathbb{x}'^T \mathbb{A} c + c^T \mathbb{A} \mathbb{x}' + \underline{c^T \mathbb{A} c} + 2\mathbb{c}^T c + \underline{a_{00}} &= 0 \qquad a_{00}' = c^T \mathbb{A} c + 2\mathbb{c}^T c + a_{00}
\end{aligned}$$

Es ist $\mathbb{x}'^T \mathbb{A} c = (\mathbb{x}'^T \mathbb{A} \cdot c)^T$ denn beide sind Elemente aus R

$$\begin{aligned} &= c^T \mathbb{A}^T \cdot \mathbb{x}'^T \\ &= c^T \mathbb{A} \cdot \mathbb{x}'^T \\ &\Rightarrow \mathbb{x}'^T \mathbb{A} \mathbb{x}' + 2c^T \mathbb{A} \mathbb{x}' + 2\mathbb{c}^T \mathbb{x}' + a'_{00} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Der lineare Term verschwindet genau dann, wenn gilt $c^T \mathbb{A} = -\mathbb{c}^T$
Das heißt genau dann wenn

$$-\mathbb{c} = \mathbb{A} \cdot c$$

Das heißt wenn dieses lineare Gleichungssystem bei c eine Lösung besitzt, kann mann durch $\mathbb{x} = \mathbb{x}' + c$ die linearen verschwinden lassen.

$$\Rightarrow \mathbb{x}'^T \mathbb{A} \mathbb{x}' + a'_{00} = 0$$

$\mathbb{x}' = S\mathbb{x}''$ mit $S : S^{-1}\mathbb{A}S$ ist Diagonalmatrix

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + a'_{00} = 0$$

$\underline{\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0}$

?

Beispiel 9.3:
$x^2 + 24xy + 8y^2 + 17x - 200 = 0$
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbb{c} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_{00} = -200$
Gleichungssystem für c: $-\begin{pmatrix} 8.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
eindeutige Lösung: $c_1 = 1/2$, $c_2 = -3/4$

$$x = \mathbb{x}' + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x'^2 + 24x'y' + 8y'^2 - 195,75 = 0$$

Eigenwerte von $\mathbb{A}$: $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 12 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(8-\lambda) - 144 = 0$

$$\lambda^2 - 9\lambda - 136 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -8,\ \lambda_2 = 17$$

Eigenvektor von λ_1: $(\mathbb{A} - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 9v_1 + 12v_2 = 0$

$v' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \|v'\| = 5$

$v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist normiter Eigenvektor zu λ_1

Eigenvektor (normit) zu λ_2: $w' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \|w'\| = 5$

$w = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow -8x''^2 + 17y''^2 - 195,75 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{17y''^2}{195,75} - \frac{8x''}{195,75} = 1$$

Hyperbel

10 Hinweise zur Klausur

1. Aufgabe: Definitionen, Sätze, Beispiele (kleine Rechnungen) (nach 15 Minuten Abgabe)
andere Aufgaben sind Rechenaufgaben, Gleichungssysteme

Das musst du garantiert wissen:

- Wann sind Lineare Gleichungsssysteme lösbar?
- Nachweis: Abbildung ist linear
- Rangberechnung, Determinantenberechnung
- „Ich denke schon, dass sie Eigenräume berechnen können.“