Hoofdstuk 20
Wachtrijentheorie

Beschrijving

Iedereen van ons heeft al tijd gespendeerd in een wachtrij: b.v. aanschuiven in de Alma restaurants.

In dit hoofdstuk onwikkelen we mathematische modellen voor wachtrijen.

Inhoud

- Terminologie
- Modelleren van aankomst- en bedieningsproces
- Geboorte-doodproces
- $M/M/1/GD/\infty/\infty$ wachtrijsysteem en wet van Little
- $M/M/1/GD/c/\infty$ wachtrijsysteem
- $M/M/s/GD/\infty/\infty$ wachtrijsysteem
- $M/G/\infty/GD/\infty/\infty$ en $GI/G/\infty/GD/\infty/\infty$ wachtrijsystemen
- $M/G/1/GD/\infty/\infty$ wachtrijsysteem
- Beperkte populatie
- Exponentiële wachtrijen in serie en open wachtrijnetwerkmodellen

20.1 Terminologie/begrippen

- Om een wachtrijsysteem te omschrijven heb je een inputproces en een outputproces nodig.
- Voorbeelden zijn:

Voorbeeld	Inputproces	Outputproces
Bank	Klanten komen binnen in de bank	Bediende bedient de klant
Pizzeria	Vraag naar pizza komt binnen	Vertrek van vrachtwagens om pizza’s te leveren

Wat willen we weten?

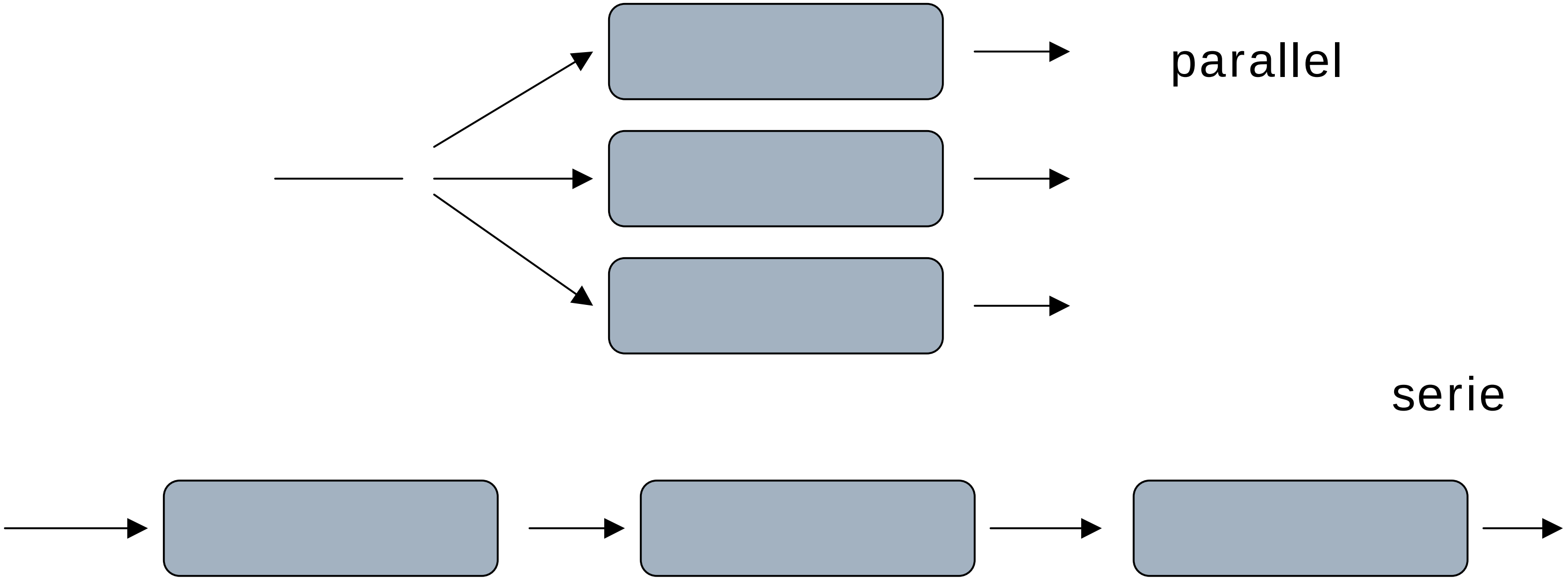
- Wat is de bezettingsgraad van de bediener?
- Wat is het verwacht aantal klanten in de wachtrij?
- Wat is de verwachte tijd die een klant spendeert in de wachtrij?
- Indien een bankmanager er zeker wil van zijn dat niet meer dan 1% van de klanten langer dan 5 minuten in de wachtrij staat, hoeveel kasbediendes moet hij dan opstellen?

Het input- of aankomstproces

- Het inputproces wordt gewoonlijk het **aankomstproces** genoemd.
- Aankomsten worden **klanten** genoemd.
- We nemen aan dat niet meer dan één klant aankomt op een bepaald tijdstip.
- Indien meer dan één klant aankomt op een bepaald tijdstip, dan spreken we over **bulkaankomsten**.
- Er bestaan modellen waarbij het aantal aankomsten getrokken wordt uit een beperkte populatie. (**finite source modellen**).
- Indien een klant niet aansluit in de rij omdat de lengte te groot geworden is en op die manier het systeem verlaat, dan wordt gezegd dat deze klant “**balked”**.

Het output- of bedieningsproces

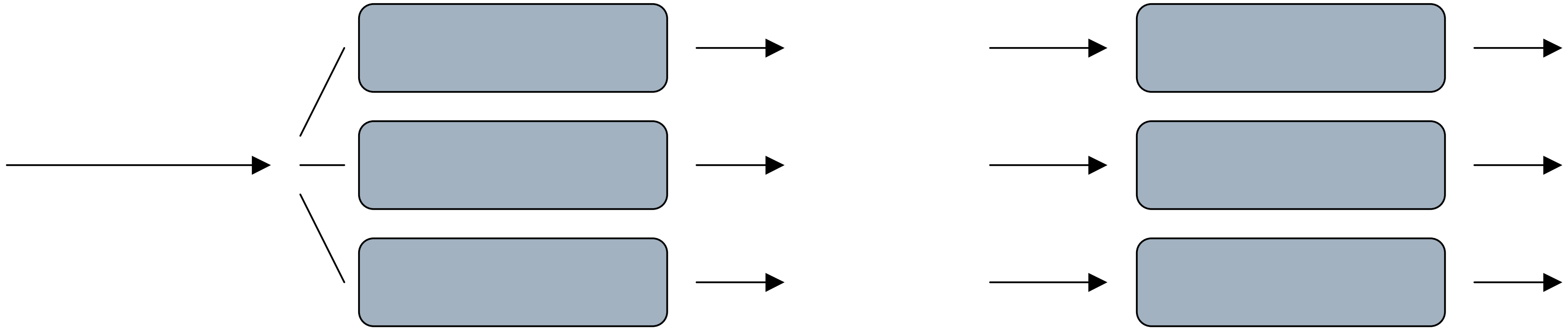
- Om een bedieningsproces binnen een wachtrijmodel te beschrijven maken we gebruik van een verdeling van de bedieningstijd.
- We bestuderen twee mogelijke configuraties: **bediening in parallel** en **bediening in serie**.



Wachtrijdiscipline

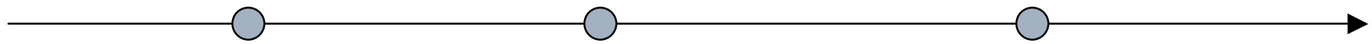
- De manier waarop klanten worden bediend.
- De meest voorkomende is: de eerst aangekomene wordt eerst bediend = **FCFS discipline** (first come, first served).
- De laatst aangekomene wordt eerst bediend: **LCFS discipline** (last come, first served)
- De selectie kan ook random zijn → **SIRO discipline** (service in random order).

- Prioritaire wachtrijdisciplines: bepaalde klanten zijn belangrijker dan andere.
- Eén enkele wachtrij om aan te schuiven of verschillende lijnen / is wisselen toegestaan?



20.2 Modelleren van aankomst- en bedieningsprocessen

Aankomsten



$t_1 = 3$ $t_2 = 8$ $t_3 = 15$

$T_1 = 8 - 3$ $T_2 = 15 - 8$

T_i = tussenaankomsttijden, onafhankelijke continue kansvariabelen

- Stationaire tussenaankomsttijden
- T_i = een kansvariabele A

$$P(\mathsf{A} \le c) = \int_0^c a(t)dt \text{ and } P(\mathsf{A} > c) = \int_c^\infty a(t)dt$$

- We definiëren 1/λ als de gemiddelde tussenaankomsttijd.

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty ta(t)dt$$

- λ = de tussenaankomstfrequentie, b.v. # aankomsten per uur.
- Welke verdeling moeten we nemen om A voor te stellen zodat alles toch realistisch is en alles gemakkelijk berekenbaar is.
- De meest voorkomende keuze voor A is de exponentiële verdeling.
- Een exponentiële verdeling met parameter λ heeft een densiteit $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
- De verwachte of gemiddelde tussenaankomsttijd wordt dan: $$E(\mathrm{A}) = \frac{1}{\lambda}$$

- De variantie van A wordt dan var **A** = E(**A**^{2}) – E(**A**)^2, en dat is:

$$\operatorname{var} \mathsf{A} = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Lemma 1: Indien **A** een exponentiële verdeling heeft dan geldt voor alle niet-negatieve waardes van t en h,

$$P(\mathsf{A} > t + h \mid \mathsf{A} \geq t) = P(\mathsf{A} > h)$$

- Dit betekent: **geheugenloos**.
- Belangrijk: tussenaankomsttijden zijn voor ons van belang, en die zijn onafhankelijk van wat ervoor reeds gebeurd is.

- $P(A>9|A\geq 5) = P(A>7|A \geq 3) =$

  $P(A>4|A\geq 0) = e^{-4\lambda}$

Verband tussen de Poissondistributie en and Exponentiële Distributie

- Theorema 1: Tussentijden zijn exponentieel verdeeld met parameter λ enkel en alleen als het aantal aankomsten in het interval met lengte t een Poissondistributie volgt met parameter λt.

- Een discrete kansvariabele **N** heeft een Poissondistributie met parameter λ als voor $n = 0,1,2,...,$

$$P(\mathbf{N} = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \quad (n = 0,1,2,...)$$

- Poissondistributie met parameter λ:
  E(N) = var (N) = λ

- N_t = het aantal aankomsten gedurende een tijdsinterval t (theorema 1):

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Theorema 2

  Als het aankomsten patroon stationair is en als er zich geen bulkaankomsten kunnen voordoen, en als voorbije aankomsten toekomstige niet beïnvloeden dan volgt het aankomstenpatroon een exponentiële verdeling met parameter λ en is het aantal aankomsten in een tijdsinterval met lengte t Poissoniaans met λt.

- In veel toepassingen is het gebruik van een exponentieel verdeelde tussenaankomsttijd een goede benadering.
- Soms wordt een Erlangdistrubitie gebruikt.

Voorbeeld

- Stel dat het aantal glazen bier dat gedronken wordt in een pub op de oude markt een Poissondistributie volgt met een gemiddelde van 30 glazen per uur.
  - Wat is de kans dat er juist 60 glazen gedronken worden tussen 22u en middernacht?
  - Wat is het gemiddelde aantal glazen dat zal gedronken worden tussen 21u en 1u, en wat is de standaardafwijking daarop?
  - Wat is de kans dat de tijd tussen het drinken van twee glazen bier ligt tussen 1 en 3 minuten?

Modelleren van Bedieningsproces

- Bedieningstijden worden weergegeven met een variabele S, die een onafhankelijke randomvariabele is.
- De gemiddelde bedieningstijd van een klant is $1/\mu$.
- μ is het aantal klanten dat per uur bediend wordt, μ = de bedieningsintensiteit.
- $S(t) = \mu e^{-\mu t}$ (exponentieel verdeeld).
- !! Reële bedieningstijden hebben meestal wel een geheugen !!

De Kendall-Lee-notatie

- Alle aankomsten gebeuren in één enkele wachtrij.
- Elk wachtrijsysteem kan omschreven worden op basis van de volgende notatie:

1/2/3/4/5/6

- 1 = aankomstpatroon:

  M = onafhankelijk en identiek verdeeld (iid) met exponentiële verdeling

  D = iid en deterministisch

  E_k = iid Erlang met vormparameter k

  GI = iid en een algemene verdeling

- 2 = bedieningspatroon:

  M = iid en exponentieel verdeeld

  D = iid en deterministisch

  E_k = iid Erlang met vormparameter k

  G = iid en een algemene verdeling

- 3 = # parallelle bedieningsstations.
- 4 = wachtrijdiscipline:
  - FCFS = First come, first served
  - LCFS = Last come, first served
  - SIRO = Service in random order
  - G*D* = General queue discipline
- 5 = maximaal aantal klanten in het systeem.
- 6 = grootte van de populatie.

- In veel gevallen is 4/5/6 = $GD/\infty/\infty$ en laat men dat deel vallen.
- $M/E_2/8/\mathrm{FCFS}/10/\infty$?

Paradox

- Stel dat de tussenaankomsttijd van bussen exponentieel verdeeld is met een gemiddelde tijd van 60 minuten.
- We komen aan op een willekeurig gekozen ogenblik, hoelang moeten we gemiddeld wachten vooraleer er een bus langskomt?
- ?

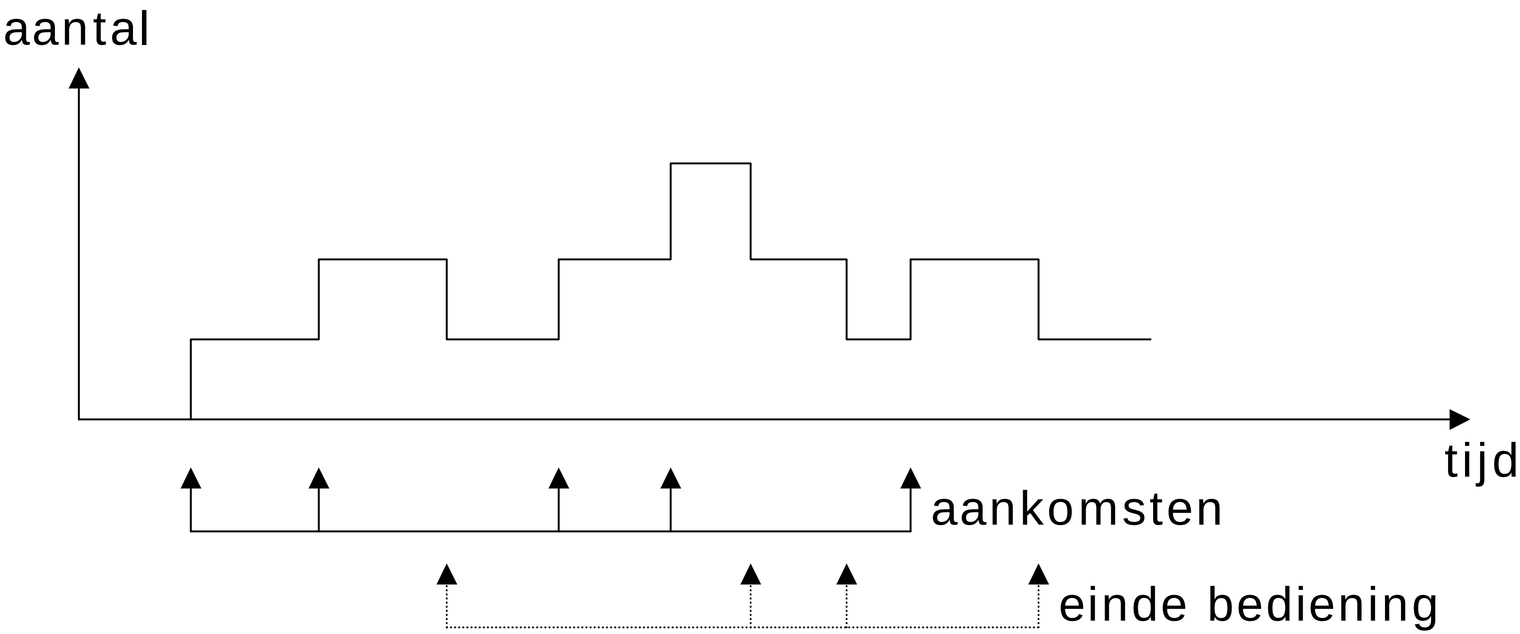
20.3 Geboorte-doodprocessen

- Toestand op tijdstip t = # aanwezigen in het wachtrijsysteem op tijdstip t.

- $P_{ij}(t)$ overgangswaarschijnlijkheid: de kans dat er j klanten in systeem aanwezig zijn, gegeven dat er i in het begin aanwezig waren (Markovketen).

- Convergentie → lim (t→∞) Pij(t) = π_j

- Bij wachtrijen zijn we vooral geïnteresseerd in het stabiele gedrag (steady state).



Wetten bij geboorte-doodprocessen

- Wet 1
  - Met kans $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$ is er een geboorte tussen t en $t+\Delta t$. Een geboorte verhoogt de toestand met 1 tot j+1. De variabele λ_j wordt geboorteintensiteit genoemd in toestand j en komt gewoon overeen met een aankomst
- Wet 2
  - Met kans $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$, is er een sterfgeval tussen t en $t + \Delta t$. De variabele μ_j is de doodsintensiteit in toestand j en komt overeen met het beëindiging van dienstverlening. Hou re rekening mee dat $\mu_0 = 0$!
- Wet 3
  - Geboorte en dood zijn onafhankelijk van elkaar.

Relatie tussen exponentiële verdeling en geboorte-doodprocessen

- De meeste wachtrijsystemen met exponentiële tussenaankomsttijden en bedieningstijden kunnen gemodelleerd worden als geboorte-doodprocessen.

Stabiele toestand bij geboorte-doodprocessen

- π_j ?
- Relatie tussen $P_{ij}(t+\Delta t)$ en $P_{ij}(t)$.

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} = \pi_j(\lambda_j + \mu_j) \quad (j = 1,2,\ldots)$$

$$\pi_1\mu_1 = \pi_0\lambda_0$$

- Evenwichtsvergelijkingen of continuïteitsvergelijkingen voor een geboorte-doodproces.

- Deze zijn:

$$
\begin{array}{ll}
(j=0) & \pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1 \\
(j=1) & (\lambda_1+\mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 \\
(j=2) & (\lambda_2+\mu_2)\pi_2 = \lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3 \\
\vdots & \\
(j^{de} \text{ beperking}) & (\lambda_j+\mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}
\end{array}
$$

Oplossen van het geboorte-doodstelsel

- Indien $\sum_{j=1}^{j=\infty} c_j$ eindig is, kunnen we het stelsel oplossen voor π_0:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{j=\infty} c_j}$$

- Als $\sum_{j=1}^{j=\infty} c_j$ oneindig is, dan bestaat er geen stabiele toestand.
- Als de aankomstintensiteit hoger is dan de bedieningsintensiteit kan er nooit een stabiele toestand bereikt worden.