

Modelos Nucleares

Modelo de capas

- Evidencias experimentales
- Potenciales centrales
- Potencial espín-órbita
- Momentos magnéticos dipolares
- Momentos eléctricos cuadrupolares
- Nucleones de valencia

Modelos colectivos

- Modelo vibracional
- Modelo rotacional

Modelo unificado

Modelo de capas (evidencias experimentales)

- Pretende dar cuenta de la existencia de los *números mágicos*

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$$

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

- Propiedades:
 - ✓ Energías de ligadura elevadas
 - ✓ Energías de separación S_p y S_n mayores que en los núcleos vecinos
 - ✓ Momentos cuadrupolares eléctricos $Q \approx 0$
 - ✓ Los doblemente mágicos ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{208}\text{Pb}$, son muy estables y abundantes
- Hipótesis: cada nucleón interacciona con un *potencial efectivo* creado por el resto del núcleo.
-

Modelo de capas (Potenciales centrales)

- **Pozo esférico infinito**

$$V(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} 0; & r < a \\ \infty; & r > a \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(r, \theta, \phi) = j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- Los valores de la energía se obtendrán a partir de los ceros de las funciones esféricas de Bessel $j_l(ka) = 0$.
- Los estados están degenerados en energía con degeneración $2(2l+1)$ (2 estados de espín por $2l+1$ valores de m_l)

- **Oscilador armónico simple**

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi(r, \theta, \phi) = R_n(kr) Y_{l,m}(\theta, \phi); \\ l = n, n-2, n-4, \dots, \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ (n par)} \\ 1 \text{ (n impar)} \end{array} \right\} \\ E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{3}{2}); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

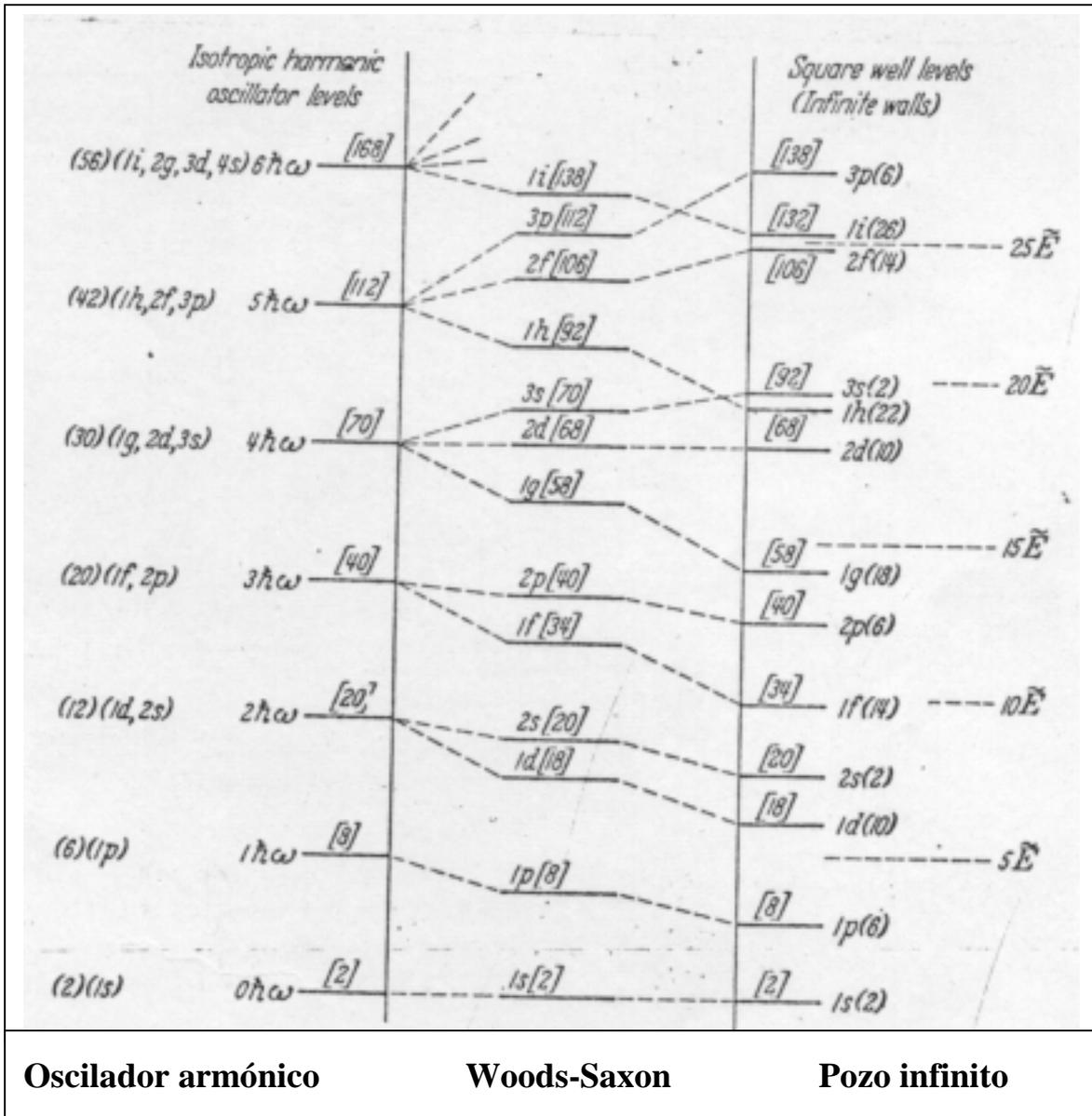
- Los niveles de energía están degenerados y su degeneración es $2 \times \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

- **Potencial de Wood-Saxon:**

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left[\frac{r-R}{a}\right]}$$

- El esquema de niveles de energía es intermedio entre los dos anteriores.
- Los estados están degenerados en energía con degeneración $2(2l+1)$

Modelo de capas (Potenciales centrales)



Modelo de capas (Potencial espín-órbita)

- Se añade el *potencial espín-órbita* para reproducir los números mágicos.

$$V_{so} = V_{so}(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

- Se reproducen los niveles energéticos

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2$$

- Para l no nulo dado, j puede tomar los valores

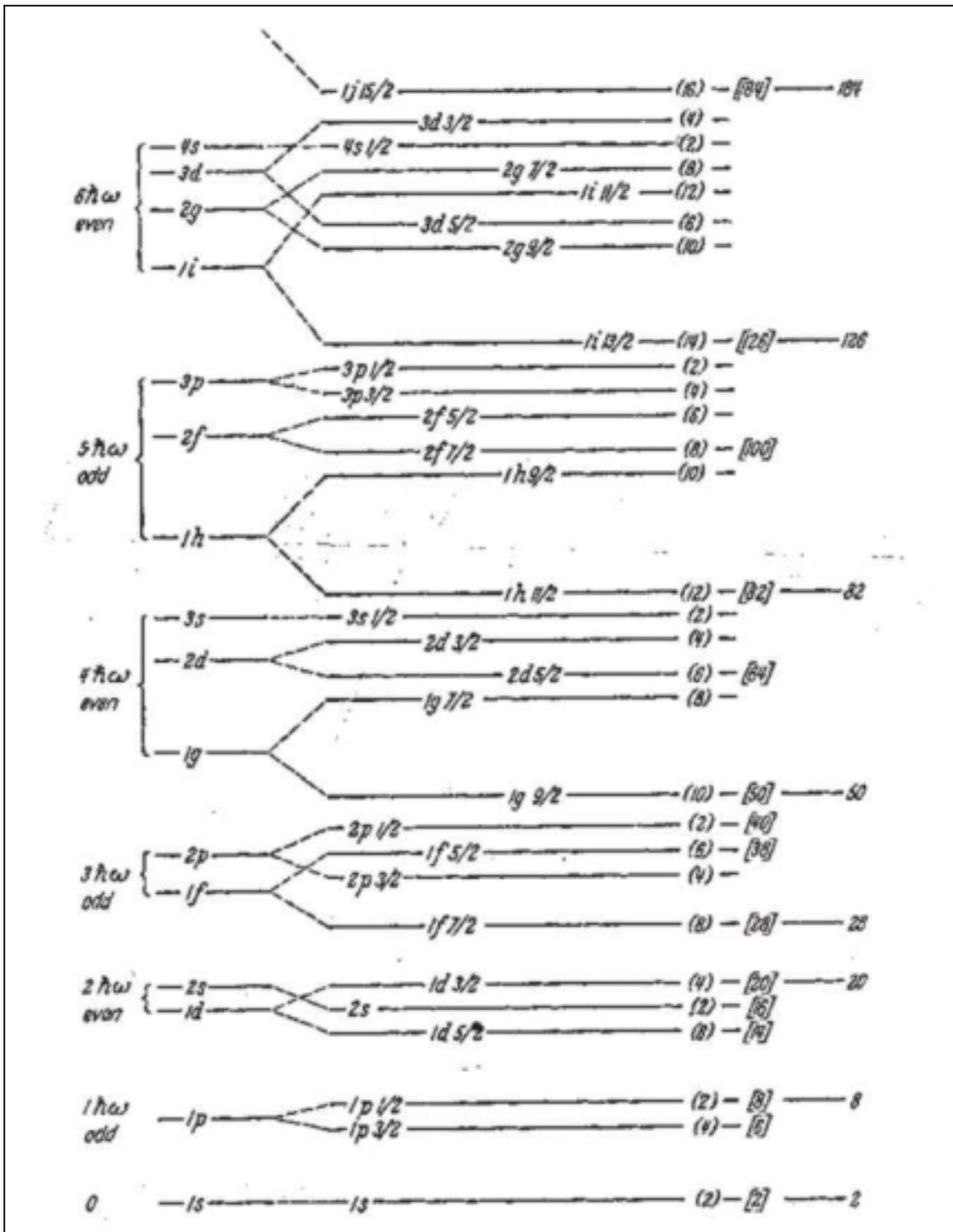
$$\square \quad j = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{doblete}$$

- Degeneración $2j+1$ (debido a los posibles valores de m_j)
- Diferencia de energía del doblete proporcional a

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l+\frac{1}{2}} - \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (2l+1) \hbar^2$$

- La ocupación de protones y neutrones reproduce los números mágicos, 2,8,20,28,50,82,126 y 184, al completarse con ellos las subcapas más estables.

Modelo de capas (Potencial espín-órbita)



Efecto de la interacción espín-órbita sobre el potencial de Wood-Saxon

Modelo de capas (Espín-paridad de los niveles)

- Predicción del modelo de capas extremo :

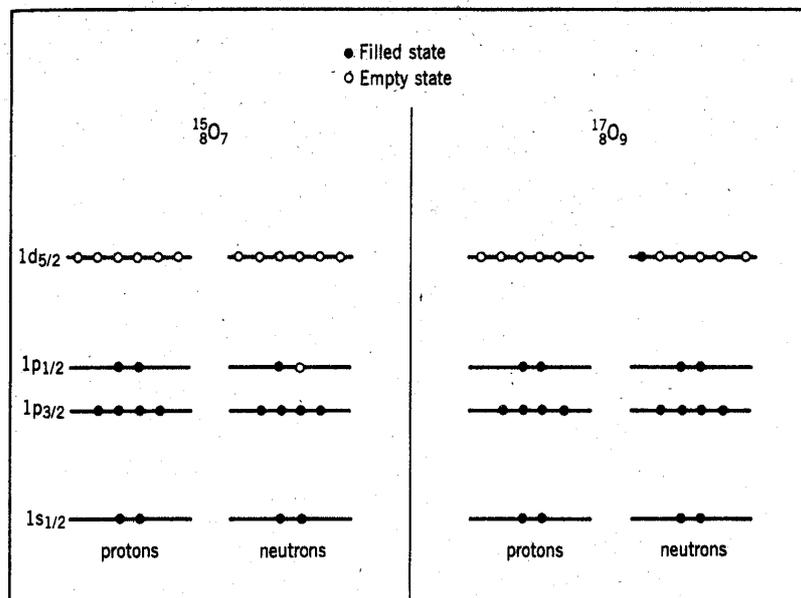
Las propiedades del núcleo vienen determinadas únicamente por las del nucleón desapareado.

-
- Ejemplos:

Experimentalmente: $J^{\Pi}({}^{15}_8\text{O}_7) = \frac{1}{2}^-$ y $J^{\Pi}({}^{17}_8\text{O}_9) = \frac{5}{2}^+$

$${}^{15}_8\text{O}_7 \rightarrow 1p_{1/2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l=1 \Rightarrow \pi = (-1)^l = -1 \\ j = 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow J^{\Pi} = \frac{1}{2}^-$$

$${}^{17}_8\text{O}_9 \rightarrow 1d_{5/2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l=2 \Rightarrow \pi = (-1)^l = +1 \\ j = 5/2 \end{array} \right\} \rightarrow J^{\Pi} = \frac{5}{2}^+$$



Llenado de capas

Modelo de capas (Momentos magnéticos dipolares)

- Predicción:

Los núcleos con A impar tienen su momento dipolar magnético igual al del nucleón desapareado.

- Momento magnético de un nucleón con \vec{l} y \vec{s}

$$\vec{\mu} = (g_l \vec{l} + g_s \vec{s}) \frac{\mu_N}{\hbar} \quad (i = p, n)$$

observable en la dirección z que define un campo magnético \vec{B} o j_z (\vec{l} y \vec{s} no tienen una dirección bien definida; \vec{j} sí)

- En esa dirección: $\langle \mu \rangle = [g_l \langle j_z \rangle + (g_s - g_l) \langle s_z \rangle] \frac{\mu_N}{\hbar}$

- $\langle j_z \rangle = j \hbar$

- La proyección de \vec{s} sobre \vec{j} es: $\frac{\vec{s} \cdot \vec{j}}{j} \frac{\vec{j}}{j} = \vec{j} \frac{\vec{s} \cdot (\vec{l} + \vec{s})}{j^2}$

$$\langle s_z \rangle = \langle j_z \rangle \frac{\langle \vec{s} \cdot \vec{l} \rangle + \langle \vec{s}^2 \rangle}{j(j+1)\hbar^2} = j\hbar \frac{\frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\hbar^2 + s(s+1)\hbar^2}{j(j+1)\hbar^2}$$

$$\langle s_z \rangle = \frac{j}{2j(j+1)} [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)] \hbar$$

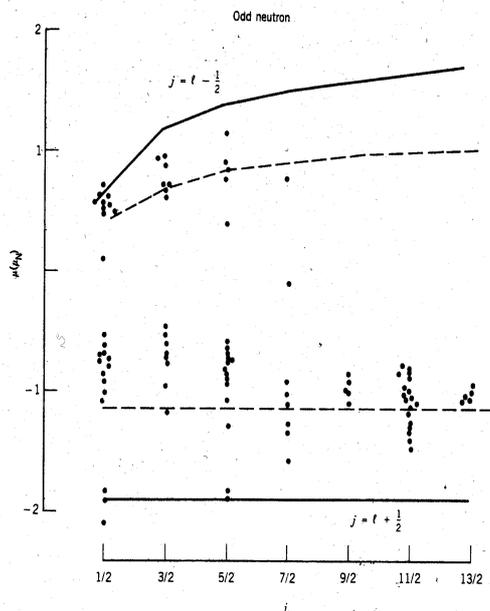
$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \Rightarrow \langle s_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \\ j = l - \frac{1}{2} \Rightarrow \langle s_z \rangle = -\frac{\hbar}{2} \frac{j}{(j+1)} \end{cases}$$

Modelo de capas (Momentos magnéticos dipolares)

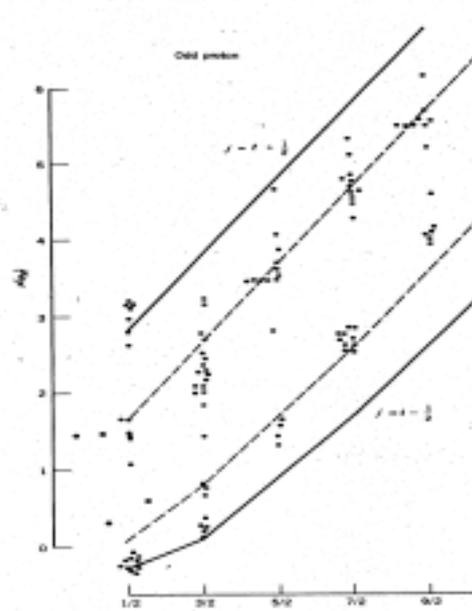
- El momento dipolar magnético predicho es:

$$\left. \begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \mu \rangle = \left[g_l \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s \right] \mu_N \\ j = l - \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \mu \rangle = \left[g_l \frac{j(j + \frac{3}{2})}{(j+1)} - \frac{1}{2} \frac{j}{j+1} g_s \right] \mu_N \end{cases} \right\} \text{Líneas de Schmidt}$$

- Modelo parcialmente satisfactorio



Momentos magnéticos y líneas de Schmidt para núcleos con N impar



Momentos magnéticos y líneas de Schmidt para núcleos con Z impar

Modelo de capas (Momentos eléctricos cuadrupolares)

- Momento cuadrupolar de un núcleo con A impar (calculado en la dirección en la que $I_z = I$)
 - Si *protón* desapareado en un estado j

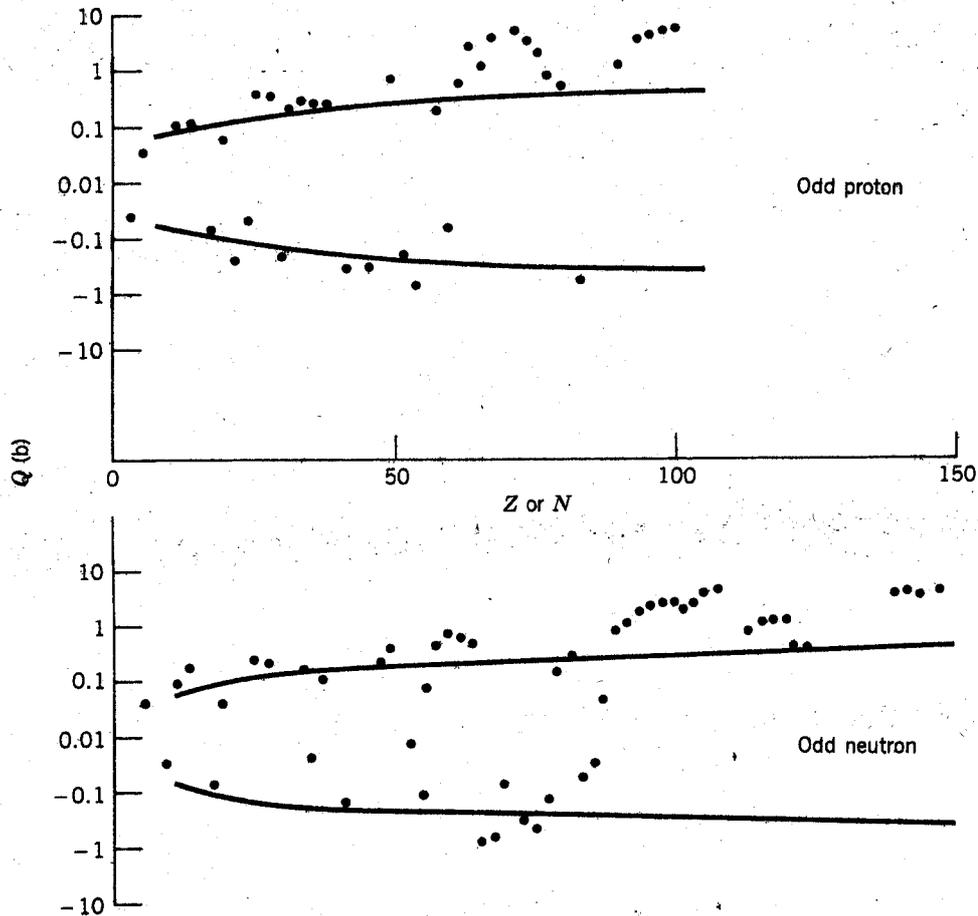
$$\langle Q \rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \times \frac{3}{5} R_0^2 A^{2/3}$$

- Si *neutrón* desapareado $\langle Q \rangle = 0$

Estado	Q_{teo} (barn) (p desapareado)	Q_{exp} (barn) (p desapareado)	Q_{exp} (barn) (n desapareado)
$1p_{3/2}$	-0,013	-0,0366 (7_3Li_4)	
$1d_{5/2}$	-0,036	-0,12 (${}^{19}_9F_{10}$)	-0,026 (${}^{17}_8O_9$)
$1d_{3/2}$	-0,037	-0,0825 (${}^{35}_{17}Cl_{18}$)	-0,064 (${}^{33}_{16}S_{17}$)
$1f_{7/2}$	-0,071	-0,26 (${}^{43}_{21}Sc_{22}$)	-0,080 (${}^{41}_{20}Ca_{21}$)
$2p_{3/2}$	-0,005	-0,209 (${}^{63}_{29}Cu_{34}$)	-0,0285 (${}^{53}_{24}Cr_{29}$)
$1f_{5/2}$	-0,086		-0,20 (${}^{61}_{28}Ni_{33}^*$)
$1g_{9/2}$	-0,13	-0,32 (${}^{93}_{41}Nb_{52}$)	-0,17 (${}^{73}_{32}Ge_{41}$)
$1g_{7/2}$	-0,14	-0,49 (${}^{123}_{51}Sb_{72}$)	
$2d_{5/2}$	-0,12	-0,36 (${}^{121}_{51}Sb_{70}$)	-0,236 (${}^{91}_{40}Zr_{51}$)

- Los valores calculados para p tienen el signo correcto, pero son 2 ó 3 veces inferiores
- Para n son más pequeños, pero no nulos
- El modelo es parcialmente satisfactorio

Modelo de capas (Momentos eléctricos cuadrupolares)

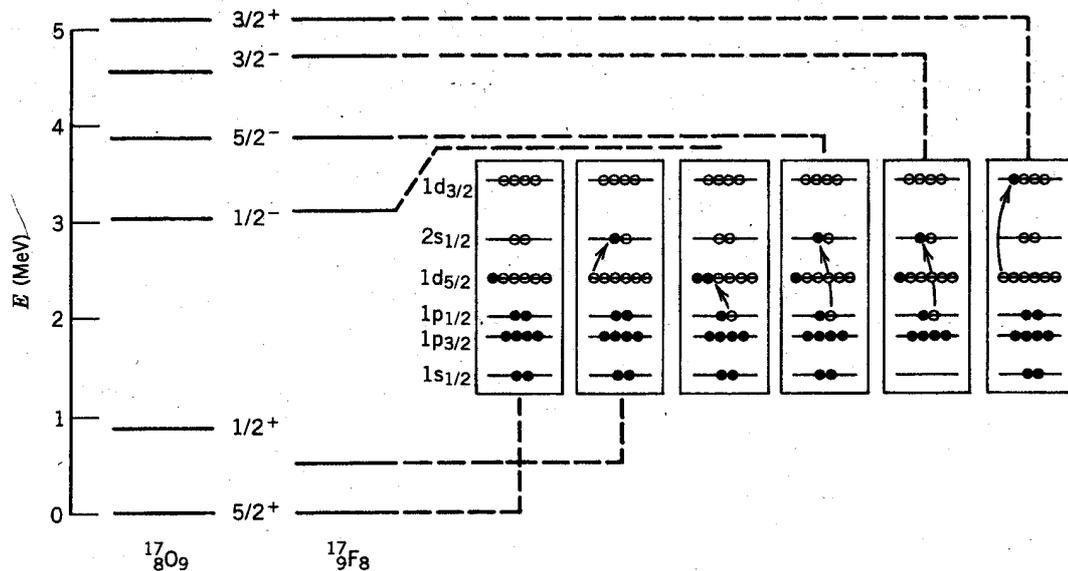


Momentos cuadrupolares experimentales para núcleos con Z o N impar. Las líneas continuas indican los límites $Q \sim \langle r^2 \rangle$ que se esperan en el modelo de capas.

Modelo de capas (Nucleones de valencia)

- *Modelo extremo de partícula independiente:* solo cuenta el nucleón desapareado
- Mejor aproximación: considerar todos los nucleones de una capa incompleta: *nucleones de valencia*

→ da una explicación mejor de los estados excitados



Interpretación según el modelo de capas de los niveles del ^{17}O y ^{17}F . La similitud entre los niveles de los dos núcleos por debajo de 5 MeV sugiere una misma estructura para ambos determinada por los nucleones de valencia.

Modelos colectivos

- Surgen para interpretar las propiedades de los núcleos *par-par* y se basan en el movimiento colectivo del núcleo (*gota líquida*)
- Propiedades
 - ✓ El estado fundamental es siempre $I^\pi(\text{par } X_{\text{par}}) = 0^+$, como predice el modelo de capas
 - ✓ Pero tienen un estado excitado *anómalo* 2^+ con energía $E \leq \frac{E_{\text{par}}}{2}$ (casi siempre el 1^{er} estado excitado)

Ejemplo: $^{130}_{50}\text{Sn}_{80}$

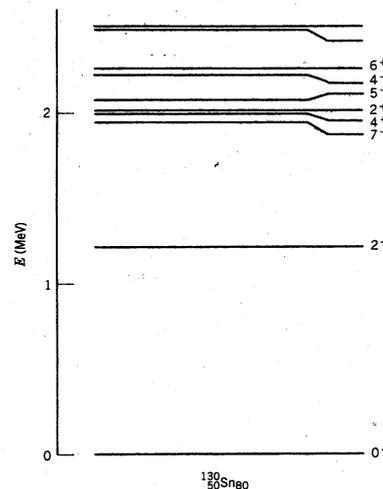


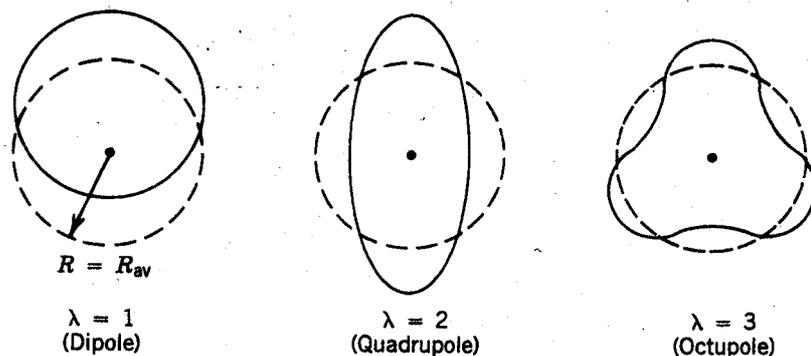
Figure 5.14 The low-lying energy levels of ^{130}Sn .

- ✓ $E(2^+)$ decrece con A suavemente (excepto en las *zonas mágicas*)
 - ✓ $E(2^+) \approx \text{cte}$ y pequeña para núcleos con $150 < A < 190$
 - ✓ $\frac{E(4^+)}{E(2^+)} = \begin{cases} 2 & A < 150 \\ 3,3 & 150 < A < 190 \text{ y } A > 230 \end{cases}$
 - ✓ $\mu(2^+) \approx 0,7 - 1 \mu_N$
 - ✓ $Q \downarrow$ si $A < 150$ y $Q \uparrow$ si $150 < A < 190$
- $\Rightarrow \begin{cases} A < 150 \rightarrow & \text{Modelo colectivo vibracional} \\ 150 < A < 190 \rightarrow & \text{Modelo colectivo rotacional} \end{cases}$

Modelos colectivos (Modelo vibracional)

- El modelo colectivo vibracional se utiliza para núcleos *par-par* con $A < 150$
- El núcleo se presenta como una gota líquida vibrando a alta frecuencia, cuya forma en promedio es esférica.
- Instantáneamente el núcleo no es esférico. La posición instantánea de un punto de la superficie puede darse por:

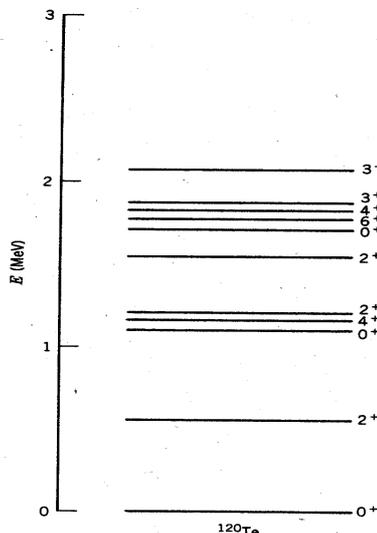
$$R(t) = R_m + \sum_{\lambda \geq 1} \sum_{\mu = -\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$$



- Cada modo de vibración viene dado por λ , y queda descrito por los $2\lambda + 1$ parámetros de forma $a_{\lambda\mu}$.
- La energía vibracional está cuantizada. El cuanto vibracional se llama *fonón*
- Vibración dipolar: $\lambda = 1$
 - ✓ Desplazamiento del centro de masas sin deformación
 - ✓ No tiene su origen en fuerzas internas

Modelos colectivos (Modelo vibracional)

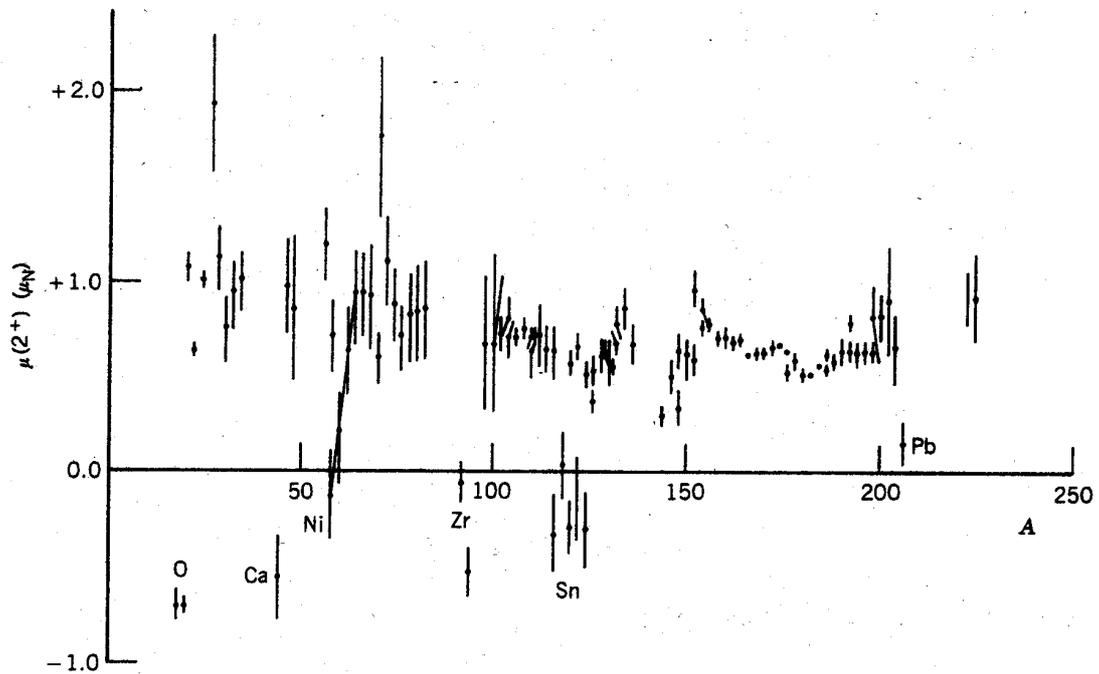
- Vibración cuadrupolar: $\lambda = 2$
 - Efecto de 1 fonón cuadrupolar sobre un estado 0^+
 - ✓ Aumenta en dos unidades el valor de l
 - ✓ No cambia la paridad, ya que es de paridad $(-1)^2$
 - ✓ El núcleo queda en un estado excitado 2^+ , en acuerdo con los primeros estados excitados de los núcleos esféricos *par-par*
 - ✓ El modelo **no** predice la energía del estado 2^+
 - Efecto de 2 fonones cuadrupolares sobre un estado 0^+
 - ✓ Energía doble a la proporcionada por un fonón
 - ✓ Estados finales posibles $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$, tal y como se miden en los espectros vibracionales
 - Efecto de 3 fonones cuadrupolares sobre un estado 0^+
 - ✓ Energía triple a la proporcionada por un fonón
 - ✓ Estados finales posibles $I^\pi = 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+$



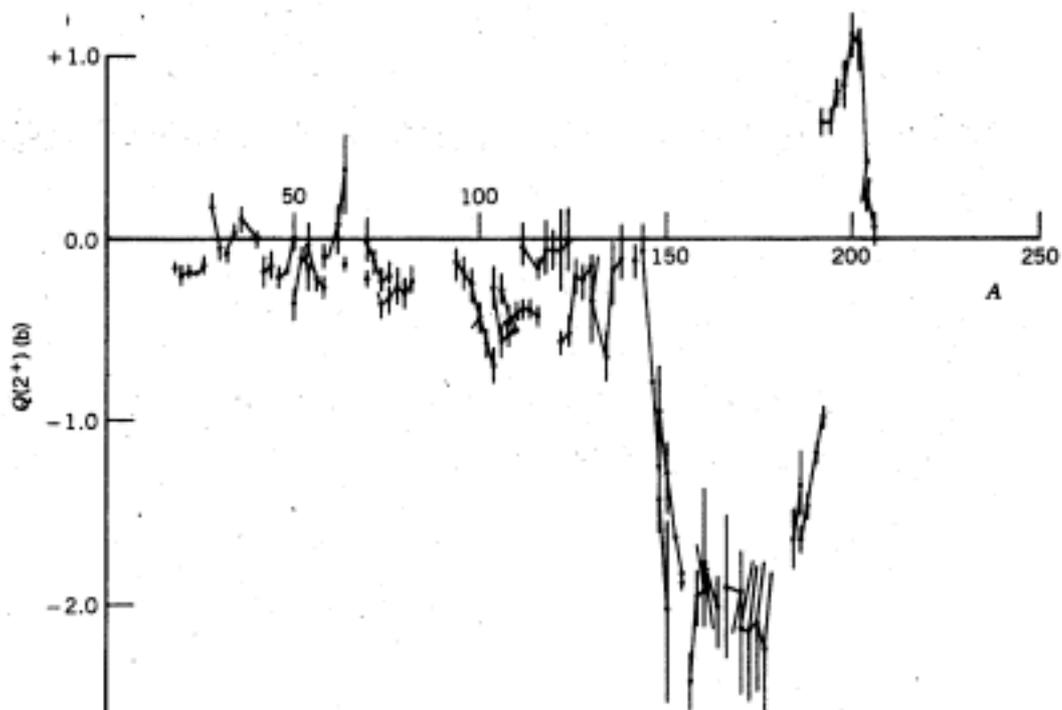
Modelos colectivos (Modelo vibracional)

- Vibración octupolar: $\lambda = 3$
 - Efecto de 1 fonón octupolar sobre un estado 0^+
 - ✓ Aumenta en tres unidades el valor de l
 - ✓ Cambia la paridad, ya que es de paridad $(-1)^3$
 - ✓ El núcleo queda en un estado excitado 3^- , estado que se mide en los núcleos vibratoriales, con energías por encima del triplete de 2 fonones cuadrupolares
 - A energías mayores la estructura vibracional se mezcla con la estructura del desapareamiento de nucleones del estado fundamental
- Predicciones del modelo vibracional
 - $Q(2^+) \approx 0$ para núcleos esféricos (cierto para núcleos con $A < 150$)
 - $\frac{E(4^+)}{E(2^+)} \approx 2$ si $A < 150$
 - $\mu(2^+) = 2\frac{Z}{A} \approx 0,8 - 1$

Modelos colectivos (Modelo vibracional)



Momentos magnéticos de los primeros estados 2^+ de núcleos par-par



Momentos cuadrupolares eléctricos de los primeros estados 2^+ de núcleos par-par

Modelos colectivos (Modelo rotacional)

- El modelo rotacional se aplica para los llamados *núcleos deformados*, es decir, que **no** tienen una posición de equilibrio esférica ($150 < A < 190$ y $A > 220$).
- Los momentos cuadrupolares Q de estos núcleos están lejos de ser nulos ($Q \approx -2b$)
- La forma de los núcleos deformados puede expresarse como un elipsoide de revolución

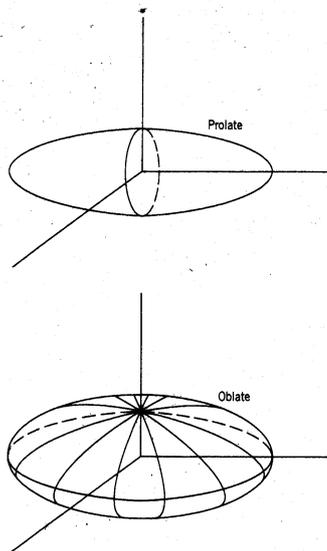
$$R(\theta) = R_m [1 + \beta Y_{20}(\theta)]$$

✓ β es el *parámetro de deformación* $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_m}$

ΔR es la diferencia entre el semieje mayor y menor

$\beta > 0$ elipsoide afeitado (*prolate*)

$\beta < 0$ elipsoide achatado (*oblate*)



El valor medido de Q nos da el parámetro de deformación β de cada núcleo. Se obtiene $\beta \approx 0.29$ para $150 < A < 190$, que es una deformación considerable.

Modelos colectivos (Modelo rotacional)

- Los estados excitados rotacionales se obtienen calculando la energía rotacional de los núcleos.

- La energía de un objeto cuántico en rotación con momento de inercia \mathfrak{I} es:
$$E = \frac{1}{2} \mathfrak{I} \omega^2 = \frac{l^2}{2\mathfrak{I}} = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} I(I+1) \quad I = 0, 1, 2, \dots$$

- Las propiedades de simetría de los núcleos *par-par* solo permiten valores pares del espín nuclear I :

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} I(I+1) \quad I = 0, 2, 4, 6, \dots$$

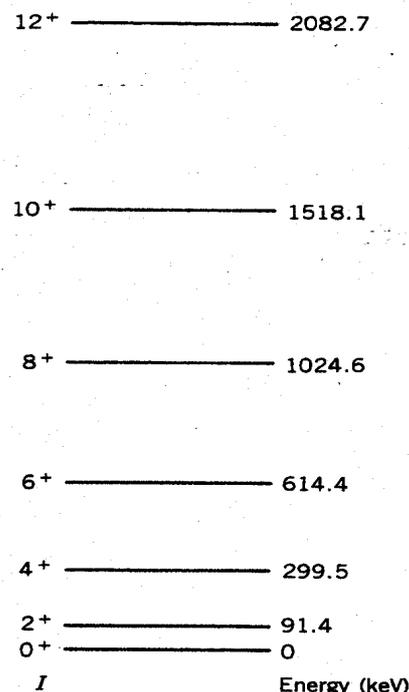
- Se obtienen las llamadas *bandas rotacionales*

$$E(0^+) = 0$$

$$E(2^+) = 6 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

$$E(4^+) = 20 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

$$E(6^+) = 42 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$



Estados excitados rotacionales del ^{164}Er

- El modelo reproduce bien los valores de $\frac{E(4^+)}{E(2^+)}$ de los núcleos con $150 < A < 190$ y $A > 230$

Modelo unificado

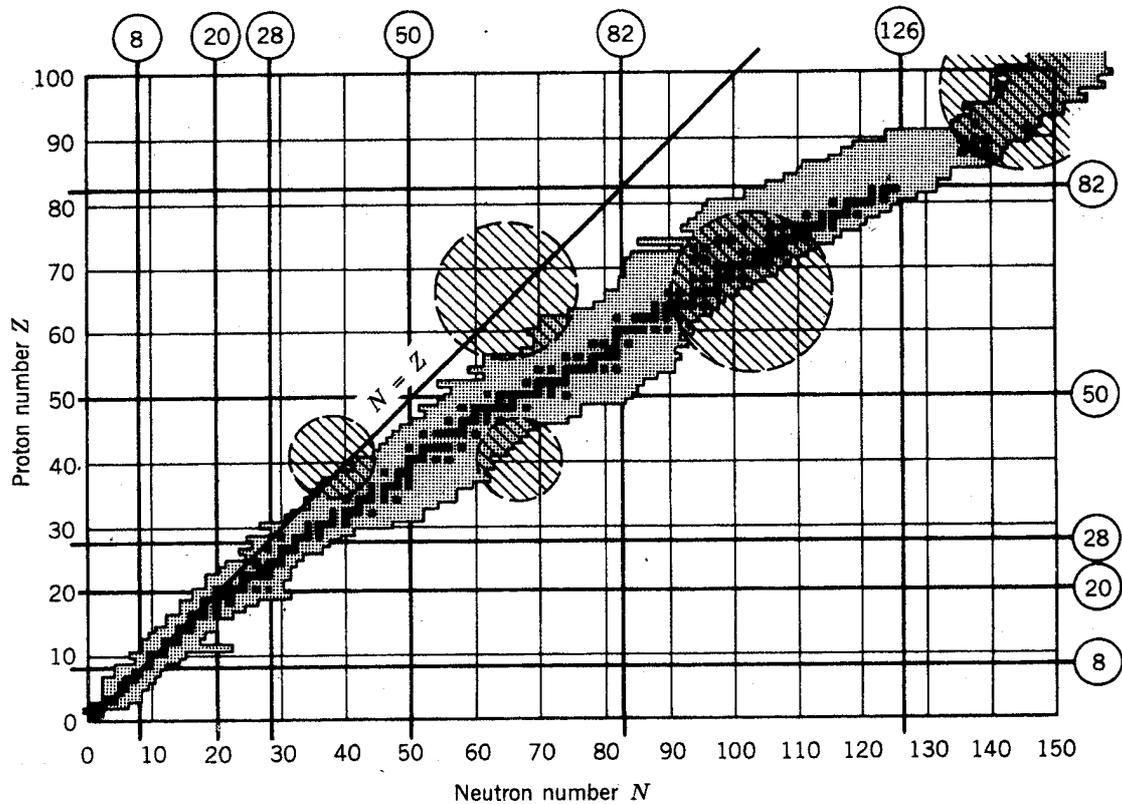


Figure 5.24 The crosshatched areas show the regions far from closed shells where we expect that the cooperative effects of many single-particle shell-model states may combine to produce a permanent nuclear deformation. Such deformed nuclei have been identified in all of the regions where the crosshatched areas overlap the known nuclei.

Modelo unificado

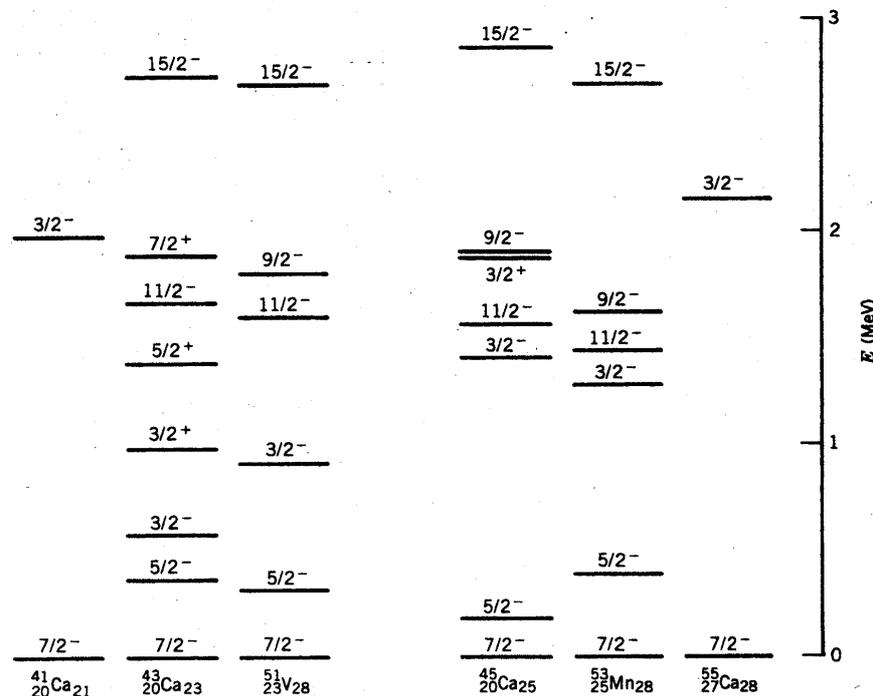
- Aproximación más realista: *modelo nuclear unificado*, combinación entre el modelo de *partícula única* y los modelos *colectivos*.
- Matemáticamente complejo. A modo de ilustración

1. Modelo de capas de muchas partículas
2. Estados de partícula única en núcleos deformados

- **Modelo de capas de muchas partículas.**

- Núcleos con varias partículas fuera de capas cerradas, p.e, ${}_{23}^{51}\text{V}_{28}$ y ${}_{20}^{45}\text{Ca}_{25}$ con configuraciones $(f_{7/2})^3$ y $(f_{7/2})^5$ respectivamente.

- Tienen un espectro energético complejo



- Los estados excitados de muy baja energía y paridad negativa (p.e. el $\frac{5}{2}^-$) no pueden provenir de la excitación de un único nucleón (el primer estado $\frac{5}{2}^-$ del modelo de capas es el $2f_{5/2}$, a 2 MeV por encima)

Modelo unificado

- Pero sí del acoplamiento entre las tres partículas (o los tres huecos) con $j_i = 7/2$
- La suma de momentos angulares $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3$ y el *principio de exclusión de Pauli* restringen los valores del espín nuclear a : $I = \frac{15}{2}, \frac{11}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$
- La paridad de tres partículas de paridad negativa será $(-1)^3 = -1$
- Se reproduce el espectro, si bien la diferencia de energías entre estos niveles hay que analizarla en términos de una *interacción residual* entre las partículas de valencia.
- **Estados de partícula única en núcleos deformados.**

El espectro energético de un núcleo deformado con A *impar* se caracteriza por bandas rotacionales formados a partir de estados de *partícula única* obtenidos con potenciales no esféricos. (*Modelo de Nilsson*).

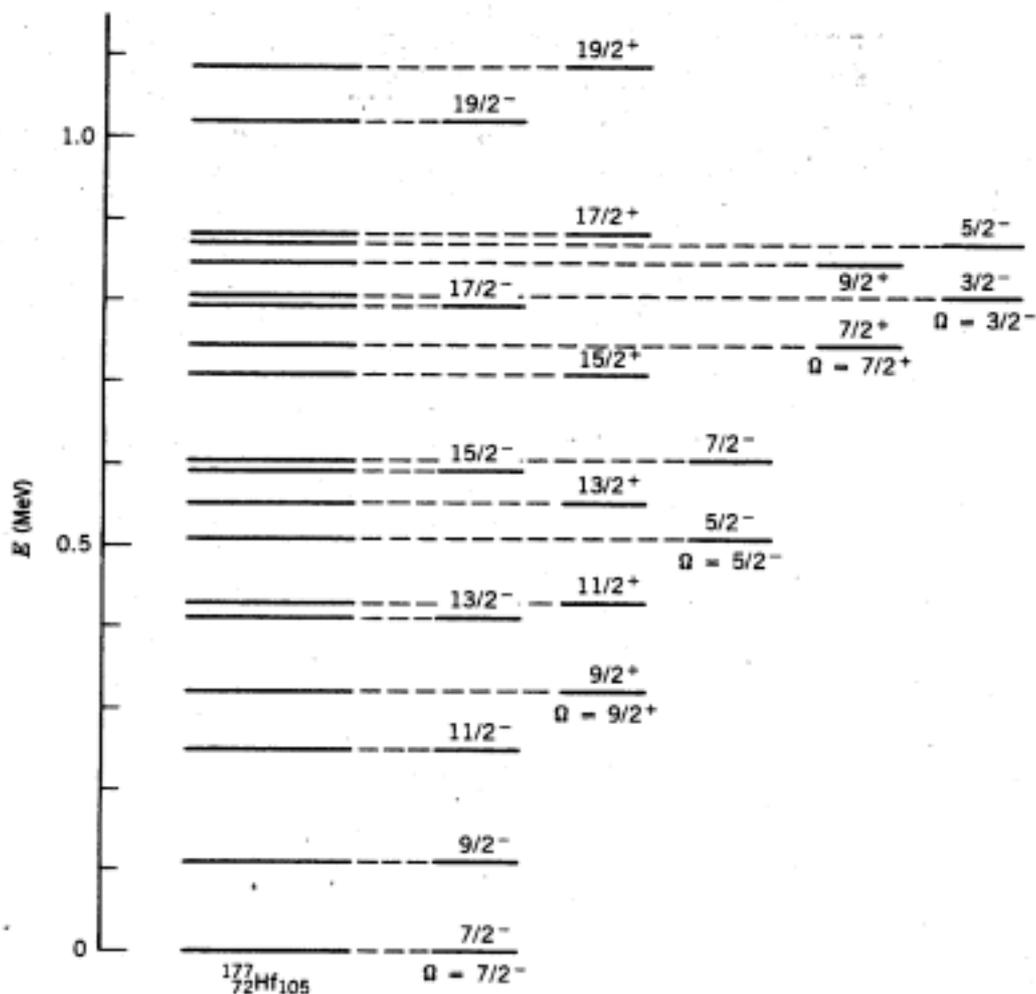
- En los núcleos deformados l no es un buen número cuántico y los estados resultantes son *mezcla* de estados l .
- En función de los estados de l definido, los estados de núcleos deformados se escriben:

$$\psi'(\Omega) = \sum_{l,j} a(Nlj)\psi_{Nlj}$$

- ✓ Ω representa el estado del espín nuclear
- ✓ Los coeficientes de Nilsson $a(Nlj)$ se obtienen de la ecuación de Schrödinger para el potencial deformado y dependen de la deformación β

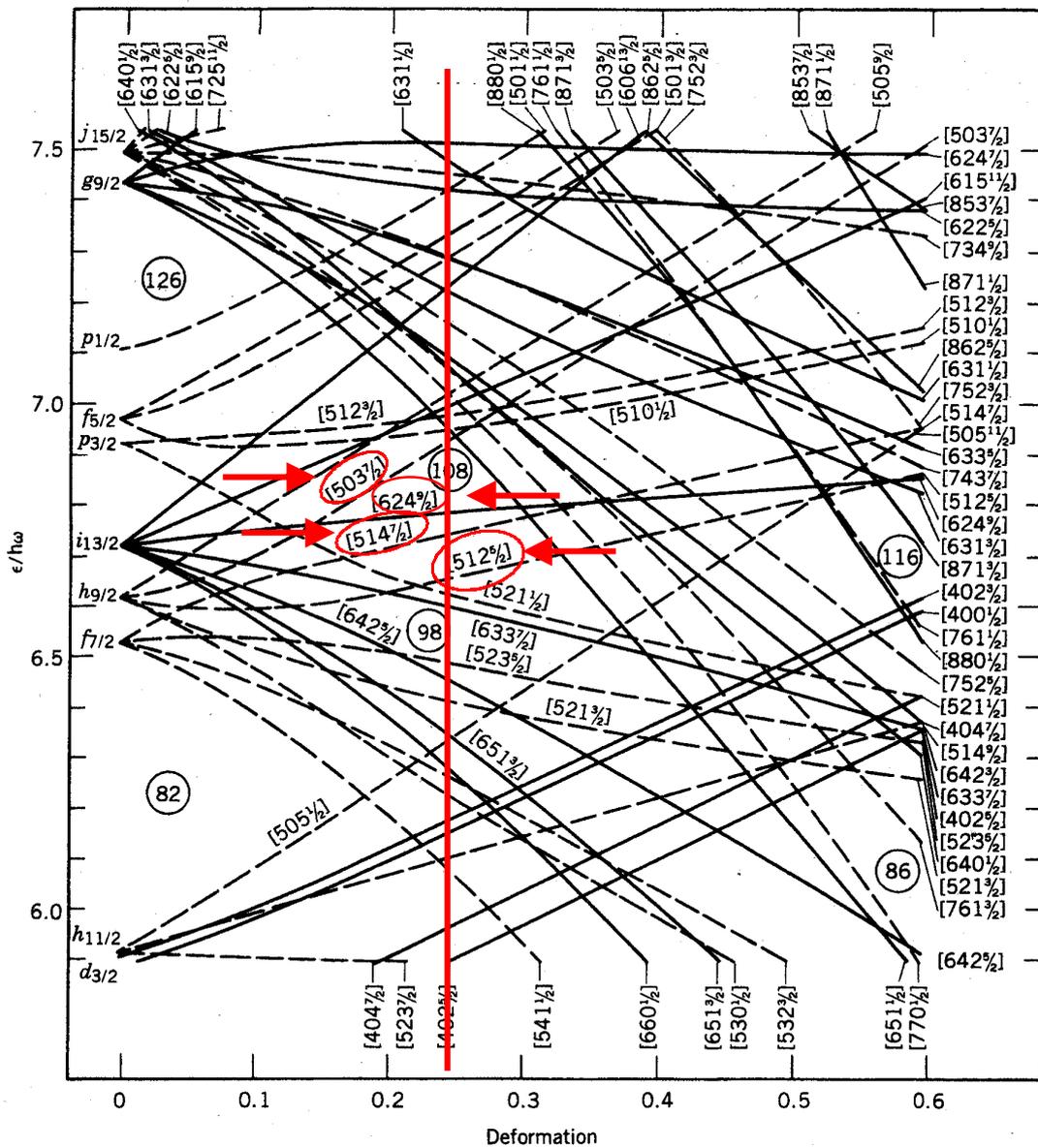
Modelo unificado

- Cada estado I de partícula única en núcleos deformados, admite su propio espectro rotacional, con el espaciado energético proporcional a $I(I+1)$.
- El estado fundamental de cada banda rotacional tiene $I = \Omega$, y a medida que aumenta la energía rotacional el momento angular aumenta siguiendo la secuencia $I = \Omega, \Omega + 1, \Omega + 2, \dots$



Modelo unificado

- Para interpretar los niveles de *partícula única* observados se acude al diagrama de energías en función de la deformación del núcleo, y se van ocupando los niveles de la misma forma que en los núcleos esféricos.



Niveles de energía para neutrones en un potencial deformado prolato
Se señalan los niveles ocupados por el neutrón n° 105 del ^{177}Hf