

# 北京大学2008年自主招生考试数学试题

December 30, 2007

1. 证明: 边长为1的正五边形对角线长度为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .
2. 对于凸六边形 $AC_1BA_1CB_1$ , 已知 $AB_1 = AC_1, BA_1 = BC_1, CA_1 = CB_1$ , 且 $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$ .  
证明: 三角形 $ABC$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的一半.
3. 对于实数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ , 有 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3; a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3$ . 且已知 $\min\{a_1, a_2, a_3\} \leq \min\{b_1, b_2, b_3\}$ .  
证明:  $\max\{a_1, a_2, a_3\} \leq \max\{b_1, b_2, b_3\}$ .
4. 在一系列排球对抗赛(单循环赛)中, 队伍分为南方队和北方队, 南方队比北方队多9支, 且已知南方队的分数之和是北方队的分数之和的9倍(一场比赛中胜者得1分, 负者得0分).  
证明: 得分最高的一支队伍在南方队中.
5. (只理科生做, 文科生不做) 在 $Oxyz$ 空间中, 有一个通过将 $xy$ 平面上的区域 $0 \leq y < 2 - x^2$ 绕 $y$ 轴旋转得到的不透光立体 $V$ . 且在点 $P(1, 0, 1)$ 处有一发光体. 有一在 $xy$ 平面上的, 圆心在 $O$ 点的圆被照射到的区域大小为 $2\pi$ , 求该圆在阴影中的区域大小.