

Appunti di teoria quantistica dei campi

Stefano Crocco

17 giugno 2009

Indice

1	L'integrale di percorso	2
1.1	La descrizione di Schrödinger e quella di Haisenberg	2
1.1.1	La descrizione di Schrödinger	2
1.1.2	La descrizione di Heisenberg	2
1.2	Il Kernel	3
1.3	Il Kernel per piccoli tempi	3
1.4	Convoluzione	4
1.5	L'integrale di percorso	5
1.6	Gli elementi di matrice	6
1.7	Il funzionale generatore delle funzioni di correlazione	7
A	Integrali gaussiani	9

Capitolo 1

L'integrale di percorso

1.1 La descrizione di Schrödinger e quella di Heisenberg

In¹ meccanica quantistica, esistono due modi principali per descrivere l'evoluzione di un sistema: la descrizione di Schrödinger e quella di Heisenberg.

1.1.1 La descrizione di Schrödinger

Nella descrizione di Schrödinger, gli stati dipendono dal tempo, mentre gli operatori (a meno di una dipendenza esplicita) no. L'evoluzione del sistema è data dall'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle = \hat{H} |\alpha_S(t)\rangle, \quad (1.1.1)$$

dove H è l'hamiltoniana del sistema (che assumiamo non dipendere dal tempo). Formalmente, le soluzioni dell'equazione precedente possono essere scritte come:

$$|\alpha_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle$$

In particolare, nella maggior parte dei casi, considereremo $t_0 = 0$ e scriveremo la generica soluzione dell'equazione di Schrödinger come:

$$|\alpha_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\alpha\rangle \quad (1.1.2)$$

L'elemento di matrice di un operatore $\hat{\Omega}_S$ tra due stati $|\alpha_S(t)\rangle$ e $|\beta_S(t)\rangle$ è dato da:

$$\langle \alpha_S(t) | \hat{\Omega}_S | \beta_S(t) \rangle = \langle \alpha | e^{i\hat{H}t} \hat{\Omega}_S e^{-i\hat{H}t} | \beta \rangle \quad (1.1.3)$$

1.1.2 La descrizione di Heisenberg

In un certo senso, la descrizione di Heisenberg è l'opposto di quella di Schrödinger, in quanto in essa sono gli operatori, e non gli stati, a evolvere nel tempo. Dato un operatore $\hat{\Omega}_S$ in descrizione di Schrödinger, il corrispondente operatore in descrizione di Heisenberg è dato da:

$$\hat{\Omega}_H = e^{i\hat{H}t} \hat{\Omega}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad (1.1.4)$$

mentre lo stato in descrizione di Heisenberg corrispondente allo stato $|\alpha_S(t)\rangle$ in descrizione di Schrödinger è:

$$|\alpha_H\rangle = e^{i\hat{H}t} |\alpha_S(t)\rangle = e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}t} |\alpha\rangle = |\alpha\rangle. \quad (1.1.5)$$

L'evoluzione temporale di un operatore in descrizione di Heisenberg si ottiene derivando la 1.1.4 rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\Omega}_H &= \frac{d}{dt} \left(e^{i\hat{H}t} \hat{\Omega}_S e^{-i\hat{H}t} \right) = i\hat{H} e^{i\hat{H}t} \hat{\Omega}_S e^{-i\hat{H}t} + e^{i\hat{H}t} \frac{\partial \hat{\Omega}_S}{\partial t} e^{-i\hat{H}t} - i e^{i\hat{H}t} \hat{\Omega}_S e^{-i\hat{H}t} \hat{H} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Omega}_S \right)_H + i\hat{H} \hat{\Omega}_H - i\hat{\Omega}_H \hat{H} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Omega}_S \right)_H + i [\hat{H}, \hat{\Omega}_H]. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

¹usualmente, lavoreremo sempre in unità di misura con $\hbar = c = 1$

In particolare, se l'operatore non ha una dipendenza esplicita dal tempo, l'espressione precedente diventa semplicemente:

$$\frac{d}{dt}\hat{\Omega}_H = i [\hat{H}, \hat{\Omega}_H] \quad (1.1.7)$$

Per concludere, in descrizione di Heisenberg, l'elemento di matrice di un operatore è dato da:

$$\langle \alpha_S(t) | \hat{\Omega}_S | \beta_S(t) \rangle = \langle \alpha | e^{i\hat{H}t} \hat{\Omega}_S e^{-i\hat{H}t} | \beta \rangle = \langle \alpha | \hat{\Omega}_H | \beta \rangle \quad (1.1.8)$$

1.2 Il Kernel

Consideriamo un sistema con un grado di libertà e indichiamo con $\hat{q}(t)$ e $\hat{p}(t)$ rispettivamente la sua coordinata canonica e il suo momento coniugato in descrizione di Heisenberg. La loro relazione di commutazione è:

$$[\hat{q}(t), \hat{q}(t)] = i \quad (1.2.1)$$

In generale $[\hat{q}(t), \hat{q}(t')] \neq 0$, per cui non è possibile diagonalizzare contemporaneamente due operatori posizione a tempi diversi. È invece possibile scegliere una base di autostati di $\hat{q}(t)$ per un tempo t fissato. Indichiamo tali stati con $|q, t\rangle$. Per definizione, $\hat{q}(t) |q, t\rangle = q |q, t\rangle$.

Consideriamo ora uno stato iniziale $|q_i, t_i\rangle$ e uno stato finale $|q_f, t_f\rangle$, rispettivamente autostati di $\hat{q}(t_i)$ e $\hat{q}(t_f)$. Definiamo la funzione $K(q_f, q_i; t_f - t_i)$, detta *Kernel* come:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \quad (1.2.2)$$

$K(q_f, q_i; t_f - t_i)$ rappresenta l'ampiezza di transizione dallo stato $|q_i, t_i\rangle$ allo stato $|q_f, t_f\rangle$. Passando in descrizione di Schrödinger e indicando con $|q_i\rangle$ e $|q_f\rangle$ i due stati $|q(t_i)\rangle_S$ e $|q(t_f)\rangle_S$, che sono autostati di \hat{q}_S con autovalori q_i e q_f , possiamo scrivere:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \langle q_f | e^{i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle, \quad (1.2.3)$$

il che mostra che effettivamente il Kernel non dipende singolarmente da t_f e t_i , ma solo dalla loro differenza.

Gli autostati di \hat{q} e \hat{p} formano un insieme completo e sono normalizzati:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q\rangle \langle q| = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle \langle p| = 1 \quad (1.2.4)$$

$$\langle q | q' \rangle = \delta(q - q') \quad \langle p | p' \rangle = \delta(p - p') \quad (1.2.5)$$

1.3 Il Kernel per piccoli tempi

In generale, il Kernel che abbiamo definito nella sezione precedente è molto difficile da calcolare. È tuttavia possibile ottenere approssimazioni sempre migliori quanto più l'intervallo di tempo $t_f - t_i$ è piccolo. In particolare, sappiamo che se $t_f = t_i$, il Kernel si riduce semplicemente alla prima delle 1.2.5, a prescindere dall'hamiltoniana.

Per procedere, consideriamo un'hamiltoniana della forma

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (1.3.1)$$

e poniamo $t_f - t_i = \epsilon$. In questo caso, l'esponenziale che compare nella 1.2.3 può essere scritto come:

$$e^{i\hat{H}(t_f - t_i)} = e^{i\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{i\epsilon V(\hat{q})} + O(\epsilon^2), \quad (1.3.2)$$

dove l'ultimo termine deriva dal commutatore $[\hat{p}^2, V(\hat{q})]$. Usando questo risultato, possiamo ora ottenere un'approssimazione del Kernel per piccoli tempi:

$$K(q_f, q_i; \epsilon) = \langle q_f | e^{i\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{i\epsilon V(\hat{q})} | q_i \rangle = e^{i\epsilon V(q)} \langle q_f | e^{i\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}} | q_i \rangle$$

Introducendo un insieme completo di autostati di \hat{p} , possiamo poi scrivere:

$$K(q_f, q_i; \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \langle q_f | e^{i\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}} | p \rangle \langle p | q_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i\epsilon \frac{p^2}{2m} + i\epsilon V(q_i)} \langle q_i | p \rangle \langle p | q_f \rangle + O(\epsilon^2)$$

Ricordando che

$$\langle p|q_i\rangle = \frac{e^{-ipq_i}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \langle q_f|p\rangle = \frac{e^{ipq_f}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (1.3.3)$$

otteniamo il risultato finale:

$$K(q_f, q_i; \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{i(p(q_f - q_i) - \epsilon H(p, q_i))} + O(\epsilon^2). \quad (1.3.4)$$

Questo è un risultato notevole, in quanto tutti gli operatori quantistici sono stati sostituiti da quantità classiche. In particolare, per un'hamiltoniana della forma 1.3.1, possiamo eseguire l'integrale in p :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{i(p(q_f - q_i) - \epsilon(\frac{p^2}{2m} + V(q_i)))} = e^{-i\epsilon V(q_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i\epsilon\frac{p^2}{2m} + ip(q_f - q_i)}$$

L'integrale è un integrale gaussiano del tipo 1.6, con $\rho = \frac{\epsilon}{m}$ e $\xi = (q_f - q_i)$. Il risultato, pertanto, è:

$$\sqrt{\frac{2\pi m}{\epsilon}} e^{-i\epsilon V(q_i)} e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{(q_f - q_i)^2 m}{2\epsilon}}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione precedente, si ottiene:

$$K(q_f, q_i; \epsilon) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\epsilon}} e^{i\epsilon\left(\frac{(q_f - q_i)^2 m}{2\epsilon^2} - V(q_i)\right)} = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\epsilon}} e^{i\epsilon L(q_i, \dot{q}_i)}, \quad (1.3.5)$$

dove abbiamo definito la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$ come:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{(q_f - q_i)^2 m}{2\epsilon^2} - V(q_i), \quad (1.3.6)$$

con l'idea che la quantità $\frac{q_f - q_i}{\epsilon}$ possa essere interpretata come la derivata di q_i rispetto al tempo.

1.4 Convoluzione

Nella sezione precedente, abbiamo visto come è possibile ottenere un'approssimazione del Kernel che non contenga operatori quantistici nel caso in cui l'intervallo di tempo tra lo stato iniziale e quello finale sia piccolo. Per estendere questo risultato ad un caso generico, studiamo ora le proprietà di *convoluzione* del Kernel. Iniziamo a considerare un tempo generico t , con $t_i < t < t_f$ (con t_i e t_f non più necessariamente vicini). Possiamo scrivere l'operatore di evoluzione temporale da t_i a t_f come:

$$e^{-i\hat{H}(t_i - t_f)} = e^{-i\hat{H}(t_f - t)} e^{-i\hat{H}(t - t_i)}. \quad (1.4.1)$$

Quest'espressione è valida esattamente per un'hamiltoniana indipendente dal tempo (in quanto commuta con sé stessa). Ora introduciamo un insieme completo di autostati di posizione:

$$e^{-i\hat{H}(t_i - t_f)} = e^{-i\hat{H}(t_f - t)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq |q\rangle \langle q| e^{-i\hat{H}(t - t_i)}$$

Sostituendo questo risultato nella 1.2.3, otteniamo:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \langle t_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t)} |q\rangle \langle q| e^{-i\hat{H}(t - t_i)} |q_f\rangle.$$

Per definizione, i due elementi di matrice all'interno dell'integrale altro non sono che due Kernel. Possiamo quindi scrivere:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq K(q_f, q; t_f - t) K(q, q_i; t - t_i) \quad (1.4.2)$$

Questa formula è detta *proprietà di convoluzione* del Kernel. Il suo significato è che la probabilità che una particella che si trova nel punto q_i al tempo t_i si trovi al tempo t_f nel punto q_f dipende dalla probabilità che, in un istante t compreso tra t_i e t_f , essa si trovi in un qualche punto q . Questa dipendenza, però, non

è riferita ad uno specifico punto q , ma ad un punto e ad un istante qualunque (ecco perché compare un integrale).

Questa proprietà diventa particolarmente utile nel momento in cui t è vicino a t_i : $t = t_i + \epsilon$, in quanto in questa situazione siamo in grado di calcolare il secondo Kernel usando l'approssimazione per piccoli tempi:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq K(q_f, q; t_f - t_i - \epsilon) K(q, q_i; \epsilon)$$

Il primo Kernel, invece, non può essere approssimato, in quanto $t_f - t_i - \epsilon$, seppur più piccolo di $t_f - t_i$, è sempre grande. Possiamo però ripetere il ragionamento appena fatto, spezzando in due parti il primo Kernel:

$$K(q_f, q; t_f - t_i - \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' K(q_f, q'; t_f - t') K(q', q; t' - t_i - \epsilon)$$

Come prima, assumiamo che t' sia vicino a $t_i + \epsilon$: $t' = t_i + 2\epsilon$. Risulta:

$$K(q_f, q; t_f - t_i - \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' K(q_f, q'; t_f - t_i - 2\epsilon) K(q', q; \epsilon),$$

da cui:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq dq' K(q_f, q'; t_f - t_i - 2\epsilon) K(q', q; \epsilon) K(q, q_i; \epsilon) \quad (1.4.3)$$

1.5 L'integrale di percorso

Usando le idee sviluppate nella sezione precedente, siamo ora in grado di capire come calcolare un Kernel generico: basta applicare la proprietà di convoluzione fino ad avere tutti intervalli di tempo sufficientemente piccoli per poi applicare l'approssimazione 1.3.4. Il problema è che quest'approssimazione sarà affidabile solo se $\epsilon \rightarrow 0$, il che significa che dovremo applicare la proprietà di convoluzione infinite volte. Da un punto di vista operativo, possiamo pensare di suddividere l'intervallo $t_f - t_i$ in N parti uguali: $t_j = t_0 + j\epsilon$, con $j = 0 \dots N$, dove $t_0 = t_i$ e $t_N = t_f$. Alla fine del calcolo, faremo tendere N ad infinito e quindi $\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}$ a 0. Procedendo in questo modo e applicando la formula di convoluzione otteniamo:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} K(q_{j+1}, q_j; \epsilon). \quad (1.5.1)$$

Applicando l'approssimazione e facendo il limite, quindi, otterremo:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \prod_{j=1}^{N-1} dp_j dq_j e^{i \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left(\frac{p_j(q_{j+1} - q_j)}{\epsilon} - H(p_j, q_j) \right)} \quad (1.5.2)$$

Per $\epsilon \rightarrow 0$, possiamo pensare ai punti q_j come ad una funzione $q(t)$, con $q_j = q(t_0 + j\epsilon)$. Possiamo poi porre:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} = \frac{dq(t)}{dt}.$$

Allo stesso modo, possiamo definire la funzione $p(t)$ come $p_j = p(t_0 + j\epsilon)$.

Con le definizioni precedenti, l'esponente della 1.5.2 diventa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left(\frac{p_j(q_{j+1} - q_j)}{\epsilon} - H(p_j, q_j) \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt (p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t)))$$

Introduciamo poi una notazione compatta per indicare i prodotti dp_j e dq_j :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}p) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{dp_{N-1}}{2\pi} \dots \frac{dp_0}{2\pi} \right) \\ (\mathcal{D}q) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (dq_{N-1} \dots dq_1) \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Con queste notazioni, possiamo riscrivere la 1.5.2 come:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \int (\mathcal{D}q) (\mathcal{D}p) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt (p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t)))} \quad (1.5.4)$$

Questo è l'*integrale di percorso di Feynman* in forma hamiltoniana. Formalmente è l'integrale su tutti i percorsi $(p(t), q(t))$ nello spazio delle fasi, con le condizioni che i punti iniziale e finale siano rispettivamente $q(t_i)$ e $q(t_f)$ e che il tempo t sia compreso tra t_i e t_f . È importante notare che questa è essenzialmente un'espressione simbolica, il cui significato è dato dalla 1.5.2.

Se sostituiamo la 1.3.5 nella 1.5.1, si ottiene la seguente formula per il Kernel:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j e^{i \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 - V(q_j) \right)} = \mathcal{N} \int (\mathcal{D}q) e^{iS[q; t_f, t_i]}. \quad (1.5.5)$$

Con lo stesso ragionamento usato in precedenza, questo può essere scritto formalmente come:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \mathcal{N} \int (\mathcal{D}q) e^{iS[q; t_f, t_i]}, \quad (1.5.6)$$

dove $S[q; t_f, t_i]$ è l'azione classica:

$$S[q; t_f, t_i] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - V(q) \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{q}, q) \quad (1.5.7)$$

e \mathcal{N} è una costante di normalizzazione infinita:

$$\mathcal{N} = \left(\frac{m}{2i\epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{mN}{2i(t_f - t_i)} \right)^{\frac{N}{2}} \quad (1.5.8)$$

Abbiamo detto che effettuare un integrale di percorso significa integrare su tutti i possibili percorsi che vanno da un punto iniziale a un punto finale. Possiamo però anche considerare prima tutti i percorsi che vanno dal punto iniziale ad un punto intermedio q' (ad un certo tempo t') e poi tutti i percorsi che vanno da q' al punto finale. Se poi integriamo su tutti i possibili punti intermedi, ritroviamo l'integrale di partenza. In formule, questo significa che:

$$\int_{q_i}^{q_f} (\mathcal{D}q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' \int_{q_i}^{q'} (\mathcal{D}q) \int_{q'}^{q_f} (\mathcal{D}q)$$

Usando questo risultato e il fatto che l'azione è additiva ($S[q; t_f, t_i] = S[q; t_f, t] + S[q; t, t_i]$), possiamo ri-derivare la formula di convoluzione:

$$K(q_f, q_i; t_f - t_i) = \mathcal{N} \int (\mathcal{D}q) e^{iS[q; t_f, t_i]} = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq' \int_{q'}^{q_f} (\mathcal{D}q_1) \int_{q_i}^{q'} (\mathcal{D}q_2) e^{iS[q_2; t_f, t]} e^{iS[q_1; t, t_i]} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' K(q_f, q'; t_f - t) K(q', q_i; t - t_i) \quad (1.5.9)$$

Un'ultima cosa da notare rispetto all'integrale di percorso è il fatto che non dipende da come suddividiamo l'intervallo $[t_i, t_f]$. Nella trattazione precedente, l'intervallo è stato diviso in N parti uguali, ma avremmo potuto procedere in altri modi (ad esempio, avremmo potuto dividere l'intervallo in due parti uguali, poi dividere ulteriormente ciascuna parte in un numero diverso di parti). Si può dimostrare che, qualunque sia il metodo scelto per effettuare questa divisione, nel momento in cui si effettua il limite in cui tutte le parti tendono a 0, il risultato non dipende più da come è stata fatta la suddivisione.

1.6 Gli elementi di matrice

Passiamo ora a cercare una rappresentazione in termini di integrali di cammino degli elementi di matrice, iniziando da quelli dell'operatore posizione. Indicando con T l'operatore di ordinamento temporale, dato da

$$T(\hat{q}(t''), \hat{q}(t')) = \theta(t'' - t') \hat{q}(t'') \hat{q}(t') + \theta(t' - t'') \hat{q}(t') \hat{q}(t''), \quad (1.6.1)$$

con

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad (1.6.2)$$

vediamo come calcolare l'elemento di matrice

$$\langle q_f, t_f | T(\hat{q}(t'') \hat{q}(t')) | q_i, t_i \rangle \quad (1.6.3)$$

Supponiamo che sia $t_f > t'' > t' > t_i$ (in modo da poter effettuare direttamente l'ordinamento temporale) e che la discretizzazione del tempo sia fatta in modo tale che t' e t'' coincidano con uno dei punti t_j . Poniamo quindi $t' = t_l$ e $t'' = t_k$. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | \hat{q}(t'') \hat{q}(t') | q_i, t_i \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k dq_l \langle q_f, t_f | \hat{q}(t'') | q_k, t_k \rangle \langle q_k, t_k | q_l, t_l \rangle \langle q_l, t_l | \hat{q}(t') | q_i, t_i \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k dq_l q_k q_l \langle q_f, t_f | q_k, t_k \rangle \langle q_k, t_k | q_l, t_l \rangle \langle q_l, t_l | q_i, t_i \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k dq_l q_k q_l K(q_f, q_k; t_f - t_k) K(q_k, q_l; t_k - t_l) K(q_l, q_i; q_l - q_i) \end{aligned}$$

Sostituendo nuovamente q_k con $q(t'')$ e q_l con $q(t')$ e facendo uso della 1.5.9, possiamo scrivere:

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t'') \hat{q}(t') | q_i, t_i \rangle = \int (\mathcal{D}q) (\mathcal{D}p) q(t'') q(t') e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)))}$$

Se $t' > t''$, l'ordine dei termini nel membro a sinistra si inverte, mentre il membro di destra non cambia. Questo significa che l'integrale di percorso calcola sempre gli elementi di matrice di un prodotto temporalmente ordinato di operatori. Per $t_f > t_1 > t_2 \dots > t_n > t_i$, possiamo quindi scrivere:

$$\langle q_f, t_f | T(\hat{q}(t_n) \dots \hat{q}(t_1)) | q_i, t_i \rangle = \int (\mathcal{D}q) (\mathcal{D}p) q(t_n) \dots q(t_1) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)))} \quad (1.6.4)$$

In particolare, per un'hamiltoniana della forma 1.3.1 possiamo effettuare l'integrale su $p(t)$ ed ottenere la formulazione lagrangiana dell'elemento di matrice:

$$\langle q_f, t_f | T(\hat{q}(t_n) \dots \hat{q}(t_1)) | q_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int (\mathcal{D}q) q(t_n) \dots q(t_1) e^{iS[q; t_f, t_i]}, \quad (1.6.5)$$

dove $S[q]$ è l'azione classica.

1.7 Il funzionale generatore delle funzioni di correlazione

Consideriamo l'hamiltoniana \hat{H} di un sistema con i suoi autostati (che assumiamo discreti per semplicità) $|n\rangle$ e i corrispondenti autovalori E_n :

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

Supponiamo che gli autostati siano normalizzati:

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

e che formino un insieme completo:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1.$$

Chiamiamo *vuoto* e indichiamo con $|0\rangle$ lo stato fondamentale. Quello che vogliamo calcolare sono elementi di matrice del tipo

$$\langle 0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) \hat{p}(t'_1) \dots \hat{p}(t'_m)) | 0 \rangle.$$

Per il momento, ci concentreremo sulle quantità più semplici

$$\langle 0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | 0 \rangle.$$

Supponendo di conoscere gli elementi di matrice sopra per tutti gli interi positivi m , data una funzione $j(t)$, possiamo costruire il funzionale $Z[j]$ definito da:

$$Z[j] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_m j(t_1) \dots j(t_m) \langle 0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_m)) | 0 \rangle, \quad (1.7.1)$$

che può essere più semplicemente riscritto come:

$$Z[j] = \langle 0|T \left(e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} dt j(t) \hat{q}(t)} \right) |0\rangle \quad (1.7.2)$$

A partire dal funzionale $Z[j]$, possiamo ricavare gli elementi di matrice prendendo la derivata m -esima calcolata in $j = 0$:

$$\langle 0|T (\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_m)) |0\rangle = \frac{1}{i^m} \frac{\delta^m Z[j]}{\delta j(t_1) \dots \delta j(t_m)} \Big|_{j=0} \quad (1.7.3)$$

Il nostro obiettivo è ottenere una rappresentazione di $Z[j]$ come integrale di percorso. Per fare questo, consideriamo nuovamente la quantità:

$$\langle q_f, t_f | T (\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_m)) | q_i, t_i \rangle .$$

Introducendo due insiemi completi di autostati dell'hamiltoniana, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | T (\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_m)) | q_i, t_i \rangle &= \sum_{n,l} \langle q_f, t_f | n \rangle \langle n | T (\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_m)) | l \rangle \langle l | q_i, t_i \rangle = \\ &= \sum_{n,l} e^{-i(E_n t_f - E_l t_i)} \langle n | T (\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_m)) | l \rangle \end{aligned}$$

Appendice A

Integrali gaussiani

Per calcolare gli integrali di percorso, è comodo saper calcolare alcuni particolari integrali gaussiani, cioè quelli del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{\rho}{2}x^2 + i\xi x}$$

con ρ e ξ reali.

Per raggiungere quest'obiettivo, iniziamo a calcolare l'integrale

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \quad (1.1)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Per fare questo, iniziamo a calcolare $I^2(\lambda)$:

$$I^2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{\lambda}{2}y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 + y^2}$$

Passando in coordinate polari, con $r^2 = x^2 + y^2$ e $dx dy = r dr d\theta$, l'integrale diventa

$$I^2(\lambda) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr r e^{-\frac{\lambda}{2}r^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

L'integrale 1.1, quindi, vale:

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \quad (1.2)$$

Passiamo ora a considerare il caso più generico in cui λ è complesso, ma con parte reale positiva: $\lambda = \rho e^{i\sigma}$, con $\rho > 0$. Anche in questo caso, l'integrale convergerà e varrà il risultato precedente, salvo per il fatto che qui la radice quadrata può assumere due valori:

$$\sqrt{\frac{1}{\rho e^{i\sigma}}} = \frac{e^{-i\frac{\sigma}{2} + in\pi}}{\sqrt{\rho}},$$

con n che può valere 0 o 1. Per capire quale dei due valori dobbiamo scegliere, richiediamo che il risultato si riconduca a quello che abbiamo trovato nel caso reale se $\sigma = 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \begin{cases} \frac{e^0}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} & n = 0 \\ \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{\rho}} & n = 1 \end{cases}$$

Per ottenere lo stesso risultato del caso reale, è quindi evidente che dovrà essere $n = 0$. L'unico problema si ha quando σ si avvicina a 2π : in questo caso, infatti λ torna ad essere reale, ma l'espressione precedente diventa negativa, contrariamente a quanto ci aspetteremmo. Per evitare questo, è necessario richiedere che σ sia minore di 2π :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} e^{-i\sigma/2} \quad \lambda = \rho e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < 2\pi, \quad \rho > 0 \quad (1.3)$$

A questo punto, siamo in grado di passare al caso che ci interessa, vale a dire al caso in cui λ è immaginario, ossia al caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ($\lambda = i\rho$) o $\sigma = \frac{3}{2}\pi$ ($\lambda = -i\rho$). Come si vede, il membro a destra dell'espressione 1.3 non pone problemi particolari se $\sigma \rightarrow \frac{\pi}{2}$ o $\sigma \rightarrow \frac{3}{2}\pi$, per cui possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{\rho}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (1.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\frac{\rho}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (1.5)$$

Per finire, consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{\rho}{2}x^2 + i\xi x}, \quad (1.6)$$

con $\rho > 0$ e ξ reale. L'esponente può essere riscritto come:

$$-i\frac{\rho}{2}x^2 + i\xi x = -i\frac{\rho}{2} \left(x^2 - 2\frac{\xi}{\rho}x \right) = -i\frac{\rho}{2} \left(x^2 - 2\frac{\xi}{\rho}x + \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) = -i\frac{\rho}{2} \left(x - \frac{\xi}{\rho} \right)^2 + i\frac{\xi^2}{2\rho}$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale, esso diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{\rho}{2}(x-\frac{\xi}{\rho})^2 + i\frac{\xi^2}{2\rho}} = e^{i\frac{\xi^2}{2\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{\rho}{2}(x-\frac{\xi}{\rho})^2}$$

ed effettuando il cambio di variabile $y = x - \frac{\xi}{\rho}$, si può ricondurre al primo dei due integrali 1.5. Il risultato, pertanto, è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{\rho}{2}x^2 + i\xi x} = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\xi^2}{2\rho}} \quad (1.7)$$