Физика
Часть I. Электродинамика

Тимофей Николаевич Шилкин
(ПОМИ РАН)

Аннотация

Изложение рассчитано в первую очередь на слушателей с математическим складом мышления. Это значит, что всюду, где это возможно, в нашем курсе будут фигурировать "аксиомы" (за которые будут приниматься фундаментальные физические постулаты и эмпирические законы) и "теоремы", которые мы будем выводить из "аксиом" при помощи чисто математических манипуляций.

0.1 Экспериментальные факты электромагнетизма

1. **Электромагнитные взаимодействия**
   - Взаимодействие материальных точек = пара сил, равных по модулю и противоположных по направлению
   - Заряд — показатель способности тела участвовать в э/м взаимодействии
   - Заряды бывают положительные и отрицательные
   - Одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются
   - Э/м взаимодействия удовлетворяют принципу суперпозиции
2. **Электромагнитное поле**
   - Конечность скорости распространения взаимодействий
   - Математически взаимодействие удобно описывать при помощи полей:

   $$\begin{array}{rl} \text{вместо} & \text{“тело”} \times \text{“тело”} \mapsto \text{“пара сил”} \\ \text{имеем} & \text{“тело”} \mapsto \text{“поле”}, \quad \text{“поле”} \times \text{“тело”} \mapsto \text{“сила”} \end{array}$$

   - Математически поле — это вектор–функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
   - Деление э/м поля на электрическую и магнитную составляющие условно (зависит от СО)
3. **Электрическое поле**
   - сила $\mathbf{f}$, действующая на пробный электрический заряд q в точке $\mathbf{x}$, раскладывается на составляющие $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{эл}} + \mathbf{f}_{\text{маг}}$
   - электричесская составляющая $\mathbf{f}_{\text{эл}}$ — это та составляющая силы $\mathbf{f}$, которой безразлично, движется пробный заряд или покоится — в обоих случаях значение $\mathbf{f}_{\text{эл}}$ одинаково
   - Электрическое поле некоторой системы зарядов — это вектор–функция $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, “отвечающая” за компоненту $\mathbf{f}_{\text{эл}}$
   - Неподвижность того или иного заряда, а следовательно и эл. поле, зависит от выбора СО
4. **Магнитное поле**
   - Силовое воздействие э/м поля на пробный заряд будет разным в зависимости от того, движется этот пробный заряд или покоится
   - $\mathbf{f}_{\text{маг}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{\text{эл}}$
   - Дополнительное силовое воздействие $\mathbf{f}_{\text{маг}}$, которое некоторая система зарядов оказывает на движущийся пробный заряд, характеризуется магнитным полем $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$
   - Магнитное поле не действует на неподвижные заряды
   - Магнитое поле создают движущиеся заряженные тела и/или переменное электрическое поле

1 Электростатическое поле

1.1 Точечный заряд. Закон Кулона

1. **О математическом содержании понятия "электрический заряд"**

   1) "Физическое определение":
   Электрическим зарядом тела называется знаконеопределенная аддитивная функция (слово "знаконеопределенная" означает, что электрический заряд может быть как положительным, так и отрицательным, а слово "аддитивная" означает, что заряд тела равна сумме зарядов составляющих его частей), заданная на множестве всех тел вселенной и характеризующая способность тела изменять пространство вокруг себя в том смысле, что все остальные тела, обладающие зарядом, взаимодействуют с данным телом, причем эти взаимодействия удовлетворяют аксиомам пункта 2.

   2) "Математическое определение":
   Вселенная: $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ — алгебра множеств в $\mathbb{R}^3$ = "множество всех тел"
   Заряд: $q : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ — знаконеопределенная мера на $\mathbb{R}^3$

   3) Примеры "мер":
   $$q = q_0\delta_x,\ \ q(\Omega) = \begin{cases} q_0, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$
   $$dq = \rho\ d\mathbf{x},\ \ q(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$$

2. **"Старая" аксиоматика электростатики (времен Кулона)**

   1) Закон сохранения электрического заряда

Суммарный заряд всех тел замкнутой системы не зависит от времени.

   В система называется замкнутой, если тела этой системы взаимодействуют только друг с другом и не взаимодействуют ни с какими телами, не принадлежащими данной системы.

   2) Закон Кулона
   Две неподвижные материальные точки, обладающие электрическими зарядами q_1 и q_2 и координатами $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, взаимодействуют по правилу ($\mathbf{f}_{ij}$ – сила, действующая со стороны точки j на точку i)
   $$\mathbf{f}_{ij} \ = \ \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \qquad \mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}, \qquad i, j = 1, 2.$$
   Мы пользуемся гауссовой системой единиц СГСЭ, которая, в отличие от "школьной" системы СИ, не включает в закон Кулона размерный коэффициент $1/4\pi\varepsilon_0$.

   3) Принцип суперпозиции
   Для любой точки $\mathbf{x}$ и любого тела Ω сила взаимодействия $\mathbf{x}$ с телом Ω является суммой сил взаимодействий точки $\mathbf{x}$ с составляющими частями тела Ω:
   $$\Omega = \bigcup_j \Omega_j \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Omega) \ = \ \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Omega_j)$$

3. **Электростатическое поле системы точечных зарядов**

Если знать силу $\mathbf{f}_{10}$, с которой обладающая зарядом частица $(q_0, \mathbf{x}_0)$ действует на неподвижную частицу $(q_1, \mathbf{x}_1)$, то на неподвижную частицу с другим зарядом q_1', помещенную в ту же точку пространства $\mathbf{x}_1$, действует сила

$$\mathbf{f'}_{10} = \frac{q_0 q_1'}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}_{10}\frac{q_1'}{q_1}$$

Поэтому $\frac{\mathbf{f}_{10}}{q_1} = \frac{\mathbf{f'}_{10}}{q_1'} = const.$

Таким образом, электрическое “влияние” обладающей зарядом частицы на данную точку пространства можно описывать при помощи некоторой вектор-функции, которая зависит только от характеристик данной частицы, но не от характеристик наблюдателя.

Определение. *Электростатическим полем неподвижной частицы* $(q_0, \mathbf{x}_0)$ называется вектор-функция

$$\mathbf{E}_{q_0,\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{E}_{q_0,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Значение $\mathbf{E}_{q,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ называется *напряженностью* электрического поля в точке $\mathbf{x}$.

Электростатическим полем системы частиц $\Omega = \bigcup(q_i, \mathbf{x}_i)$ называется вектор-функция

$$\mathbf{E}_\Omega : \mathbb{R}^3 \setminus \cup\big\{\mathbf{x}_i\big\} \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{E}_\Omega(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{E}_{q_i,\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}).$$

4. **Сингулярности поля системы точечных зарядов**

Электростатичесое поле точечных зарядов имеет особенности в точках нахождения зарядов. В остальных точках поле является бесконечно дифференцируемой функцией.

$$\mathbf{E} \in C^\infty\Big(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup\{x_j\}\Big)$$

1.2 Потенциальность электростатического поля

1. **Определение потенциального поля**

   Определение. Векторное поле $\mathbf{E} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ называется *потенциальным в области* Ω, если оно является градиентом скалярной фцнкции:

   $$\exists\, \varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \qquad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(\mathbf{x})$$

   Функция φ называется *потенциалом* поля $\mathbf{E}$.

2. **Критерий потенциальности поля в $\mathbb{R}^3$**

   Теорема. Пусть $\mathbf{E} \in C^1(\Omega)$. Тогда

   1) $\exists\, \varphi \in C^2(\Omega)$: $\quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ в Ω.
   2) Ω — стягиваемая область и $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \varphi \in C^2(\Omega)$: $\quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi$

3. **Потенциальность электростатического поля**

   Теорема. *Электростатическое поле системы точечных зарядов потенциально в области, где нет зарядов:*

   $$\mathbf{E}_\Omega(\mathbf{x}) \;=\; -\nabla\varphi(\mathbf{x}), \qquad \text{где} \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$

4. **Потенциальная энергия частицы в электростатическом поле**

   Определение. *Потенциальной энергией* заряженной частицы $(q, \mathbf{x})$ в электростатическом поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ называется величина

   $$U \;=\; q\varphi(\mathbf{x})$$

5. **Свойства потенциальных полей**

   Теорема.

   1) *Сила, с которой потенциальное поле действует на частицу, зависит только от местоположения частицы и не зависит от ее скорости.*
   2) *Частица, движущаяся в потенциальном поле, сохраняет энергию.*
   3) *Работа потенциального поля при перемещении частицы не зависит от формы траектории, по которой осуществляется перемещение частицы.*

6. **Потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц**

   Пусть имеется замкнутая система из N материальных точек с координатами $\mathbf{x}_i$. Обозначим через

   $$\mathbf{f}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}$$

   суммарную силу, действующую на i-ую точку со стороны остальных точек системы.

Определение. Система материальных точек называется *консервативной*, если если существует функция

$$U : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{N \text{ раз}} \to \mathbb{R}, \qquad \text{такая что}$$

$$\mathbf{f}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N).$$

Функция U называется *потенциальной энергией* консервативной системы.

7. **Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия**

Теорема. *Система неподвижных точечных зарядов* $(q_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (q_N, \mathbf{x}_N)$ *консервативна и ее потенциальная энергия равна*

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \ = \ \frac{1}{2} \ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

Если мы обозначим за φ_i *потенциал кулоновского поля, создаваемого в точке* $\mathbf{x}_i$ *остальными частицами, т.е.*

$$\varphi_i \ := \ \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|},$$

то имеет место формула

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \ = \ \frac{1}{2} \ \sum_{i=1}^{N} \varphi_i q_i$$

Доказательства §1.2

1. Свойства потенциальных полей.

1.3 Непрерывно распределенный заряд

1. **Кулоновское поле непрерывно распределенного заряда**

   Теорема. Электростатическое поле системы неподвижных зарядов, распределенных в пространстве с плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, вычисляется по формуле

   $$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\; d\mathbf{y}$$

2. **Потенциальность кулоновского поля**

   Теорема. Электростатическое поле системы неподвижных зарядов, распределенных в пространстве с плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, является потенциальным:

   $$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(\mathbf{x}), \qquad \text{где} \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; d\mathbf{y}$$

   Функция φ называется *потенциалом Ньютона* с плотностью ρ. Отметим, что потенциал Ньютона $\varphi = \mathcal{K}\rho$ — это интегральный оператор

   $$\mathcal{K} : C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad (\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\; d\mathbf{y},$$

   ядро $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ которого является ядром со “слабой особенностью”.

3. **Гладкость кулоновского поля**

   Теорема. Электростатическое поле системы неподвижных зарядов, распределенных в пространстве с плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, является гладким и убывает на бесконечности “кулоновским образом”

   $$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \quad \Longrightarrow \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \exists\, C_k : \quad |\nabla^k\varphi(\mathbf{x})| \le \frac{C_k}{|\mathbf{x}|^{k+1}}$$

4. **Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия**

   Определение. *Потенциальной энергией кулоновского взаимодействия* системы неподвижных зарядов, распределенных в пространстве с плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, мы будем называть функцию

   $$U[\rho] \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

   Теорема. Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия есть скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ потенциала поля на плотность заряда, порождающего данное поле

   $$U[\rho] \;=\; \frac{1}{2}(\varphi_\rho,\rho)_{L_2(\mathbb{R}^3)} \;=\; \frac{1}{2}(\mathcal{K}\rho,\rho)_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

1.4 Закон Гаусса

1. **“Теорема” Гаусса**

   Пусть внутри ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ находится система неподвижных зарядов q_1, q_2, $\ldots$, q_N (плюс еще какие-то точечные заряды q_{N+1}, q_{N+2}, $\ldots$, q_M вне Ω). Тогда поток электрического поля, создаваемого системой всех зарядов (как внутри, так и вне области Ω), через замкнутую поверхность $\partial\Omega$, пропорционален суммарному заряду, заключенному в Ω:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\ dS_x \;=\; 4\pi \sum_{i=1}^{N} q_i$$

2. **Закон Гаусса — фундаментальная аксиома электродинамики**

   Ранее мы постулировали закон Кулона и вывели из него “теорему” Гаусса. Ниже мы покажем, что для *неподвижных* систем зарядов имеет место и обратная импликация: из “теоремы” Гаусса вытекает закон Кулона. Преимущество “теоремы” Гаусса заключается в том, что вся совокупность опытных фактов указывает, что, в отличие от закона Кулона, она остается справедливой и в случае переменных во времени электрических полей (а заодно и для любых систем зарядов, т.е. для любых *мер* — как непрерывно распределенных, так и сосредоточенных на каких-либо многообразиях).

   Поэтому при построении электродинамики именно закон Гаусса берется за аксиому. А именно, закон Гаусса есть первое из четырех соотношений, известных под общим названием “система Максвелла”. Таким образом, теорема Гаусса перестает быть для нас скромным следствием закона Кулона, а возводится в ранг основных постулатов теории электромагнитных взаимодействий.

   Аксиома (Закон Гаусса) (Взамен закона Кулона и принципа суперпозиции)

   Поток электрического поля $\mathbf{E}$ любой системы зарядов (неподвижных или движущихся, непрерывно распределенных или сосредоточенных) через любую замкнутую гладкую поверхность, не содержащую точечных и линейно сосредоточенных зарядов, пропорционален суммарному заряду $q(\Omega)$, заключенному внутри этой поверхности

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\ dS_x \;=\; 4\pi q(\Omega).$$

3. **Закон Гаусса в дифференциальной форме**

   Теорема. *Предположим, что электрическое поле $\mathbf{E} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является C^1– гладкой в области $\bar{\Omega}$ функцией, а сама область Ω содержит только заряд, распределенный с непрерывной плотностью $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$. Тогда закон Гаусса эквивалентен дифференциальному уравнению*

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \;=\; 4\pi\rho(\mathbf{x}), \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \Omega.$$

4. **Закон Гаусса для потенциального поля**

Теорема. *Если гладкое электрическое поле* $\mathbf{E} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *потенциально в* Ω, *т.е.*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \; = \; -\nabla\varphi(\mathbf{x}), \qquad \forall\; \mathbf{x} \in \Omega,$$

то закон Гаусса эквивалентен уравнению Пуассона для потенциала φ:

$$-\Delta\varphi(\mathbf{x}) \; = \; 4\pi\rho(\mathbf{x}), \qquad \forall\; \mathbf{x} \in \Omega.$$

5. **Краевые условия для электрического поля**

Теорема. *Пусть на гладкой замкнутой поверхности* Σ *сосредоточен некоторый заряд с поверхностной плотностью* $\sigma : \Sigma \to \mathbb{R}$, *и пусть электрическое поле* $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \backslash \Sigma \to \mathbb{R}^3$ *является гладким вне этой поверхности и непрерывным вплоть до поверхности (с одной и с другой стороны). Тогда разность нормальных компонент электрического поля с той и с другой сторны поверхности пропорциональна плотности сосредоточенного на* Σ *поверхностного заряда:*

$$(\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \; = \; 4\pi\sigma(\mathbf{x}), \qquad \forall\; \mathbf{x} \in \Sigma.$$

6. **Кулоновское убывание на бесконечности**

Определение. Будем говорить, что гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ имеет *кулоновское убывание на бесконечности*, и писать при этом

$$\varphi|_{|\mathbf{x}| \to \infty} \; = \; 0,$$

если существуют постоянные $C > 0$ и $R > 0$, такие что

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leq \tfrac{C}{|\mathbf{x}|}, \qquad |\nabla\varphi(\mathbf{x})| \leq \tfrac{C}{|\mathbf{x}|^2}, \qquad \forall\; |\mathbf{x}| \geq R.$$

7. **Эквивалентность закона Кулона и закона Гаусса в электростатике**

Теорема. *Пусть электрический заряд непрерывно распределен в пространстве с объемной плотностью* $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. *Тогда*

1) *кулоновский потенциал рспределенной системы зарядов*

$$\varphi(\mathbf{x}) \; = \; \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \, d\mathbf{y} \tag{1}$$

имеет кулоновское убывание на бесконечности и при этом удовлетворяет закону Гаусса для потенциального поля:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\varphi(\mathbf{x}) & = & 4\pi\rho(\mathbf{x}), \qquad \forall\; \mathbf{x} \in \Omega, \\ \varphi|_{|\mathbf{x}| \to \infty} & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

2) *обратно, всякое гладкое потенциальное поле, потенциал которого удовлетворяет закону Гаусса* (2) *и имеет кулоновское убывание на бесконечности — это поле Кулона, потенциал которого равен* (1).

8. **Два различных взгляда на понятие “точечный заряд”**

Рассуждения прошлого пункта существенным образом использовали гладкость поля, порождаемого непрерывно распределенным в пространстве зарядом. Однако, как мы знаем, в случае, когда весь заряд сосредоточен в точке (т.е. когда соответствующая мера есть δ-функция), поле гладким не является (и, следовательно, описание такого поля при помощи теоремы Гаусса в дифференциальной форме в классическом понимании невозможно).

Нужно отметить, что к понятию “точечный заряд” физики и математики относятся несколько по-разному:

- физики: точечных зарядов в природе не существует. Точечный заряд — это идеализация, которая получается в пределе, когда плотность заряда все больше и больше “группируется” в малой окрестности заданной точки.
- математики: точечный заряд — это мера, сосредоточенная в точке (дельта-функция).

При этом и физикам, и математикам приходится как-то “выкручиваться”:

- физикам необходимо обосновывать, что в результате предельного перехода известный нам закон Кулона для распределенного заряда превращается в “школьный” закон Кулона для точечного заряда;
- математикам, чтобы сформулировать закон Гаусса для точечного заряда, необходимо научиться дифференцировать негладкие функции и придать смысл дифференциальному уравнению в случае, если правая часть есть сингулярная мера. Для этого математики разработали теорию обобщенных функций.

9. **Поле точечного заряда как предел полей зарядов, непрерывно распределенных в малой окрестности**

Пусть распределение заряда в пространстве задается плотностью

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \frac{q}{\varepsilon^3}\,\rho\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon}\right), \qquad \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad \int\limits_{B_1} \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \;=\; 1$$

Тогда потенциал поля, порождаемого данным распределением зарядов, есть

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{y}$$

Вопрос:

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \;\to ??? \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Теорема. *Для любой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, такой что $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \varphi(\mathbf{x}), \qquad \text{где} \qquad \varphi(\mathbf{x}) \;=\; \frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}$$

10. **Закон Гаусса для точечного заряда**

Теорема. *Кулоновский потенциал точечного заряда удовлетворяет закону Гаусса в смысле теории обобщенных функций*

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\, \frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \;=\; 4\pi q\, \delta_{\mathbf{x}_0} \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \qquad (*)$$

11. **Замечания**

   1) Соотношение (∗) означает выполнение интегрального тождества

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\ \Delta\eta(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} \ = \ 4\pi q\ \eta(\mathbf{x}_0), \qquad \forall\ \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

   2) Функция

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) \ = \ \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \qquad \mathcal{E} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3),$$

   равная нормированному на площадь единичной сферы потенциалу поля помещенного в начало координат единичного точечного заряда, называется *фундаментальным решением* для оператора $-\Delta$.

Доказательства в §1.4

1. Доказательство "теоремы" Гаусса.
2. Вывод краевых условий электростатики.
3. Доказательство эквивалентности законов Кулона и Гаусса для распределенного заряда.
4. Обоснование того, что поле распределенных зарядов, сосредоточенных в малой окрестности, в пределе сходится к полю точечного заряда.

1.5 Потенциалы заряженных поверхностей

1. **Поле диполя на больших расстояниях**

   Определение. *Диполем* называется система из двух неподвижных одинаковых по модулю зарядов разного знака.

   Пусть координата отрицательного заряда $-q$ диполя есть $\mathbf{x}_-$, а координата положительного заряда q есть $\mathbf{x}_+$, и пусть $\mathbf{x}_0$ — середина отрезка, соединяющего заряды диполя, т.е. $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_+ + \mathbf{x}_-)$. Прямая, проходящая через точки $\mathbf{x}_-$ и $\mathbf{x}_+$ называется *осью диполя*, вектор $\mathbf{r} = \mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-$ — *плечом диполя*, а вектор $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ — *электрическим моментом диполя.*

   Теорема. *Потенциал электростатического поля, порождаемого диполем, на больших расстояниях от диполя (т.е. при $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$), равен*

$$\varphi(\mathbf{x}) \;=\; \frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\;\left(\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2} \;+\; o\Big(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\Big)\right)$$

2. **Элементарный диполь. Закон Гаусса для элементарного диполя**

   Определение. *Элементарным диполем* называется идеализированная система зарядов, которая получается в пределе, когда длина плеча диполя $\mathbf{r}_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{l}$, $|\mathbf{l}| = 1$, стремится к нулю (т.е. $\varepsilon \to 0$), а величина зарядов q_ε и $-q_\varepsilon$ при этом увеличивается таким образом, что для любого $\varepsilon > 0$ электрический момент диполя остается постоянным:

$$\mathbf{p} \;=\; q_\varepsilon \mathbf{r}_\varepsilon \;=\; \mu\mathbf{l} \;=\; const, \qquad q_\varepsilon \;=\; \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

   Теорема. *Элементарному диполю соответсвует система зарядов, “плотность” которой является обобщенной функцией*

$$-\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}(\mu\delta_{\mathbf{x}_0}) \;\in\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \qquad \text{где} \qquad -\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}(\mu\delta_{\mathbf{x}_0})(\eta) \;\overset{\text{def}}{=}\; \mu\,\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{l}}(x_0), \qquad \forall\,\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

   Элементарный диполь создает в пространстве электростатическое поле, потенциал которого равен

$$\varphi(\mathbf{x}) \;:=\; \mu\,\frac{\mathbf{l}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3} \;=\; \mu\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}.$$

   Закон Гаусса для элементарного диполя имеет вид

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\Big(\;\mu\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\;\Big) \;=\; -4\pi\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}(\mu\delta_{\mathbf{x}_0}) \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

3. **Электростатические поля заряженных поверхностей. Потенциалы**

   Пусть Σ — гладкая ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$, и пусть $\sigma \in C^\infty(\Sigma)$ — плотность поверхностного заряда на Σ, а $\mu \in C^\infty(\Sigma)$ — плотность дипольного заряда на поверхности Σ. Эти системы неподвижных зарядов создают в пространстве следующие поля:

1) Потенциал простого слоя

$$\varphi_\sigma(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_\Sigma \frac{\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; dS_y$$

— создается поверхностным зарядом на Σ

2) Потенциал двойного слоя:

$$\varphi_\mu(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_\Sigma \frac{\mu(\mathbf{y})\; \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\; dS_y \;=\; \int\limits_\Sigma \mu(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; dS_y$$

— создается дипольным зарядом на Σ

4. **Свойства потенциала простого слоя**

Теорема. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная гладкая область, $\sigma\in C^\infty(\partial\Omega)$. Положим*

$$\varphi(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; dS_y, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Тогда

1) *потенциал простого слоя φ непрерывен во всем пространстве: $\varphi\in C(\mathbb{R}^3)$, а соответствующее электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})=-\nabla\varphi(\mathbf{x})$ является гладким в $\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$ вплоть до $\partial\Omega$ с той и с другой стороны*
2) *на поверхности $\partial\Omega$ нормальные компоненты поля имеют разрыв, пропорциональный плотности поверхностного заряда:*

$$(\mathbf{E}^{\text{внеш.}}-\mathbf{E}^{\text{внутр}})\cdot\boldsymbol{\nu} \;=\; 4\pi\sigma \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

3) *потенциал простого слоя удовлетворяет закону Гаусса во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ в смысле теории обобщенных функций:*

$$-\Delta T_\varphi \;=\; 4\pi\sigma\delta_{\partial\Omega} \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

что озачает выполнение интегрального тождества

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(\mathbf{x})\Delta\eta(\mathbf{x})\; d\mathbf{x} \;=\; 4\pi\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})dS_x, \qquad \forall\;\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

4) *потенциал φ имеет кулоновское убывание на бесконечности.*
5) *обратно, всякая функция $\varphi\in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, убывающая на бесконечности и удовлеторяющее закону Гаусса, является потенциалом простого слоя с плотностью σ:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta T_\varphi &=& 4\pi\sigma\delta_{\partial\Omega} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \varphi|_{|x|\to\infty} &=& 0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; dS_y.$$

5. **Свойства потенциала двойного слоя**

Теорема. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная гладкая область, $\mu\in C^\infty(\partial\Omega)$. Положим*

$$\varphi(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega}\mu(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\; dS_y, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Тогда

1) *потенциал двойного слоя φ является гладким в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ вплоть до $\partial\Omega$ с той и с другой стороны*

2) *на поверхности $\partial\Omega$ функция φ имеет скачок, пропорциональный плотности дипольного заряда:*

$$\varphi^{\text{внеш.}} - \varphi^{\text{внутр}} \;=\; 4\pi\mu \quad \textit{на} \quad \partial\Omega,$$

а нормальная компонента поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(\mathbf{x})$ непрерывна на $\partial\Omega$:

$$\mathbf{E}^{\text{внеш.}} \cdot \boldsymbol{\nu} \;=\; \mathbf{E}^{\text{внутр}} \cdot \boldsymbol{\nu} \qquad \textit{на} \quad \partial\Omega.$$

3) *потенциал двойного слоя удовлетворяет закону Гаусса во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ в смысле теории обобщенных функций:*

$$-\Delta T_\varphi \;=\; -4\pi\,\frac{\partial}{\partial\nu}(\mu\delta_{\partial\Omega}) \quad \textit{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

что озачает выполнение интегрального тождества

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x})\Delta\eta(\mathbf{x})\;d\mathbf{x} \;=\; 4\pi \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{x})\frac{\partial\eta}{\partial\nu}(\mathbf{x})\;dS_x, \qquad \forall\,\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

4) *потенциал двойного слоя имеет сверхкулоновское убывание на бесконечности.*

5) *обратно, всякая функция $\varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, убывающая на бесконечности и удовлеторяющая закону Гаусса, является потенциалом двойного слоя с плотностью σ:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta T_\varphi &=& 4\pi\dfrac{\partial}{\partial\nu}(\mu\delta_{\partial\Omega}) \ \textit{в}\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \varphi\big|_{|x|\to\infty} &=& 0 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \varphi(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\nu_{\mathbf{y}}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\;dS_y.$$

6. Преимущества описания электростатических полей при помощи теории обобщенных функций

Задание потенциала $\varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$ при помощи соотношения

$$\left\{\begin{array}{c} -\Delta T_\varphi \;=\; 4\pi \text{ мера } \mu \quad \textit{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \varphi\big|_{|x|\to\infty} = 0 \end{array}\right.$$

имеет следующие преимущества:

1) оно определяет функцию φ сразу во всем $\mathbb{R}^3$ (а не в какой-то отдельной подобласти)

2) оно указывает, в каких точках функция φ имеет особенности:

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda), \qquad \Lambda \subset \operatorname{sing\,supp}\mu$$

3) оно описывает асимптотическое поведение функции φ вблизи особых точек

7. **Сводка результатов о сингулярностях кулоновских полей**

Источник	Гладкость	Особенность	Энергия	Уравнение
Точечный заряд $(q, \mathbf{x}_0)$	$\mathbf{E} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}_0\})$	$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rvert^2}$	$= \infty$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q \delta_{\mathbf{x}_0}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ Обобщ. функции
Линейный контур Γ	$\mathbf{E} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$	$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{\operatorname{dist}(\mathbf{x},\Gamma)}$	$= \infty$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \lambda \delta_\Gamma$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ Обобщ. функции
Диполи на поверхности Σ	$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ φ огр. в $\mathbb{R}^3$ φ непр. вплоть до Σ	$(\varphi_2 - \varphi_1)\rvert_\Sigma = 4\pi\mu$ скачок на Σ	$< \infty$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \frac{\partial}{\partial\nu}(\mu\delta_\Sigma)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ Обобщ. функции
Заряженная поверхность Σ	$\mathbf{E} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ $\mathbf{E}$ огр. в $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{E}$ непр. вплоть до Σ	φ непр. на Σ $(\mathbf{E}_{2\nu} - \mathbf{E}_{1\nu})\rvert_\Sigma = 4\pi\sigma$ скачок на Σ	$< \infty$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sigma \delta_\Sigma$ в $W_2^{-1}(\mathbb{R}^3)$ Пр–ва Соболева
Объемный заряд ρ	$\mathbf{E} \in C(\mathbb{R}^3)$	нет особенностей	$< \infty$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ Классич.

Доказательства в §1.5

1. Обоснование формулы для потенциала точечного диполя.
2. Вывод закона Гаусса для элементарного диполя.
3. Потенциал простого слоя удовлетворяет закону Гаусса в смысле теории обобщенных функций.

1.6 Закон электростатической индукции

1. **Краевые условия электростатики**

   Пусть по поверхности Σ распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma \in C^\infty(\Sigma)$. Этот заряд создает поле, потенциал которого — это потенциал простого слоя
   $$\varphi(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_\Sigma \frac{\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dS_y, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$
   Мы уже знаем, что потенциал φ непрерывен во всем пространстве, а нормальная компонента поля $\mathbf{E}(x) = -\nabla\varphi(\mathbf{x})$ имеет на поверхности Σ разрыв, пропорциональный плотности заряда. Таким образом, на поверхности Σ выполняются соотношения:
   $$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}_{2\nu}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_{1\nu}(\mathbf{x}) &=& 4\pi\sigma(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}_{2\tau}(\mathbf{x}) &=& \mathbf{E}_{1\tau}(\mathbf{x}) \end{array} \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \Sigma.$$
   Здесь мы использовали обозначения $\mathbf{E}_\nu = \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E} - (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$.

2. **Проводники в электростатическом поле**

   Проводники — тела, в состав которых входит значительное количество заряженных частиц, способных свободно перемещаться в пределах всего объема тела. Под действием внешнего электрического поля свободные заряды проводника перемемещаются, образуя поверхностный заряд на границе проводника. Этот поверхностный заряд создает поле, которое накладывается на внешнее электрическое поле.

   Мы предполагаем, то изначально проводник электронейтрален (количество положительных зарядов в проводнике равно количеству отрицательных), и при этом проводник содержит неограниченный запас свободных зарядов (способных, в случае необходимости, скомпенсировать действие любого физически реализуемого внешнего поля).

3. **Закон электростатической индукции**

   В электростатическом случае все заряды в пространстве (в частности, все свободные заряды в проводнике) являются неподвижными. Это значит, что сила, действующая на свободные заряды внутри проводника, равна нулю (иначе свободные заряды внутри проводника начали бы двигаться, и у нас не было бы "статики"). Следовательно, полное поле в проводнике равно нулю. Таким образом, имеет место следующий экспериментальный факт, который является нашим базовым постулатом всей электростатики проводников:

   Аксиома (Закон электростатической индукции)

   1) *При помещении проводника Ω во внешнее электростатическое поле, свободные заряды в проводнике перераспределяются таким образом, что на границе проводника $\partial\Omega$ образуется заряд с поверхностной плотностью σ:*
   $$\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x})\, dS_x \;=\; 0,$$
   причем распределение свободных зарядов на поверхности проводника таково, что суммарное электромагнитное поле внутри проводника равно нулю:
   $$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \;=\; 0, \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \Omega.$$

2) *При сообщении проводнику Ω внешнего свободного заряда q этот заряд перераспределяются в проводнике, образуется на границе $\partial\Omega$ проводника поверхностный заряд с плотностью σ, такой что*

$$\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x})\ dS_x \ = \ q,$$

причем распределение свободных зарядов на поверхности проводника таково, что суммарное электромагнитное поле внутри проводника равно нулю.

4. **Силовые линии поля $\perp$ поверхности проводника**

Теорема. *Полное электростатическое поле вне проводника Ω таково, что $\mathbf{E}_\tau = 0$ на $\partial\Omega$, т.е. силовые линии полного электростатического поля вне проводника ортогональны поверхности проводника.*

5. **Эквипотенциальность поверхности проводника**

Теорема. *Потенциал электрического поля во всех точках проводника одинаков:*

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} : \qquad \varphi(\mathbf{x}) \ = \ \lambda \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

1.7 Энергия электростатического поля

1. **Энергия электростатического поля**

   Определение. *Энергией* электростатического поля называется L_2–норма напряженности $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ этого поля:

$$W_{\mathbf{E}} \;=\; \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}$$

2. **Энергия кулоновского взаимодействия системы зарядов**

   Определение. Пусть μ — знаконеопределенная мера на $\mathbb{R}^3$, соответствующая некоторому распредеделению зарядов в пространстве. *Потенциальной энергией кулоновского взаимодействия* данной системы зарядов называется функционал (если он корректно определен)

$$U[\mu] \;:=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mu(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \;=\; \frac{1}{2}\,\langle \varphi_\mu, \mu\rangle$$

   В частном случае заряда, непрерывно распределенного в пространстве с объемной плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, получаем

$$U[\rho] \;:=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \;=\; \frac{1}{2}\,(\varphi_\rho, \rho)_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

   В случае заряда, сосредоточенного на поверхности с $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $\sigma \in C(\partial\Omega)$

$$U[\sigma] \;:=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dS_x dS_y \;=\; \frac{1}{2}\,(\varphi_\sigma, \sigma)_{L_2(\partial\Omega)}$$

3. **Связь кулоновской энергии системы зарядов с энергией порождаемого этой системой поля**

   Теорема. *Предположим, что в пространстве имеется система неподвижных зарядов, которой соответствует знаконеопределенная мера μ на $\mathbb{R}^3$. Если полная энергия электростатического поля* $\mathbf{E}$*, создаваемого этой системой зарядов, конечна, то она равна потенциальной энергии кулоновского взаимодействия данной системы зарядов:*

$$W_{\mathbf{E}} \;=\; \frac{1}{4\pi}\, U[\mu]$$

   В частном случае заряда, непрерывно распределенного в пространстве с объемной плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, получаем

$$\frac{1}{8\pi}\|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \;=\; \frac{1}{2}(\varphi_\rho, \rho)_{L_2(\mathbb{R}^3)} \quad\Longleftrightarrow\quad \|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \;=\; -(\Delta\varphi_\rho, \varphi_\rho)_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

   В случае заряда, сосредоточенного на поверхности с $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $\sigma \in C(\partial\Omega)$

$$\frac{1}{8\pi}\|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \;=\; \frac{1}{2}(\varphi_\sigma, \sigma)_{L_2(\partial\Omega)} \quad\Longleftrightarrow\quad \|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \;=\; (\varphi_\sigma, 4\pi\sigma)_{L_2(\partial\Omega)}$$

4. **Проблема бесконечности энергии точечного заряда в классической электродинамике**

Будем интерпретировать точечный заряд как предельный случай непрерывно распределенного заряда. Тогда каждому из двух точечных зарядов $(q_1, \mathbf{x}_1)$ и $(q_2, \mathbf{x}_2)$ будет соответствовать последовательность δ–образных функций:

$$\rho_1^\varepsilon := \rho_{q_1,\mathbf{x}_1}^\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)), \qquad \rho_2^\varepsilon := \rho_{q_2,\mathbf{x}_2}^\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)),$$

$$\int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)} \rho_1^\varepsilon(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \;=\; q_1, \qquad \int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)} \rho_2^\varepsilon(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \;=\; q_2.$$

Суммарная плотность заряда данной системы зарядов равна

$$\rho^\varepsilon \;=\; \rho_1^\varepsilon \;+\; \rho_2^\varepsilon,$$

а потенцальная энергия кулоновского взаимодействия равна

$$U[\rho^\varepsilon] \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho^\varepsilon(\mathbf{x})\rho^\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \;=$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)}\int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)} \frac{\rho_1^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_1^\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}}_{\to\, +\infty \text{ при } \varepsilon\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)}\int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)} \frac{\rho_2^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_2^\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}}_{\to +\infty \text{ при } \varepsilon\to 0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)}\int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)} \frac{\rho_1^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_2^\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}}_{\to\, q_1\varphi_1 \text{ при } \varepsilon\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)}\int\limits_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)} \frac{\rho_2^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_1^\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}}_{\to\, q_2\varphi_2 \text{ при } \varepsilon\to 0},$$

где

$$\varphi_1 = \frac{q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}, \qquad \varphi_2 = \frac{q_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$$

При выводе формулы энергии взаимодействия точечных зарядов стремящиеся к бесконечности интегралы просто отбрасываются, потому что считается, что материальная точка не взаимодействует сама с собой. Бесконечность энергии поля точечного заряда можно интерпретировать, если представить себе, что внутри точечного заряда происходит некое неизвестное нам очень сильное взаимодействие.

Но, строго говря, точечный заряд — не очень хороший (бессмысленный) объект с точки зрения классической электродинамики. Закон Кулона хорошо описывает взаимодействие точечных зарядов только в том случае, если эти заряды находятся друг от друга на большом расстоянии. При сближении точечных зарядов между ними начинают действовать иные, некулоновские силы.

5. **Принцип минимума потенциальной энергии**

Пусть на гладкой замкнутой поверхности $\partial\Omega$ распределен заряд с некоторой поверхностной плотностью $\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Суммарная потенциальная энергия кулоновского взаимодействия системы зарядов σ равна

$$U[\sigma] \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dS_x dS_y \quad - \quad \begin{array}{c}\textit{потенциальная энергия}\\ \textit{поверхностного заряда } \sigma\end{array}$$

Аксиома (Принцип минимума потенциальной энергии)

(взамен закона электростатической индукции)

Свободный суммарный заряд q, переданный проводнику, распределяется по поверхности проводника с поверхностной плотностьтю

$$\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\, dS_x \;=\; q,$$

таким образом, чтобы потенциальная энергия кулоновского взаимодействия данного заряда $U[\sigma]$ принимала наименьшее из всех возможных значений.

6. **Эффект “выметания” электрического заряда на границу проводника**

Заадача. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $q \in \mathbb{R}$ — заданное число. Для всякой борелевской меры μ на $\bar{\Omega}$ обозначим через $U[\mu]$ энергию кулоновского взаимодействия, соответсвующую μ–распределению электрического заряда в Ω:

$$U[\mu] \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

Мы рассматриваем следующую задачу:

$$\begin{gathered} \text{Найти меру } \mu \text{ на } \bar{\Omega}, \text{ такую что } \mu(\bar{\Omega}) \;=\; q \text{ и} \\ U[\mu] \;\le\; U[\tilde{\mu}], \\ \text{для любой другой меры } \tilde{\mu} \text{ на } \bar{\Omega}, \text{ такой, что } \mu(\bar{\Omega}) \;=\; q \end{gathered} \tag{$*$}$$

Теорема.

1) *Решение μ задачи $(*)$ существует и $\operatorname{supp}\mu \subset \partial\Omega$.*
2) *Если поверхность $\partial\Omega$ гладкая, то $\mu = \sigma\delta_{\partial\Omega}$, где $\sigma \in C^{\infty}(\partial\Omega)$.*

Доказательство: 1) — спецкурс “Теория потенциала” кафедры матфизики на матмехе (спецкурс по выбору в 5-ом семестре, читает В.Г. Осмоловский). 2) — аспирантура по матфизике. □

7. **Вывод закона электростатической индукции из принципа минимума потенциальной энергии**

Теорема (Закон электростатической индукции)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Если функция σ является решением вариационной задачи $(*)$, то потенциал простого слоя с плотностью σ

$$\varphi_\sigma(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dS_y$$

постоянен на всей области $\bar{\Omega}$:

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \qquad \varphi_\sigma(\mathbf{x}) = \lambda, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

8. **Теорема Ирншоу (ок. 1840)**

Всякая неподвижная система точечных зарядов, между которыми действуют только кулоновские силы, является неустойчивой.

Математические факты §1.7

1. Правило множителей Лагранжа

   Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, $k < n$. Тогда

$$\left.\begin{array}{c} x \in \mathcal{K} : \\ f(x) \ \le \ f(y), \quad \forall\, y \in \mathcal{K} \\ \mathcal{K} = \{\ y \in \mathbb{R}^n \mid g_j(y) = 0\ \} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \exists\ \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k : \\ g_j(x) = 0 \ \text{ и } \ \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0, \\ L(y, \lambda) = f(y) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(y) \end{array}\right.$$

2. Правило множителей Лагранжа для банаховых пространств

   X — банахово, $J : X \to \mathbb{R}$ и $F_j : X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемы по Гато,

$$\left.\begin{array}{c} u \in \mathcal{K} : \\ J[u] \ \le \ J[v], \quad \forall\, v \in \mathcal{K} \\ \mathcal{K} = \{\ v \in X \mid F_j[v] = 0\ \} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} u \in \mathcal{K} \quad \text{и} \quad \exists\ \lambda_j \in \mathbb{R} : \\ \delta_u L[u, \lambda; w] = 0 \quad \forall\, w \in X \\ \text{где} \ \ L[v, \lambda] = J[v] + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j F_j[v], \\ \delta_u L[u, \lambda; w] := \dfrac{d}{dt} L[u + tw, \lambda]\Big|_{t=0} \end{array}\right.$$

3. Принцип максимума для гармонических функций

   $u \in C^2(\Omega)$, $\quad \Delta u = 0$ в Ω,

$$\exists\ B_R(x_0) \Subset \Omega : \quad u(x_0) = \sup_{x \in B_R(x_0)} u(x) \quad \Longrightarrow \quad u \equiv const \quad \text{в} \ \ \Omega.$$

Доказательства в §1.7

1. Связь потенциальной энергии кулоновского взаимодействия и энергии электростатического поля (для пространственно распределенной системы зарядов и для простого слоя на поверхности).
2. Вывод закона электростатической индукции из принципа минимума потенциальной энергии.

1.8 Элементы электростатики

1. **Краевые задачи электростатики.**

Задача 1 (Проводник во внешнем поле)

Пусть вне проводника $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеется система зарядов с заданной объемной плотностью $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$. Найти:

1) поверхностую плотность заряда $\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}$,
2) потенциал проводника λ,
3) потенциал электрического поля вне проводника $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \to \mathbb{R}$,

такие что

$$\begin{cases} \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x})\, dS_x = 0, \\ -\Delta\varphi = 4\pi\rho \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \varphi\big|_{\partial\Omega} = \lambda, \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 4\pi\sigma, \\ \varphi\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} \to 0. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2 (Задача Робена)

Пусть электронейтральному проводнику $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ сообщили внешний свободный заряд q. Найти:

1) поверхностую плотность заряда $\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}$,
2) потенциал проводника λ,
3) потенциал электрического поля вне проводника $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \to \mathbb{R}$,

такие что

$$\begin{cases} \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x})\, dS_x = q, \\ -\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \varphi\big|_{\partial\Omega} = \lambda, \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 4\pi\sigma, \\ \varphi\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} \to 0. \end{cases} \tag{2}$$

2. **Потенциал Робена**

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Потенциалом Робена*, соответствующим области Ω, называется функция $\varphi_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, такая что

1) φ_0 непрерывна в $\mathbb{R}^3$ и $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$,
2) $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1$ для всех $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$,
3) в области $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ функция φ_0 удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \varphi_0\big|_{\partial\Omega} = 1, \\ \varphi_0\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей. Тогда для области Ω потенциал Робена существует и определен однозначно.*

Теорема 2. *Потенциал Робена φ_0 области Ω равен потенциалу простого слоя с поверхностной плотностью $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_0^{внеш.}}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}$.*

3. **Существование решения задачи Робена**

Теорема. *Для любого $q \in \mathbb{R}$ существует набор $(\lambda, \sigma, \varphi)$, являющийся решением задачи Робена. При этом потенциал поля прямо пропорционален потенциалу Робена области Ω, а поверхностный заряд σ пропорционален нормальной производной потенциала Робена на границе области.*

4. **Емкость уединенного проводника**

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей и путь φ_0 — потенциал Робена области Ω. *Емкостью множества* Ω называется величина суммарного электрического заряда, который необходимо сообщить проводнику, чтобы потенциал проводника стал равен единице (считая, что потенциал равен нулю на бесконечности):

$$C(\Omega) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \sigma_0(\mathbf{x})\; dS_x, \qquad \sigma_0(\mathbf{x}) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}(\mathbf{x})$$

Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей, и путь φ_0 — потенциал Робена области Ω. Тогда емкость множества Ω равна удвоенной энергии поля Робена области Ω:*

$$C(\Omega) \;=\; \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi_0|^2\; d\mathbf{x}.$$

Замечания.

1) В математике емкость определяется для произвольного множества E по формуле

$$C(E) \;=\; \inf\left\{\; \frac{1}{4\pi}\; \|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \mid \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),\;\; \varphi|_E \geq 1 \;\right\}$$

2) Можно показать, что емкость множества обладает всеми свойствами внешней меры на $\mathbb{R}^3$.
3) В курсе физики емкость множества Ω называется *электрической емкостью уединенного проводника*.
4) Как было доказано при решении задачи Робена, суммарный заряд q, сообщенный проводнику, связан с потенциалом λ проводника соотношением

$$\boxed{\lambda \;=\; \frac{q}{C(\Omega)}}$$

где $C(\Omega)$ — электрическая емкость проводника.

5) Отметим, что электрическая емкость уединенного проводника в вакууме определяется исключительно геометрической формой проводника.

5. **Системы проводников**

Пусть Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ — непересекающиеся ограниченные области с гладкими границами и пусть две различные проводящие среды занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно, а область $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ — это вакуум. Предположим, что изначально проводники были электронейтральны, и пусть проводнику Ω_1 сообщили дополнительный свободный заряд q_1, а проводнику Ω_2 — свободный заряд q_2. В соответствии с законом электростатической индукции каждый из зарядов q_i перераспределится по границе $\partial\Omega_i$ соответствующего проводника, образуя на его границе поверхностный заряд с плотностью $\sigma_i : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. При этом полное электростатическое поле внутри каждой из областей Ω_1, Ω_2 равно нулю, то есть потенциал полного поля на каждом из множеств $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ постоянен.

Таким образом, возникает новая задача электростатики:

Задача 3 (Система из двух заряженных проводников)

Пусть электронейтральным проводникам Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ сообщили внешние свободные заряды q_1 и q_2 соответсвенно. Найти:

1) поверхностные плотности зарядов $\sigma_1 : \partial\Omega_1 \to \mathbb{R}$, $\sigma_2 : \partial\Omega_2 \to \mathbb{R}$,
2) потенциалы проводников λ_1, λ_2
3) потенциал полного поля вне проводников $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) \to \mathbb{R}$,

такие что

$$\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int\limits_{\partial\Omega_1} \sigma_1(\mathbf{x})\, dS_x \;=\; q_1, \qquad \int\limits_{\partial\Omega_2} \sigma_2(\mathbf{x})\, dS_x \;=\; q_2, \\ -\Delta\varphi \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2), \\ \varphi\big|_{\partial\Omega_1} = \lambda_1, \qquad \varphi\big|_{\partial\Omega_2} = \lambda_2, \\ \displaystyle -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_1}\Big|_{\partial\Omega_1} \;=\; 4\pi\sigma_1, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_2}\Big|_{\partial\Omega_2} \;=\; 4\pi\sigma_2, \\ \varphi\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} \;\to\; 0. \end{array} \right.$$

Здесь ν_1 — это внешняя нормаль к области Ω_1, а ν_2 — внешняя нормаль к Ω_2.

Теорема. *Для любых q_1, $q_2 \in \mathbb{R}$ существует набор $(\varphi, \lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)$, являющийся решением задачи 3 электростатики.*

Доказательство: Решая внешние задачи Дирихле для оператора Лапласа в области $\mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, потроим функции φ_0^1, $\varphi_0^2 : \mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) \to \mathbb{R}$ как решения следующих задач:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\varphi_0^1 \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2), \\ \varphi_0^1\big|_{\partial\Omega_1} \;=\; 1, \qquad \varphi_0^1\big|_{\partial\Omega_2} \;=\; 0, \\ \varphi_0^1\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} \;=\; 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} \Delta\varphi_0^2 \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2), \\ \varphi_0^2\big|_{\partial\Omega_1} \;=\; 0, \qquad \varphi_0^2\big|_{\partial\Omega_2} \;=\; 1, \\ \varphi_0^2\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} \;=\; 0 \end{array} \right.$$

Будем искать решение задачи 3 в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) \;=\; \lambda_1\varphi_0^1(\mathbf{x}) \;+\; \lambda_2\varphi_0^2(\mathbf{x}), \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 подлежат определению. Отметим, что из определения функций φ_0^1 и φ_0^2 автоматически получаются соотношения

$$\varphi\big|_{\partial\Omega_1} = \lambda_1, \qquad \varphi\big|_{\partial\Omega_2} = \lambda_2.$$

На границах проводников $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ должны выполняться соотношения

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_1}\Big|_{\partial\Omega_1} \;=\; 4\pi\sigma_1, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_2}\Big|_{\partial\Omega_2} \;=\; 4\pi\sigma_2.$$

Поэтому в качестве σ_1 и σ_2 мы возьмем функции

$$\sigma_1(\mathbf{x}) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\left(\lambda_1\,\frac{\partial\varphi_0^1}{\partial\nu_1}(\mathbf{x}) \;+\; \lambda_2\,\frac{\partial\varphi_0^2}{\partial\nu_1}(\mathbf{x})\right)\Big|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega_1},$$

$$\sigma_2(\mathbf{x}) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\left(\lambda_1\,\frac{\partial\varphi_0^1}{\partial\nu_2}(\mathbf{x}) \;+\; \lambda_2\,\frac{\partial\varphi_0^2}{\partial\nu_2}(\mathbf{x})\right)\Big|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega_2}$$

Значения постоянных λ_1 и λ_2 пока еще не определены.

Чтобы определить значения постоянных λ_1 и λ_2, воспользуемся тождествами

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} \sigma_1(\mathbf{x})\, dS_x \;=\; q_1, \qquad \int\limits_{\partial\Omega_2} \sigma_2(\mathbf{x})\, dS_x \;=\; q_2.$$

Подставляя в эти тождества выражения для σ_1 и σ_2, получаем систему для нахождения λ_1 и λ_2:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где коэффициенты C_{ij} определяются по формулам

$$C_{11} \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \varphi_0^1}{\partial \nu_1}(\mathbf{x})\, dS_x, \qquad C_{12} \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial \nu_1}(\mathbf{x})\, dS_x$$

$$C_{21} \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega_2} \frac{\partial \varphi_0^1}{\partial \nu_2}(\mathbf{x})\, dS_x, \qquad C_{22} \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega_2} \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial \nu_2}(\mathbf{x})\, dS_x$$

В случае, если матрица (C_{ij}) обратима, по заданным q_1 и q_2 мы можем найти λ_1 и λ_2, а затем восстановить σ_1, σ_2 и φ.

Мы утверждаем, что при данных q_1, q_2 набор $(\varphi, \lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)$ является решением задачи 3. Действительно, все соотношения системы задачи 3 выполняются. Теорема доказана.

6. Электроемкость системы проводников

Как мы выяснили, заряды системы из двух проводников связаны с установившимися на этих проводниках потенциалами при помощи системы

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

в которой коэффициенты C_{ij} определяются исключительно геометрией областей Ω_1 и Ω_2, то есть формой и взаимным расположеним проводников.

Определение. Коэффициенты C_{11} и C_{22} называются *коэффициентами электрической емкости* системы проводников Ω_1 и Ω_2, а коэффициенты C_{12} и C_{21} — *коэффициентами электрической индукции.*

Теорема (Свойства коэффициентов C_{ij})

1) C_{11}, $C_{22} > 0$
2) $C_{12} = C_{21}$
3) $C_{11}C_{22} - C_{12}^2 > 0$

7. Конденсаторы

Определение. Система из двух заряженных проводников, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку, называется *конденсатором.*

Определение. Пусть C_{11} и C_{22} — коэффициенты емкости обкладок Ω_1 и Ω_2 конденсатора, а C_{12} — коэффициент их индукции. *Емкостью* конденсатора называется число

$$C(\Omega_1, \Omega_2) \;=\; \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}$$

Теорема. *Пусть конденсатор состоит из проводников Ω_1 и Ω_2, и предположим на обкладку Ω_1 помещен положительный свободный заряд q, а на обкладку Ω_2 — отрицательный заряд $-q$. Обозначим через λ_+ потенциал "положительной" обкладки Ω_1, а через λ_- — потенциал "отрицательной" обкладки Ω_2. Тогда*

$$\boxed{\lambda_+ - \lambda_- \;=\; \frac{q}{C(\Omega_1, \Omega_2)}}$$

Здесь $C(\Omega_1, \Omega_2)$ — емкость данного конденсатора.

Математические факты §1.8

1. Существование и единственность решения внешней задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\forall\, a \in C(\partial\Omega) \quad \exists!\; u \in C(\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) : \quad \begin{cases} \Delta u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} \;=\; a, \\ u\big|_{|\mathbf{x}| \to \infty} \;=\; 0. \end{cases}$$

2. Интеграл Гаусса: для любой гладкой ограниченной $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|}\; dS_y \;=\; \begin{cases} -4\pi, & x \in \Omega \\ -2\pi, & x \in \partial\Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

3. Тождество Грина: для любой $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^2$, и любых u, $v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$\int\limits_{\Omega} \Big(v\Delta u - u\Delta v \Big)\; dx = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big)\; dS$$

Доказательства в §1.8

1. Потенциал Робена φ_0 области Ω равен потенциалу простого слоя с поверхностной плотностью $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}$.
2. Эквивалентные определения емкости (энергия поля и суммарный заряд)
3. Существование решения Задачи 3.
4. Свойства коэффициентов емкости и электрической индукции.

2 Элементы классической электродинамики

2.1 Закон сохранения заряда

1. **Закон сохранения заряда**

   В этом параграфе мы изучаем движение большого ансамбля заряженных частиц (типа электронов). Число частиц предполагается столь большим, что можно считать, что эти частицы являются т.н. *сплошной средой*, т.е. отождествляются с точками некоторой подобласти пространства $\mathbb{R}^3$. Заряды таких частиц описываются функцией $\rho(\mathbf{x})$, которая называется *плотностью заряда.* А именно, суммарный заряд всех частиц $q(\Omega)$, занимающих область пространства Ω, определяется как

   $$q(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}.$$

   Если пространственное положение частиц начинает меняться (частицы начинают двигаться), то изменяется и значение плотности заряда в точке $\mathbf{x}$, т.е. функция ρ может зависеть от времени

   $$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \qquad \rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

   Аксиома (Закон сохранения заряда)

   Если в момент $t = 0$ заряженные частицы были распределены в области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ с плотностью $\rho(\,\cdot\,, 0) : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, а за время t эти частицы переместились и стали распределены в пространственной области $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ с плотностью $\rho(\,\cdot\,, t) : \Omega_t \to \mathbb{R}$, то суммарный заряд в той и в другой области одинаков:

   $$q(\Omega_0)\ =\ q(\Omega_t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int\limits_{\Omega_0} \rho(\mathbf{y}, 0)\ d\mathbf{y}\ =\ \int\limits_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}$$

2. **Движение сплошной среды**

   Пусть некая частица P в момент времени $t = 0$ имеет пространственную координату y, а в момент времени t — пространственную координату x. Тогда движение частицы P описывается отображением ψ (которое мы называем *функцией деформации*, или просто *деформацией* сплошной среды)

   $$x = \psi(y, t), \qquad \psi(\,\cdot\,, t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(\,\cdot\,, 0) = id.$$

   Если y фиксировано, а t меняется, отображение ψ описывает *траекторию* частицы P. С другой стороны, при фиксированном t отображение ψ определяет преобразование области Ω, которую частицы занимали в начальный момент времени, на область $\Omega(t)$, которую они занимают в момент времени t.

   Поскольку мы предполагаем, что частицы, различные в начальный момент времени, остаются различными в процессе эволюции, отображение $\psi(\,\cdot\,, t)$ обязано быть обратимым, т.е.

   $$\forall\ t \qquad \exists\ \psi_t^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{где} \quad \psi_t(y) := \psi(y, t).$$

   В нашем курсе мы всегда будем считать, что при любом t ψ_t является диффеоморфизмом.

3. **Лагранжевы координаты**

   Любые характеристики частицы P, зависящие от ее текущего положения в пространстве (т.е. зависящие от координаты x, а также, возможно, и от времени t) представляются некими функциями (скалярными или векторными) от аргументов x и t:

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{или } \mathbb{R}^3), \qquad F = F(x,t)$$

   Для каждой такой функции F можно определить функцию $\hat{F}$

$$\hat{F}(y,t) = F(\psi(y,t),t), \qquad \hat{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{или } \mathbb{R}^3),$$

   которую мы будем называть *представлением функции F в лагранжевых координатах.*

4. **Эйлеровы координаты**

   Иногда, вместо того, чтобы следить за эволюцией каждой отдельной частицы P, гораздо удобнее следить за состоянием движения в данной точке пространства $\mathbf{x}$: как меняется плотность заряда в данной точке, какова скорость частицы, находящейся в момент времени t в точке $\mathbf{x}$ итд. Такое описание движения дается функциями

$$\rho(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{v}(\mathbf{x},t), \qquad \dots \qquad \text{итд.}$$

   Переменные $(\mathbf{x},t)$, связанные с фиксированной точкой пространства $\mathbb{R}^3$, мы будем называть *эйлеровыми координатами*, а переменные $(\mathbf{y},t)$, связанные с фиксированной частицей (находившейся в начальный момент в точке $\mathbf{y}$), называются *лагранжевыми координатами*. Связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами задается функцией ψ:

$$\mathbf{x} = \psi_t(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y} = \psi_t^{-1}(\mathbf{x}).$$

   Для функций, заданных в эйлеровых координатах, мы будем использовать обозначения без шляпок, а для представления этих же функций в лагранжевых координатах мы будем использовать обозначение со шляпками.

5. **Поле скоростей**

   Если задано движение сплошной среды $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, то скорость частицы $P(y,t)$ в момент времени t по определению есть

$$\hat{v}(y,t) \;=\; \frac{\partial \psi}{\partial t}(y,t)$$

   Однако основным объектом нашего интереса будет поле скоростей, отнесенное к эйлеровым координатам:

$$v(x,t) = \hat{v}(\psi^{-1}(x,t),t)$$

6. **Материальная производная**

   Пусть функция $F(x,t)$ зависит от эйлеровых координат (x,t), и пусть $\hat{F}(y,t)$ — представление этой функции в лагранжевых координатах (y,t). Поскольку

$$\hat{F}(y,t) \;=\; F(\psi(y,t),t)$$

по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(y,t) \; = \; \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial \psi^i}{\partial t} \; = \; \frac{\partial F}{\partial t} + (v\cdot\nabla)F$$

Для любой функции $F(x,t)$, заданной в эйлеровых переменных, выражение

$$\frac{DF}{Dt} \; := \; \frac{\partial F}{\partial t} + (v\cdot\nabla)F$$

называется *материальной производной* функции F. Отметим, что для материальной производной справедливо тождество

$$\boxed{\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(y,t)\Big|_{y=\psi^{-1}(x,t)} \; = \; \frac{\partial F}{\partial t} + (v\cdot\nabla)F}$$

7. **Формула Эйлера для якобиана**

Теорема. *Пусть* $\psi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $J_\psi(\mathbf{y},t) = \det\nabla\psi(\mathbf{y},t)$. *Тогда*

$$\boxed{\frac{\partial J_\psi}{\partial t} \; = \; J_\psi \operatorname{div}\mathbf{v}\Big|_{\mathbf{x}=\psi(\mathbf{y},t)}}$$

8. **Теорема о переносе**

Теорема о переносе представляет собой рецепт дифференцирования интеграла в том случае, когда область интегрирования сама изменяется во времени.

Теорема. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *и пусть функция* $\psi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ *непрерывно дифференцируема, причем для любого* $t\in\mathbb{R}$ *отображение* $\psi_t : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, *определяемое тождеством* $\psi_t(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y},t)$, *является диффеоморфизмом и* $\psi(\mathbf{y},0) = \mathbf{y}$. *Для любого* $t\in\mathbb{R}$ *обозначим* $\Omega(t) = \psi_t(\Omega)$. *Тогда для любой функции* $F : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *класса* C^1

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} F(\mathbf{x},t)\;d\mathbf{x} \; = \; \int\limits_{\Omega(t)}\Big(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}F)\Big)\;d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{y},t)|_{\mathbf{y}=\psi^{-1}(\mathbf{x},t)}$.

Замечание.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} F(\mathbf{x},t)\;d\mathbf{x} \; = \; \int\limits_{\Omega(t)}\frac{\partial F}{\partial t}\;d\mathbf{x} \; + \int\limits_{\partial\Omega(t)}(\mathbf{v}\cdot\nu)F\;d\mathbf{x}$$

9. **Плотность электрического тока**

Определение. Пусть плотность заряда частиц сплошной среды есть $\rho(\mathbf{x},t)$, а поле скоростей этих частиц есть $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$. Тогда вектор–функция

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) \; = \; \rho(\mathbf{x},t)\;\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$$

называется *плотностью тока* в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t.

Из определения вытекает, что плотность тока всегда сонаправлена скорости положительных частиц и противонаправлена скорости отрицательных.

10. **Закон сохранения заряда в дифференциальной форме**

Теорема (Уравнение неразрывности).
Пусть заряды движутся в пространстве по закону $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y}, t)$. *Тогда для функций плотности заряда* $\rho(\mathbf{x}, t)$ *и плотности тока* $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ *(как функций эйлеровых переменных), в любой момент времени* t *справедливо соотношение*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0}$$

11. **Сила тока через поверхность** S

Определение. Пусть S — ориентированная поверхность с нормалью $\boldsymbol{\nu}$. *Силой тока* через поверхность S называется поток вектора плотности тока через S:

$$I_S(t) \;=\; \int\limits_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{dS}_x.$$

12. **Закон сохранения заряда в интегральной форме**

Теорема. *Пусть в пространстве движутся заряды и пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *— фиксированная ограниченная область (не меняющаяся во времени). Обозначим через* $\rho(\mathbf{x}, t)$ *и* $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ *плотность заряда и плотность тока (как функции эйлеровых переменных), и пусть* $q_\Omega(t)$ *— суммарный заряд, заключенный в области* Ω *в момент времени* t, *а и* $I_{\partial\Omega}(t)$ *— сила тока через границу* Ω. *Тогда*

$$\boxed{\frac{dq_\Omega}{dt}(t) \;=\; -\, I_{\partial\Omega}(t)}$$

Иными словами, изменение заряда в фиксированной области за данный промежуток времени равно суммарному заряду, перетекшему за это время через границу области.

Доказательства в §2.1

1. Формула Эйлера для якобиана.
2. Теорема о переносе.

2.2 Фундаментальные законы электродинамики

1. **Два основных вопроса электродинамики**

   В прошлой главе мы изучали различные системы *неподвижных* зарядов. При этом нас интересовали два основных вопроса:

   1) Какие силовые поля создают в пространстве те или иные системы зарядов?
   2) Какое силовое действие оказывает имеющееся в пространстве силовое поле на ту или иную систему зарядов?

   В этой главе мы будем изучать те же самые вопросы, но на этот раз уже не будем предполагать, что все заряды являются неподвижными.

   Ответ на первый вопрос дается 4 фундаментальными законами электродинамики:

   – Закон Гаусса.
   – Закон несуществования магнитных монополей.
   – Закон Ампера.
   – Закон магнитной индукции (закон Фарадея).

   Ответ на второй вопрос дается аксиомой, постулирующей явный вид силы, действующей со стороны электромагнитного поля $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ на точечный заряд $(q, \mathbf{x}(t))$, движущийся со скоростью $\mathbf{v}(t)$:

   – Выражение для силы Лоренца

   Все эти законы являются эмпирическими (т.е. открыты экспериментально) и в нашем курсе будут приняты за аксиомы. Мы начнем с обсуждения силы Лоренца.

2. **Сила Лоренца**

   Аксиома 0. *Сила $\mathbf{f}$, действующая со стороны электромагнитного поля $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ на точечный заряд $(q, \mathbf{x}(t))$, движущийся со скоростью $\mathbf{v}(t)$, равна*

   $$\mathbf{f} \;=\; q\,\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + \frac{q}{c}\,[\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)]$$

3. **Замечания**

   1) Уравнение движения частицы

      Уравнение движения частицы массы m и заряда q в заданном внешнем электромагнитном поле $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$ есть

      $$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) \;=\; q\,\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) \;+\; \frac{q}{c}\left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)\right],$$

      где $\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ или $\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ — релятивистский или классический импульс частицы, $v(t) = |\frac{d\mathbf{x}}{dt}|$.

   2) Релятивистский характер магнитного взаимодействия

      Наличие в выражении для силы Лоренца малого множителя $\frac{1}{c}$ перед магнитной составляющей этой силы означает, что в дорелятивистском случае влияние магниного поля на движение частицы пренебрежимо мало. Магнитное поле становится существенным в том случае, когда скорость движения частицы сравнима со скоростью света.

3) Движение свободных зарядов в проводнике

   В частности, поскольку скорость движения свободных зарядов в проводнике невелика (экспериментально устанавливается, что скорость упорядоченного движения электрона в металле — это несколько сантиметров в секунду), электрический ток в проводнике определяется в первую очередь напряженностью электрического поля, а влиянием магнитного поля на движение свободных зарядов в проводниках можно пренебречь.

4) Силовое взаимодействие проводников с током

   Кроме случая одной частицы, движущейся со околосветовой скоростью, магнитное поле даже в дорелятивистком случае может оказывать существенное макросокпическое влияние на *большие ансамбли* сонаправлено движущихся одноименно заряженных частиц (например, на электроны в металле) — если число частиц достаточно велико. Именно поэтому мы наблюдаем взаимодействие проводников с токами.

5) Сводка результатов

   Таким образом, электрическое поле играет главенствующую роль при изучении индивидуальных траекторий медленно движущихся заряженых частиц. Напротив, если речь идет о макроскопических проявлениях электромагнитного поля, то электронейтральный проводник с током (то есть такой проводник, в котором количества положительных и отрицательных зарядов одинаковы), как правило, не создает заметного электрического поля (хотя свободные заряды в проводнике приходят в движение даже при относительно небольшой напряженности электрического поля). В то же время, сонаправленное одновременное движение огромного числа свободных зарядов проводника создает в окружающем пространстве существенное магнитное поле. Поэтому именно магнитное поле играет основную роль во внешних проявлениях тока — взаимодействии с другими токами.

4. Движение частиц в постоянных электрическом или магнитном поле

Теорема.

1) *Траектория частицы в постоянном электрическом поле в нерелятивистском случае является либо прямой, либо параболой. Если скорость частицы сранима со скоростью света, то траектория является цепной линией.*
2) *Траектория частицы в постоянном магнитном поле является либо окружностью (лежащей в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля), либо винтовой линией.*

5. Закон Гаусса

Закон Гаусса мы уже обсуждали в электростатике. Этот закон описывает следующую совокупность экспериментальных наблюдений:

1) Электрические заряды оказывают силовое воздействие на все другие электрические заряды (подвижные и неподвижные). Другими словами, электрические заряды создают в пространстве электрическое поле.
2) Силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах. В этом смысле заряды являются своего рода “источниками” поля.
3) Поток электрического поля через любую замкнутую поверхность равен суммарному заряду, заключенному внутри этой внутри этой поверхности.

Математически эти факты описываются следующим соотношением:

Аксиома I. *Поток электрического поля через замкнутую поверхность $\partial\Omega$ пропорционален заряду q внутри нее:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{dS}_x \;=\; 4\pi \int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{x},t)\; d\mathbf{x}$$

где ρ — плотность заряда. Тот же факт в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} \;=\; 4\pi\rho$$

6. **Закон отсутствия магнитных монополей**

Этот закон описывает следующую совокупность экспериментальных наблюдений:

1) Всем известно, что электрический диполь можно разделить и получить два заряженных тела — одно с положительным зарядом, а другое с отрицательным. Но никто не может отрезать у магнита полюс. Отререшь полюс, думаешь, что остался один — но нет, их снова два.
2) Силовые линии магнитного поля — замнутые кривые, они нигде не начинаются и нигде не заканчиваются.
3) Поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Последние два наблюдения позволяют предположить, что не существует магнитных монополей (магнитных аналогов электрических зарядов, своего рода “породителей магнитного поля”). Механизм возникновения у магнитного поля должен быть каким-то иным, нежели у электрического.

Аксиома II. *Поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность $\partial\Omega$ равен нулю:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{dS}_x \;=\; 0$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} \;=\; 0$$

7. **Закон Ампера**

Этот закон описывает следующую совокупность экспериментальных наблюдений:

1) Опыт Эрстеда (1820). Если к компасу поднести контур с током, то стрелка компаса отклонится. Отклонение будет тем больше, чем ток сильнее. Движение зарядов изменяет магнитное поле в пространстве.
2) Опыт Ампера (1820-24). Бесконечные параллельные проводники с постоянными токами силой I_1 и I_2, текущими в одном направлении, притягиваются, а в противоположных — отталкиваются. Сила, действующая со стороны второго проводника на единицу длины dl первого проводника лежит в плоскости, перпендикулярной проводникам направлена и в сторону второго проводника. Модуль данной силы равен

$$dF \;=\; \frac{2}{c^2}\,\frac{I_1 I_2}{r}\; dl,$$

где r — расстояние между проводниками.

3) Опыт Био и Савара (1820). Ампер изучал действие магнитного тока опосредованно, путем измерения силы взаимодействия между парами проводников с током. В отличие от него, французские ученые Био и Савар предприняли прямые измерения магнитных полей, используя для этого множество легких магнитных стрелок компасов. При помощи этих измерений они установили величину и направление магнитного поля, создаваемого контуром с током. Оказалось, что силовые линии магнитного поля, создаваемого круговым контуром, перпендикулярны плоскости, в которой расположен контур, а силовые магнитного поля, создаваемого прямым проводником с током, являются концентрическими окружностями, плоскость которых перпендикулярна направлению проводника.

4) Формула Био–Савара–Лапласа (1820). На основе проведенных Био и Саваром измерений французский математик Лаплас написал формулу, описывающую магнитное поле, создаваемое в точке $\mathbf{x}$ находящемся в точке $\mathbf{y}$ элементом $\mathbf{dl}_y$ контура γ, по которому течет ток постоянный ток силой I:

$$\mathbf{dB}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{I}{c}\,\frac{\mathbf{dl}_y\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}$$

Суммарное поле, создаваемое контуром с током в точке $\mathbf{x}$, соответственно равно криволинейному интегралу (“третьего рода”)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{I}{c}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathbf{dl}_y\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}$$

Эта формула называется *законом Био–Савара–Лапласа.*

5) Закон Ампера (1826). Закон Био–Савара дает представление о магнитном поле, создаваемым линейным контуром с током. Но что, если ток течет не вдоль заданной линии, а по всему пространству? Дальнейшие эксперименты установили, что ток через поверхность S создает циркуляцию магнитного поля по границе этой поверхности ∂S. Для постоянного тока она пропорциональна силе тока через поверхность S:

$$\oint\limits_{\partial S}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{dl} \;=\; \frac{4\pi}{c}I_S, \qquad I_S \;=\; \int\limits_{S}\mathbf{j}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{dS}_x$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} \;=\; \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}$$

6) Ток смещения Максвелла (1862). Является ли наличие в пространстве токов единственной причиной возникновения в магнитного поля? Все описанные выше эксперименты ставились для постоянного тока (т.е. когда поля и токи не зависят от t). Максвелл заметил, что если от уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{B} \;=\; \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}$ взять div, то из этого соотношения следует, что $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, т.е. заряд не может вытекать из области (т.к. в силу уравнения неразрывности $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, получаем, что $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$). Это верно только для постоянного тока. Чтобы получить соотношение, справедливое также и для переменного тока, надо учесть возможность утечки заряда. Поскольку в силу закона Гаусса $4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}=\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, Максвелл добавил в закон Амепра корректирующее слагаемое $\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ (которое называется *током смещения*) и получил соотношение, справедливое для любых токов:

Аксиома III: *Циркуляция магнитного поля вдоль замкутого контура ∂S равна сумме силы тока через любую поверхность S, натянутую на этот контур, и тока смещения:*

$$\oint\limits_{\partial S} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{dl}_x \;=\; \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \mathbf{j}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{dS}_x \;+\; \frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{dS}_x$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \;+\; \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}$$

8. **Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)**

Этот закон описывает следующую совокупность экспериментальных наблюдений:

1) 1-ый опыт Фарадея: Если магнит движется внутри проводящего замкнутого контура ∂S, то в контуре возникает ток (и, следовательно, электрическое поле, направленное вдоль контура). Сила тока будет тем больше, чем быстрее движется магнит (т.е. изменяется магнитное поле).
2) 2-ой опыт Фарадея: Если взять два проводящих замкнутых контура и расположить их на некотором расстоянии друг от друга, а потом через первый контур пропустить ток, постепенно изменяя его силу, то во втором контуре тоже возникнит ток, называемый *индукционным.*
3) Правило Ленца. Индукционный ток всегда направлен таким образом, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение внешнего магнитного поля в пространстве. Если поток внешнего магнитного поля через стягиваемую контуром поверхность уменьшается, то индукционный ток будет направлен в одну сторону (так, чтобы силовые линии создаваемого им магнитного поля были сонаправлены нормали к поверхности), а если поток внешнего поля увеличивается, то индукционный ток потечет в противоположном направлении.
4) ЭДС в контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока. Возникновение во втором контуре индукционного тока означает, что в этом контуре появляется стороннее электрическое поле, которое заставляет двигаться свободные заряды проводника. Это стороннее поле называется “источником тока”, или ЭДС (электродвижущей силой). Циркуляция этого поля в контуре (равная, как известно, отношению работы, совершаемой сторонним полем при переносе зарядов, к величине переносимых им зарядов), оказалась пропорциональной скорости изменения потока магнитной индукции через поверхность, натянутую на данный контур.

Математически эти факты описываются следующим соотношением:

Аксиома IV. *ЭДС в контуре ∂S пропорционалена изменению потока магнитного поля через натянутую на контур поверхность S:*

$$\oint\limits_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{dl} \;=\; -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{dS}_x$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} \;=\; -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

Знак минус в этом соотношение символизирует правило Ленца.

9. **Система Максвелла в вакууме**

   Пусть в пространстве имеется система зарядов, характеризующаяся объемной плотностью $\rho(\mathbf{x}, t)$ и плотностью тока $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$. Электормагнитное поле, создаваемое в пространстве этой системой зарядов, удовлетворяет системе уравнений в частных производных (называемой *системой Максвелла*)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho & \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \\ -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} & \qquad \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

   Эта система объединяет 4 фундаментальных закона электродинамики: закон Гаусса, закон несуществования магнитных монополей, обобщенный Максвеллом закон Ампера и закон электромагнитной индукции Фарадея.

Доказательства в §2.2

1. Траектории движения заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях.

2.3 Система Максвелла

1. **Задача о нахождении э/м поля по заданным зарядам и токам**

   Система Максвелла позволяет решить задачу о нахождении электромагнитного поля $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, создаваемого в пространстве системой зарядов, которые распределены в пространстве с известной плотностью $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и которые движутся так, что их поле скоростей равно известной функции $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (а плотность тока, соответственно, есть $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$). То есть, по заданным положениям заряженных частиц и их скоростям при помощи системы Максвелла мы можем найти создаваемое этой системой зарядов электромагнитное поле. При такой постановке функции ρ и $\mathbf{j}$ играют роль данных задачи, а функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ подлежат определению. Кроме того, для однaзначного определения электромагнитного поля во все моменты времени, необходимо знать, каким электромагнитное поле было в начальный момент (то есть задать начальные данные):

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ -\frac{1}{c}\,&\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, && \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \\ &\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0, && \mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{B}_0 \end{aligned}$$

2. **Переопределенность системы Максвелла**

   В приведенной выше задаче уравнения Максвелла представляют собой систему из 8 скалярных уравнений для 6 неизвестных функций (3 компоненты $\mathbf{E}$ и 3 компоненты $\mathbf{B}$). По своему характеру эта система относится к классу т.н. *переопределенных систем* дифференциальных уравнений в частных производных. Разрешимость данной системы обеспечивается особой структурой уравнений, входящих в систему. А именно, математически уравнения в системе Максвелла не являются независимыми, некоторые из соотношений являются следствиями остальных. Покажем это.

3. **Закон сохранения заряда — необходимое условие существование решений системы Максвелла**

   Теорема 1. *Для любых гладких* $\mathbf{E}$, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *имеет место импликация*

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} \;=\; -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{B} \;=\; 0.$$

   В частности, если $\operatorname{div}\mathbf{B}|_{t=0} = 0$, *то автоматически* $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ *в любой последующий момент времени.*

   Теорема 2. *Если гладкие функции* $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ρ *и* $\mathbf{j}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

   то в любой момент времени

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} \;=\; 0.$$

   Следствие. Таким образом, выполнение закона сохранения электрического заряда для функций ρ и $\mathbf{j}$ (т.е. для данных задачи) является *необходимым условием* разрешимости системы Максвелла.

4. **Скалярный и векторный потенциалы э/м поля**

Определение. Будем говорить, что пара гладких вектор–функций $(\mathbf{E},\mathbf{B})$,

$$\mathbf{E}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\qquad \mathbf{B}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,$$

имеет *скалярный* и *векторный потенциалы* в области $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$, если существует пара гладких функций $(\varphi,\mathbf{A})$,

$$\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \mathbf{A}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,$$

такие, что выполняются соотношения $(*)$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B}&=\operatorname{rot}\mathbf{A}\\ \mathbf{E}&=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}}\tag{$*$}$$

Теорема. *Для любых гладких вектор–функций* $(\mathbf{E},\mathbf{B})$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{B}=0\\ &\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{E}=0\end{aligned}\quad\text{в}\quad\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right\}\iff\left\{\begin{array}{c}(\mathbf{E},\mathbf{B})\text{ имеет скаларный и}\\ \text{векторный потенциалы}\\ \text{в}\quad\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\end{array}\right.$$

5. **Система Максвелла в потенциалах**

Теорема. *Предположим, что пара вектор-функций* $(\mathbf{E},\mathbf{B})$*, имеет скалярный и векторный потенциалы* $(\varphi,\mathbf{A})$ *в* $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ *и пусть функции* ρ*,* $\mathbf{j}$ *гладкие. Тогда вектор-функции* $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\left\{\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho\\ -&\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\end{aligned}\right.\quad\text{в}\quad\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$$

в том и только в том случае, когда их потенциалы $(\varphi,\mathbf{A})$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$\left\{\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi\right)\ -\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\ &=\ 4\pi\rho\\ \left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{A}\right)\ +\ \nabla\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\ &=\ \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\end{aligned}\right.\quad\text{в}\quad\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$$

6. **Неоднозначность в определении потенциалов**

Теорема. *Пусть функции* $\mathbf{E}$*,* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{A}$ *и* φ *связаны соотношениями* $(*)$*. Возьмем произвольную гладкую скалярную функцию* $\Phi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и рассмотрим функции*

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\Phi,$$

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

По $(\mathbf{A}',\varphi')$ *с помощью соотношений* $(*)$ *построим функции* $(\mathbf{E}',\mathbf{B}')$*. Тогда*

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E},\qquad\mathbf{B}'=\mathbf{B}$$

7. **Калибровочные условия**

Таким образом, мы установили, что по заданным электрическому и магнитному полям $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, скалярный и вектроный потенциалы $(\mathbf{A}, \varphi)$ определяются *неоднозначно.* В их выборе имеется произвол (к $\mathbf{A}$ можно добавлять любое потенциальное поле $\nabla\Phi$). Если скалярное поле Φ (которое называется *калибровочной функцией*) выбирать неким специальным образом, то можно добиться того, что функции $(\mathbf{A}, \varphi)$, помимо системы Максвелла для потенциалов, удовлеторяли бы неким дополнительным соотношениям (которые называются *калибровочными условиями*), устраняющим неоднозначность в определении потенциалов. При удачном выборе Φ калибровочные условия могут существенно упростить вид уравнений Максвелла для потенциалов (что, в конечном счете, позволит нам найти ее решения).

Ниже мы рассматриваем два способа выбора калибровочных условий — калибровку Кулона и калибровку Лоренца.

8. **Калибровка Кулона**

Определение. Говорят, что потенциалы $(\varphi, \mathbf{A})$ векторных полей $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ удовлетворяют *калибровочному условию Кулона*, если

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

Теорема 1. *Для любой пары векторных полей $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, удовлетворяющих первой паре уравнений Максвелла и убывающих на бесконечности, существуют и притом единственные убывающие на бесконечности скалярный и векторный потенциалы $(\varphi, \mathbf{A})$, удовлеторяющие калибровочному условию Кулона.*

Теорема 2. *Если пара векторных полей $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ имеет потенциалы $(\varphi, \mathbf{A})$, удовлетворяющие калибровке Кулона, то функции $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ удовлетворяют системе Максвелла тогда и только тогда, когда их потенциалы $(\varphi, \mathbf{A})$ удовлетворяют системе*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\varphi & = & 4\pi\rho \\ \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} & = & \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} \;-\; \dfrac{1}{c}\,\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \end{array} \right.$$

Замечание. Калибровка Кулона хороша в двух аспектах:

1) При кулоновской калибровке скалярный потенциал φ совпадает с потенциалом стационарного электрического поля, порожденного системой зарядов, распределенных в пространстве с плотностью ρ.
2) Кулоновская калибровка позволяет “разделить” уравнения для скалярного и векторного потенциала. Поскольку в уравнение для φ векторный потенциал $\mathbf{A}$ не входит, можно сперва “решить” уравнение Пуассона для φ, а потом, считая φ уже заданной функцией, подставить его в правую часть уравнения для $\mathbf{A}$ и найти $\mathbf{A}$ как решение волнового уравнения с заданной правой частью.

9. **Калибровка Лоренца**

Определение. Пусть $(\varphi, \mathbf{A})$ — скалярный и векторные потенциалы пары векторных полей $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Говорят, что потенциалы $(\varphi, \mathbf{A})$ удовлетворяют *калибровочному условию Лоренца*, если

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;=\; 0$$

Теорема 1. *Для любой пары векторных полей* $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$*, удовлетворяющих первой паре уравнений Максвелла и убывающих на бесконечности, существуют и притом единственные убывающие на бесконечности скалярный и векторный потенциалы* $(\varphi, \mathbf{A})$*, удовлеторяющие калибровочному условию Лоренца.*

Теорема 2. *Если пара векторных полей* $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ *имеет потенциалы* $(\varphi, \mathbf{A})$*, удовлетворяющие калибровке Лоренца, то функции* $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ *удовлетворяют системе Максвелла тогда и только тогда, когда их потенциалы* $(\varphi, \mathbf{A})$ *удовлетворяют системе*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi & = & 4\pi\rho \\ \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} & = & \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{array} \right.$$

Замечание. Калибровка Лоренца полностью “расщепляет” систему Максвелла на четыре уравнения одинакового типа — отдельно волновое уравнение для скалярного потенциала и три точно таких же волновых уравнения для трех компонент векторного потенциала. Таким образом, мы видим, что главная задача электродинамики сводится к тому, чтобы научиться решать волновое уравнение. Тот факт, что электромагнитное поле является решением волнового уравнения, является ключом к пониманию волновой природы электромагнитных взаимодействий.