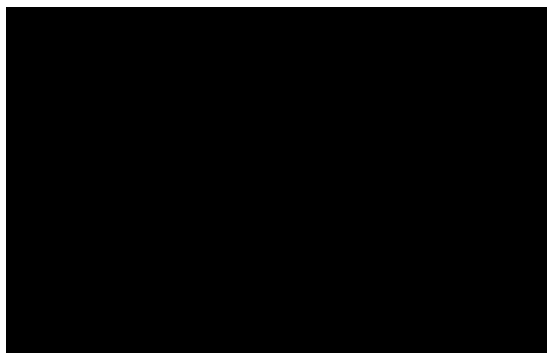
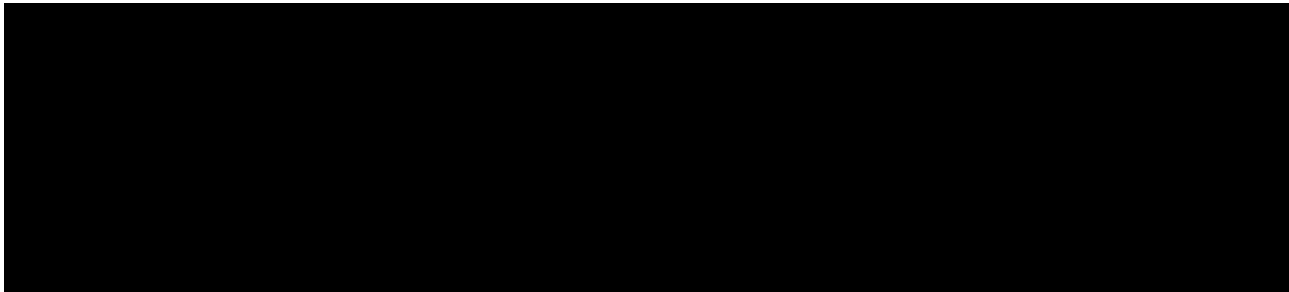


# TEXTO PARA EL ESTUDIANTE



## **MARIO ZAÑARTU NAVARRO**

LICENCIADO EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA,  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.  
MAGÍSTER EN HISTORIA DE LA CIENCIA: CIENCIA, HISTORIA Y SOCIEDAD,  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA.

## **FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO**

LICENCIADA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN ESTADÍSTICA,  
MAGÍSTER EN ESTADÍSTICA,  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

## **MAURICIO RAMOS RIVERA**

LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA  
LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA  
UNIVERSIDAD DE CHILE



El material didáctico **Matemática 2º**,  
para **Segundo Año de Educación Media**, es  
una obra colectiva, creada y diseñada por el  
Departamento de Investigaciones Educativas  
de Editorial Santillana, bajo la dirección de  
**MANUEL JOSÉ ROJAS LEIVA**

COORDINACIÓN DEL PROYECTO:  
EUGENIA ÁGUILA GARAY

COORDINACIÓN ÁREA MATEMÁTICA:  
VIVIANA LÓPEZ FUSTER

EDICIÓN:  
JAVIERA SETZ MENA

AYUDANTE DE EDICIÓN:  
ALDO PEREIRA SOLIS

AUTORES:  
MARIO ZAÑARTU NAVARRO  
FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO  
MAURICIO RAMOS RIVERA

REVISIÓN DE ESPECIALISTA:  
JOSÉ CORTÉS OTÁROLA  
MANUEL SALAZAR CÓRDOVA

CORRECCIÓN DE ESTILO:  
ISABEL SPOERER VARELA  
ASTRID FERNÁNDEZ BRAVO

DOCUMENTACIÓN:  
PAULINA NOVOA VENTURINO  
MARÍA PAZ CONTRERAS FUENTES

La realización gráfica ha sido efectuada  
bajo la dirección de  
**VERÓNICA ROJAS LUNA**

con el siguiente equipo de especialistas:

COORDINACIÓN GRÁFICA:  
CARLOTA GODOY BUSTOS

COORDINACIÓN LICITACIÓN:  
XENIA VENEGAS ZEVALLOS

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:  
XIMENA MONCADA LOMEÑA  
MARIELA PINEDA GÁLVEZ

FOTOGRAFÍAS:  
ARCHIVO SANTILLANA

CUBIERTA:  
XENIA VENEGAS ZEVALLOS

PRODUCCIÓN:  
GERMÁN URRUTIA GARÍN

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

© 2009, by Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones,  
Dr. Aníbal Ariztía 1444, Providencia, Santiago (Chile)  
PRINTED IN CHILE

Impreso en Chile por Quad/Graphics  
ISBN: 9 - 7895 - 15 - 1566 - 6

Inscripción N° 186.188

Se terminó de imprimir esta 4ª edición de 221.000 ejemplares,  
en el mes de septiembre del año 2012  
www.santillana.cl

Referencias de los Textos *Educación Matemática 2 y 3*, Educación Media, de los autores:  
Ángela Baeza Peña, María José García Zattera, Marcia Villena Ramírez, Marcela Guerra Noguera,  
Patricia Urzúa Figueroa y Rodrigo Hernández Reyes. Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, Santiago, Chile, 2005.

**La materialidad y fabricación de este texto está certificada por el IDIEM – Universidad de Chile**

# Presentación

El texto **Matemática Segundo Año Medio** ha sido creado y diseñado pensando en tus intereses, gustos e inquietudes.

Este año profundizarás algunos de los temas vistos en tu Primer Año de Educación Media con el estudio de los números reales y de las expresiones algebraicas fraccionarias. Además, te presentamos una Unidad de sistemas de ecuaciones lineales que te permitirá comprender, modelar y resolver situaciones cercanas a la vida diaria.

En el estudio de la Geometría, podrás profundizar tus conocimientos relacionados con la semejanza de figuras planas, incluyendo los teoremas de Thales y de Euclides, y con la circunferencia, tanto respecto de las relaciones entre sus ángulos, como de las relaciones métricas de sus trazos.

Te presentamos una Unidad de Datos y azar cuyo estudio te aportará conceptos para el análisis e interpretación de la información entregada por los medios de comunicación y para manejar recursos objetivos para fundamentar tus opiniones.

Te invitamos a que, junto a tus compañeros y compañeras, descubras, deduzcas, hagas conjeturas, inventes y resuelvas problemas usando otras estrategias, distintas a las que planteamos en este Texto, de manera que seas un constructor de tu aprendizaje matemático.

Este libro pertenece a:

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Curso:** \_\_\_\_\_

**Colegio:** \_\_\_\_\_

Te lo ha hecho llegar gratuitamente el Ministerio de Educación a través del establecimiento educacional en el que estudias.

Es para tu uso personal tanto en tu colegio como en tu casa; cuidalo para que te sirva durante varios años.

Si te cambias de colegio lo debes llevar contigo y al finalizar el año, guardarlo en tu casa.

¡Que te vaya muy bien!

# Índice

12	Unidad 1: NÚMEROS Y RAÍCES
14	¿CUÁNTO SABES?
16	Números racionales en la recta numérica
18	Números irracionales
20	Números reales
22	Aproximación de un número irracional
24	MI PROGRESO
25	Raíces cuadradas y raíces cúbicas
27	Ubicación de raíces en la recta numérica
29	Irracionalidad de algunas raíces cuadradas
31	Raíces enésimas
33	Cálculo de raíces enésimas y sus propiedades
35	Relación entre raíces enésimas y potencias de exponente racional
37	Situaciones que involucran raíces
41	MI PROGRESO
42	Logaritmos
46	Propiedades de los logaritmos
48	Propiedades de las operaciones de los logaritmos
50	Ecuaciones logarítmicas
53	Aplicaciones de las ecuaciones logarítmicas
55	Herramientas tecnológicas
59	MI PROGRESO
60	CÓMO RESOLVERLO
62	EN TERRENO
64	SÍNTESIS DE LA UNIDAD
66	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

68

**Unidad 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS  
FRACCIONARIAS**

- 70 — ¿CUÁNTO SABES?
- 72 — Fracciones algebraicas
- 74 — Comparación de fracciones algebraicas
- 76 — Análisis de fracciones algebraicas
- 78 — Restricciones en fracciones algebraicas
- 79 — Herramientas tecnológicas
- 80 — Simplificación de fracciones algebraicas
- 82 — Multiplicación de fracciones algebraicas
- 84 — División de fracciones algebraicas
- 86 — MI PROGRESO
- 87 — Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas
- 89 — Adición de fracciones algebraicas
- 91 — Sustracción de fracciones algebraicas
- 93 — Ecuaciones que involucran fracciones algebraicas
- 95 — Situaciones que involucran fracciones algebraicas
- 97 — MI PROGRESO
- 98 — CÓMO RESOLVERLO
- 100 — EN TERRENO
- 102 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD
- 104 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

106

**Unidad 3: SISTEMAS DE ECUACIONES**

- 108 — ¿CUÁNTO SABES?
- 110 — Ecuaciones lineales con dos incógnitas
- 112 — Planteo de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- 114 — Método gráfico
- 116 — Herramientas tecnológicas
- 118 — Análisis de las soluciones en el plano cartesiano
- 120 — MI PROGRESO
- 121 — Método de igualación
- 123 — Método de sustitución
- 125 — Método de reducción
- 127 — Análisis algebraico sobre la existencia de las soluciones
- 129 — Pertinencia de las soluciones
- 131 — Otros sistemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales
- 133 — MI PROGRESO
- 134 — CÓMO RESOLVERLO
- 136 — EN TERRENO
- 138 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD
- 140 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

## Unidad 4: SEMEJANZA

- 144 — ¿CUÁNTO SABES?
- 146 — Semejanza de figuras
- 148 — Semejanza de triángulos: criterio AA
- 150 — Semejanza de triángulos: criterio LLL
- 152 — Semejanza de triángulos: criterio LAL
- 154 — Análisis de semejanza en figuras planas
- 156 — Aplicación de la semejanza en modelos a escala
- 158 — MI PROGRESO
- 159 — Teorema de Thales
- 162 — Teorema general de Thales
- 163 — Herramientas tecnológicas
- 165 — División de un trazo en una razón dada
- 167 — Teorema de Euclides
- 169 — Aplicaciones del teorema de Euclides
- 171 — Homotecia
- 174 — Herramientas tecnológicas
- 175 — MI PROGRESO
- 176 — CÓMO RESOLVERLO
- 178 — EN TERRENO
- 180 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD
- 182 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

184

## Unidad 5: CIRCUNFERENCIA

- 186 — ¿CUÁNTO SABES?
- 188 — Medición de arcos
- 190 — Ángulos del centro y ángulos inscritos
- 194 — Ángulos semi-inscritos
- 196 — MI PROGRESO
- 197 — Ángulos interiores y exteriores a una circunferencia
- 199 — Proporcionalidad entre las cuerdas de una circunferencia
- 201 — Proporcionalidad entre las secantes de una circunferencia
- 203 — Proporcionalidad entre las secantes y tangentes de una circunferencia
- 205 — MI PROGRESO
- 206 — CÓMO RESOLVERLO
- 208 — EN TERRENO
- 210 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD
- 212 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

214

## Unidad 6: DATOS Y AZAR

- 216 — ¿CUÁNTO SABES?
- 218 — Medidas de dispersión
- 222 — Medidas de dispersión para datos agrupados
- 224 — Comparación de dos o más conjuntos de datos
- 226 — Homogeneidad y heterogeneidad
- 228 — Muestreo aleatorio simple
- 230 — Herramientas tecnológicas
- 232 — MI PROGRESO
- 233 — Conjuntos
- 235 — Técnicas de conteo
- 239 — Regla de Laplace
- 241 — Probabilidad de la unión
- 243 — Probabilidad de la intersección
- 247 — MI PROGRESO
- 248 — CÓMO RESOLVERLO
- 250 — EN TERRENO
- 252 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD
- 254 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

256 — SOLUCIONARIO

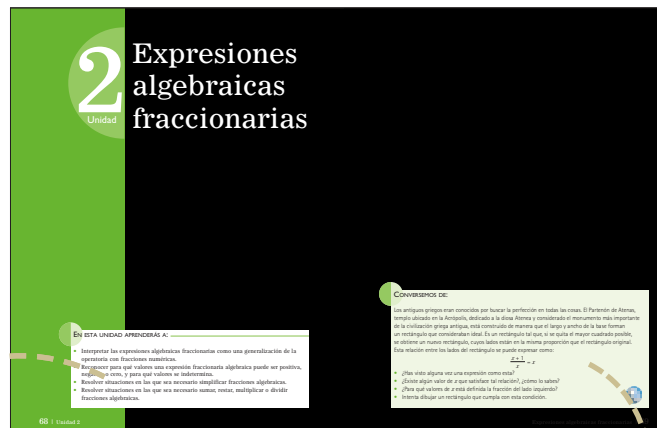
271 — BIBLIOGRAFÍA

# Organización del Texto

Te damos la bienvenida a este nuevo año escolar y queremos apoyarte en tu crecimiento y desarrollo con este Texto, que te entregará herramientas para enfrentarte de mejor manera al mundo que te rodea, y te invita a comprender que la **Matemática** es parte de él.

A través de sus **6 unidades** te enfrentarás a diversas situaciones, en las que podrás explorar, aprender, construir y consolidar conceptos relacionados con números, álgebra, geometría, datos y azar. En ellas encontrarás las siguientes páginas y secciones:

## Páginas de inicio



### EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A...

En esta sección conocerás los principales objetivos que se espera que logres con el desarrollo de la unidad.

### CONVERSEMOS DE...

A través de una introducción al tema de la unidad, conectamos elementos e imágenes de la vida diaria con el contenido que trabajarás. Además, encontrarás preguntas relacionadas con la imagen y con los contenidos de la unidad que te permitirán exponer tus ideas, dar opiniones y argumentar a partir de tus experiencias.



## ¿CUÁNTO SABES?

En esta sección, te invitamos a resolver ejercicios y problemas que te ayudarán a evaluar tus conocimientos y a recordar lo que aprendiste en años anteriores y que serán la base para el desarrollo de la unidad.

**¿Cuánto sabes?**

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

- Resuelve las siguientes operaciones con fracciones y simplifica cada vez que sea necesario.
  - $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
  - $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$
  - $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$
- Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.
  - La adición de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.
  - Si  $a \neq 0$ , entonces  $\frac{a}{a} = 0$ .
  - Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , entonces  $\frac{a+b}{a} = b$ .
  - Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , entonces  $\frac{a-b}{a} = b$ .
  - $\frac{a}{a}$  es igual a 1.
  - La multiplicación de fracciones cumple con las propiedades conmutativa y asociativa.
- Resuelve las siguientes operaciones:
  - $3x^2 + 5x^2$
  - $5y^2 - 3y^2$
  - $3z^2 - 5z^2$
  - $4t^2 - 6t^2$
  - $\left(\frac{1}{2}x^2 - 3y\right) - \left(\frac{1}{3}x^2 - 4y\right)$

**¿QUÉ DEBES RECORDAR?**

- Para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.
- Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, se puede ampliar o simplificar hasta obtener fracciones equivalentes con igual denominador a largo, mediano o pequeño.
- Al multiplicar fracciones, se obtiene una fracción cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores y cuyo denominador al producto de los denominadores.

En general, si  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $d \neq 0$ :

- Para dividir fracciones, se puede multiplicar la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda.
- Algunas factorizaciones y productos notables son:
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (cuadrado de binomio)
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  (cuadrado de binomio)
  - $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  (diferencia de cuadrados)
  - $(a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$  (suma y diferencia de cubos)
  - $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  (suma y diferencia de cubos)

## ¿QUÉ DEBES RECORDAR?

Podrás activar tus conocimientos previos a través de un resumen que incluye los principales conceptos trabajados en años anteriores y que te servirán como apoyo para los aprendizajes que se espera que logres en la unidad.

## Páginas de desarrollo

### ANALICEMOS...

Por medio de preguntas, trabajarás el razonamiento, explorarás el contenido matemático que aprenderás, pondrás en práctica lo que ya sabes, compartirás tus ideas y extraerás conclusiones.

**Fraciones algebraicas**

Una día te irán cuatro vultas en la pista de atletismo de su colegio. Su entrenador les cuenta que el primer atleta recorrió  $\frac{1}{4}$  de la pista, el segundo  $\frac{1}{3}$ , el tercero  $\frac{1}{2}$  y el cuarto  $\frac{1}{5}$  de la pista. ¿Cuánto recorrieron en total? ¿Cuánto falta para dar una vuelta completa? ¿Cuánto falta para dar una vuelta completa? ¿Cuánto falta para dar una vuelta completa?

**ANÁLISIS...**

- Si se requiere encontrar una vuelta completa, ¿cómo debería ser calculada? ¿Recorrieron con que velocidad cada vuelta?
- ¿En qué vuelta tardó con mayor rapidez y en qué vuelta con menor rapidez?

Si los datos de la situación anterior se organizan en una tabla, se obtiene:

Primer vultista	Segundo vultista	Tercer vultista	Cuarto vultista
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

**RECORDAR QUE...**

- El numerador es el número que se divide y el denominador es el número al que se divide.
- Las divisiones de una fracción son:
  - Numerador
  - Denominador

**COMPARAR...**

Algunas de las fracciones que se obtienen al dividir los numeradores anteriores por los denominadores correspondientes son:  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ . Estas fracciones se denominan fracciones algebraicas. ¿Cómo se comparan y se relacionan entre sí?

Algunas, considerando que una pista de atletismo tiene 400 m se puede establecer que una pista que se recorrió  $\frac{1}{4}$  de la pista, se recorrió  $\frac{1}{3}$  de la pista, se recorrió  $\frac{1}{2}$  de la pista, se recorrió  $\frac{1}{5}$  de la pista.

Primer vultista:  $\frac{1}{4} \times 400 = 100$  m. Rapidez: 5 m/s.  
 Segundo vultista:  $\frac{1}{3} \times 400 = 133$  m. Rapidez: 5,33 m/s.  
 Tercer vultista:  $\frac{1}{2} \times 400 = 200$  m. Rapidez: 6,7 m/s.  
 Cuarto vultista:  $\frac{1}{5} \times 400 = 80$  m. Rapidez: 4,7 m/s.

Luego, para ir a dar una vuelta completa durante la segunda vuelta, con menor rapidez en la última vuelta.

**EN TU CUADERNO...**

- Calcula cuál sería la rapidez de Ana en cada vuelta suponiendo ahora que en la primera vuelta se demora:
  - 1 minuto.
  - 1 minuto y 10 segundos.
  - 1 minuto y medio.
- En cada caso, ¿en qué vuelta se demora más y en qué menos? ¿Por qué?
- Calcula el valor de las siguientes fracciones algebraicas si  $a = 1, 2, 3, 4, 5$ .
  - $\frac{1}{a+1}$
  - $\frac{1}{a-1}$
  - $\frac{1}{a^2+1}$
  - $\frac{1}{a^2-1}$
- Observa el siguiente ejemplo:
 

Las fracciones  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$  son generadas por la fracción algebraica  $\frac{1}{n+1}$  porque se obtienen al reemplazar  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  en la fracción.

Encuentra la fracción algebraica que genera las siguientes fracciones en cada caso:
 
  - $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \frac{1}{n+4}$
  - $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \frac{1}{n+4}, \frac{1}{n+5}$
  - $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \frac{1}{n+4}, \frac{1}{n+5}, \frac{1}{n+6}$

**EN RESUMEN**

Dadas dos expresiones algebraicas representadas por  $p$  y  $q$ , con  $q \neq 0$ , hallamos expresión algebraica fraccionaria o fracción algebraica a modo de expresión de la forma  $\frac{p}{q}$ .

Las expresiones  $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1}$  son fracciones algebraicas.

### EN TU CUADERNO

Resolverás variadas actividades para ir construyendo los conceptos y reforzando así tu aprendizaje.

### EN RESUMEN

Encontrarás explicaciones, formalizaciones o definiciones que destacan y precisan lo que vas aprendiendo.

### GLOSARIO

Te presentará nuevos términos matemáticos relacionados con el contenido que se está desarrollando.

**Restricciones en fracciones algebraicas**

Podrás y podrás analizar la fracción algebraica  $\frac{a+b}{c}$ . ¿Cuáles valores de  $a, b$  y  $c$  son válidos para obtener valores positivos y negativos de esta expresión?

**ANÁLISIS...**

- Si  $a$  es un número real cualquiera, ¿cuáles son los valores que se obtienen para la expresión  $\frac{a+b}{c}$  (positivos o negativos)? ¿Por qué o cómo? Justifica tus respuestas.
- ¿Cómo se describe la restricción en esta expresión? ¿Por qué o cómo?
- ¿Cómo se describe lo que ocurre para estos casos?

Para obtener valores de  $a$  y  $b$  que permitan la siguiente tabla:

Valor de $a$	Valor de $b$	Valor de $c$	Valor de $\frac{a+b}{c}$
1	1	1	2
1	1	2	1
1	1	3	$\frac{2}{3}$
1	1	4	$\frac{2}{4}$
1	1	5	$\frac{2}{5}$
1	1	6	$\frac{2}{6}$
1	1	7	$\frac{2}{7}$
1	1	8	$\frac{2}{8}$
1	1	9	$\frac{2}{9}$
1	1	10	$\frac{2}{10}$

**GLOSARIO**

Según los valores que aparecen en la tabla de los resultados, se observa que:

- Cuando  $a = 1$ , el valor de la expresión es 2.
- Si  $a$  es positivo y crece, el valor de la expresión se reduce.
- Si  $a$  es positivo y decrece, el valor de la expresión se incrementa.
- Si  $a$  es negativo y crece, el valor de la expresión se reduce.
- Si  $a$  es negativo y decrece, el valor de la expresión se incrementa.
- Si  $a = 0$ , el valor de la expresión es 0.
- Si  $a$  es negativo y crece, el valor de la expresión se reduce.
- Si  $a$  es negativo y decrece, el valor de la expresión se incrementa.

**EN RESUMEN**

Para el análisis de expresiones algebraicas fraccionarias, es importante considerar valores distintos, positivos y negativos, grandes y pequeños. Además, se debe distinguir si la expresión se simplifica y los valores para los cuales se analiza.

**HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS**

En esta actividad, aprenderás cómo analizar expresiones algebraicas y obtener sus valores utilizando una planilla de cálculo como Excel.

Primeros, debes familiarizarte con el procedimiento para recibir fórmulas, y la manera de introducir valores en ellas. Comienza por copiar la fórmula  $\frac{a+b}{c}$ .

- Selecciona en la celda A2 y escribe un número real.
- Continúa, al lado de la celda A2, escribiendo la fórmula  $\frac{a+b}{c}$ .
- Repite el proceso en las celdas B2, C2, D2, E2, F2, G2, H2, I2, J2, K2, L2, M2, N2, O2, P2, Q2, R2, S2, T2, U2, V2, W2, X2, Y2, Z2.
- Repete el proceso en las celdas A3, B3, C3, D3, E3, F3, G3, H3, I3, J3, K3, L3, M3, N3, O3, P3, Q3, R3, S3, T3, U3, V3, W3, X3, Y3, Z3.

Al continuar, copia el resultado que aparece en B3 al momento que aparece el valor de  $a$  en la celda A2. Repite el proceso en las celdas C3, D3, E3, F3, G3, H3, I3, J3, K3, L3, M3, N3, O3, P3, Q3, R3, S3, T3, U3, V3, W3, X3, Y3, Z3.

El siguiente paso es copiar el resultado que aparece en B3 al momento que aparece el valor de  $a$  en la celda A2. Repite el proceso en las celdas C3, D3, E3, F3, G3, H3, I3, J3, K3, L3, M3, N3, O3, P3, Q3, R3, S3, T3, U3, V3, W3, X3, Y3, Z3.

**Ejercicios**

Realiza el procedimiento de análisis anterior, indicando los valores de  $a$  para los cuales las expresiones son positivas, negativas o cero, además de los puntos donde la expresión no está definida.

- $\frac{1}{x-2}$
- $\frac{1}{x^2-4}$
- $\frac{1}{x^2+4}$

### HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Aprenderás a utilizar planillas de cálculo o programas computacionales.

## MI PROGRESO

Resolverás actividades que te permitirán evaluar tu progreso en el logro de los aprendizajes.

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas
Unidad 2

**M5 PROGRESO**

- Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor. Considera todos los variables con valores positivos.
 

a.  $\frac{3x-1}{2b}$ ,  $\frac{4x-1}{3b}$ ,  $\frac{5x-1}{4b}$

b.  $\frac{1}{3x+1}$ ,  $\frac{1}{2x+1}$

c.  $\frac{2b-1}{3a}$ ,  $\frac{3b-1}{4a}$ ,  $\frac{1}{2}$
- Determina los valores de  $p$  para los cuales se anulan las siguientes fracciones algebraicas. Luego, determina los valores para los cuales quedan indefinidas.
 

a.  $\frac{3x-1}{p^2}$

b.  $\frac{p^2-1}{p^2+1}$

c.  $\frac{p^2-2p+1}{p^2-1}$

d.  $\frac{p^2+1}{p^2-1}$
- Determina los valores de  $p$  para los cuales las siguientes fracciones algebraicas son positivas:
 

a.  $\frac{3x-1}{p^2}$

b.  $\frac{p^2-1}{p^2+1}$

c.  $\frac{p^2-2p+1}{p^2-1}$

d.  $\frac{p^2+1}{p^2-1}$
- Calcula las siguientes multiplicaciones de fracciones algebraicas:
 

a.  $\frac{3x-1}{2x} \cdot \frac{4x}{3x-1}$

b.  $\frac{3x-1}{2x} \cdot \frac{4x}{3x-1}$

c.  $\frac{3x-1}{2x} \cdot \frac{4x}{3x-1}$
- Calcula las siguientes divisiones de fracciones algebraicas:
 

a.  $\frac{3x-1}{2x} : \frac{4x}{3x-1}$

b.  $\frac{3x-1}{2x} : \frac{4x}{3x-1}$

c.  $\frac{3x-1}{2x} : \frac{4x}{3x-1}$

**¿Cómo voy?**

- Revisa los requisitos y luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

Criterio	Puntaje	Ejercicios correctos
Ordenar fracciones algebraicas.	1	..... 1,2
Determinar para qué valores se anula una fracción algebraica o quedan indefinidas.	2	..... 4
Determinar para qué valores una fracción algebraica es positiva.	3	..... 4
Resolver multiplicaciones de fracciones algebraicas.	4	..... 1,3
Resolver divisiones de fracciones algebraicas.	5	..... 1,3

86 | Unidad 2 Expresiones Algebraicas Troncosectoria | 87

## Páginas de cierre

### CÓMO RESOLVERLO

En estas dos páginas observarás dos problemas resueltos paso a paso a través de una determinada estrategia, podrás practicar la estrategia utilizada o aplicar otras que te permitan encontrar la solución. Eso sí, en Matemática siempre hay más de un camino para resolver un problema.

Cómo resolverlo
Unidad 2

**Problema resuelto 1**

Se considera un rectángulo dividido en cuatro partes como se muestra en la figura. Se desea el área de uno de sus partes, determine el área del rectángulo así en función de las áreas conocidas.

**Solución:**

Podemos considerar que no se conocen la longitud de los lados de ningún rectángulo, lo más que sabemos son los nombres de los rectángulos. De esta forma, el largo y el ancho del mayor de los rectángulos menores, serán en cm  $p$  y  $q$ , respectivamente. De modo que tenemos la relación:

$$pq = A$$

El segundo rectángulo, ubicado debajo del que tiene área  $A$ , tiene el mismo largo (igual a  $p$  cm), pero es de ancho distinto (denotamos,  $c$  cm). Por tanto, tenemos:

$$pq = B$$

Y el tercer rectángulo de área conocida, tiene el mismo ancho del segundo, los datos,  $c$  cm, pero su largo es distinto del de los anteriores (denotamos,  $e$  cm), luego tenemos:

$$ce = C$$

De la anterior, podemos deducir que el rectángulo dividido tiene el mismo largo del tercer rectángulo (es decir,  $e$ ), el ancho sería el igual al del primer rectángulo (es decir,  $q$ ). Por tanto, podemos calcular su área:

$$Aq = D$$

$Aq = q \cdot \left(\frac{A}{p}\right)$   
 $Aq = q \cdot \left(\frac{B}{p}\right)$   
 $Aq = q \cdot \left(\frac{C}{c}\right)$   
 $Aq = q \cdot \left(\frac{C}{c}\right)$

El área del rectángulo así es igual a  $\frac{A \cdot C}{p}$  cm<sup>2</sup>.

**Problema resuelto 2**

Un tren va a una velocidad de  $v$  km/h. Un pasajero que va en él se pasa a otro tren en sentido contrario, y el tiempo que tarda en ver pasar al segundo es de 2 segundos. Si la longitud del tren en que va es los dos tercios partes de la del otro tren, y ambos mantienen su rapidez en su momento, ¿cuál es la longitud del tren que va al pasajero?

**Solución:**

Primero se debe determinar la longitud del tren que el pasajero va pasar por cada segundo. Entonces, nos fijamos en que el pasajero va a pasar por cada segundo por el tiempo que le va a pasar.

Cada segundo que avanza el tren en el que viaja, recorre como distancia  $\frac{2}{3}v$  metros.

Por lo tanto, el tren que va en sentido contrario recorre  $\frac{2}{3}v$  la distancia del primer tren, es que su rapidez es dos tercios la rapidez del primer tren.

Es decir, el otro tren recorre en el sentido contrario  $\frac{2}{3}v$  metros en un segundo, y como los trenes van en sentidos contrarios, en realidad el pasajero va pasar cada segundo a través de las distancias recorridas por ambos trenes, es decir:

$$\frac{2}{3}v + \frac{2}{3}v = 2$$

Como el pasajero va el segundo tren durante 2 segundos y recorre en total, entonces el largo del tren es igual a:

$$\frac{2}{3}v + \frac{2}{3}v = 2$$

Es decir, el largo del tren correspondiente  $\frac{2}{3}v$  metros.

**NO OLVIDES QUE...**

Si un problema tiene datos con unidades de medida, el requisito de problemas es de resolver con la unidad de medida correspondiente.

**EN TU CUADERNO**

- Un terreno rectangular se divide en cuatro partes, de manera que tres de sus partes tienen áreas iguales a 10, 120 y 800 hectáreas. Determina el área del rectángulo restante.
- Un cuadrado se divide en 9 partes, de forma que el área de la parte mayor es la suma de las áreas de los rectángulos menores, ¿cuál es el porcentaje que representa los lados del cuadrado respecto al cuadrado?

**RECUERDA QUE...**

El ancho de un rectángulo es  $\frac{A}{l}$  cm.

El largo de un rectángulo es  $\frac{A}{l}$  cm.

88 | Unidad 2 Expresiones Algebraicas Troncosectoria | 89

### NO OLVIDES QUE...

Te recordará que debes revisar tus procedimientos, analizar la pertinencia y consistencia de las soluciones, entre otras.

## EN TERRENO

A partir de una situación desarrollada en un contexto real o laboral, desarrollarás (primero individualmente y luego en equipo) actividades que te permitirán aplicar lo que aprendiste en la unidad.

En terreno
Unidad 2

### Ley de enfriamiento de Newton

Newton figura entre uno de los más grandes genios de la historia, tanto por el rigor de sus ideas como por los fines a los que las aplicó. Su logro fue en su época uno de los avances más importantes de la ciencia que ha alcanzado en la historia de la humanidad. ¿Por qué?

La ley que nos da un ejemplo de una de sus ideas es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. El ejemplo matemático de esta ley es el siguiente:

$$T(t) = T_a + \Delta T \cdot e^{-kt}$$

En este sentido, si se usa un termómetro para medir la temperatura del ambiente,  $\Delta T$  es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del ambiente. En este caso,  $T_a$  es la temperatura del ambiente y  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea.

El punto de partida para la ley de enfriamiento de Newton es la temperatura del ambiente,  $T_a$ , que en este caso es de 23°C. La temperatura del objeto en el momento  $t=0$  es de 79°C. El otro dato que nos da la ley es el tiempo que tarda el objeto en enfriarse hasta la temperatura del ambiente,  $T_a$ , que en este caso es de 10 minutos.

Con base en la ley de enfriamiento de Newton, ¿cuánto tiempo tarda el objeto en enfriarse hasta la temperatura del ambiente,  $T_a$ , que en este caso es de 23°C?

#### EN TU CUADERNO

- Con ayuda de una calculadora y usando la aproximación  $e = 2.71828$ , encuentra los valores de  $k$  y de  $\Delta T$  de la ecuación de la ley.
- Luego encuentra una aproximación para la temperatura del cuerpo humano, si se sabe que murió a las 10 de la mañana.
- ¿El tiempo se considerará en horas?
- ¿Cualquier que sea este caso, cómo consideras el valor negativo de  $k$  que da la ecuación del paciente que murió a las 10 de la mañana?
- ¿Qué otros tipos de problemas se pueden resolver mediante esta ley?
- ¿Qué otras situaciones se pueden resolver usando esta ley?
- ¿Qué maneras el valor de  $k$  depende de los datos aportados en el problema?

#### INVESTIGACIÓN

**Antes trabajen en grupo de cuatro personas:**

- Comparen las soluciones obtenidas por cada integrante y discutan sobre cuál debería ser la solución correcta en caso de que existiera diferencia entre los resultados obtenidos.
- Discutan en conjunto si existe una manera de determinar el valor de la constante  $k$  y para eso sea caso los datos.
- El valor de  $k$  depende del ejemplo, depende de las condiciones del problema. Discutan.
- Cada uno resuelva el siguiente problema:

Un objeto fue enfriado en una habitación que se encuentra a temperatura constante de 15°C, en un tiempo de 10 minutos se enfrió hasta la temperatura de 23°C. ¿Cuál temperatura fue el objeto pasado 10 minutos después de que se enfrió a 23°C? ¿Cuál temperatura el objeto pasado 10 minutos antes de que se enfrió a 23°C?

Para hacer los cálculos, considera  $e = 2.71828$  y sigue estos pasos:

- Primero, dado que el tiempo está expresado en minutos, debes considerar la variable  $t$  como tiempo transcurrido desde que se forma la temperatura del objeto, en minutos.
- Luego, se reemplaza los valores dados en la fórmula, y se está buscando el valor de  $\Delta T$ .
- Conociendo este valor, se encuentra la temperatura del objeto pasado 10 minutos.
- Finalmente, dado que se desea saber la temperatura en un momento anterior al primer registro, se debe considerar un valor de  $t$  negativo para saber la temperatura con la cual ingresó el objeto a la habitación.

#### EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

- Comparen los resultados con los obtenidos por sus compañeros y compañeras. ¿Se obtienen los mismos valores? ¿De no ser así, ¿cuáles son las diferencias?
- ¿Qué sucede si el tiempo se mide ahora en horas o en segundos?
- El valor de  $k$  considerado sirve para este caso o debe ser cambiado? De ser así, ¿cómo podría determinarse el nuevo valor de  $k$ ?
- ¿Se relaciona de alguna manera el valor de la constante  $k$  con los parámetros y variables de medida, cuando cambia una dependencia de los datos considerados, por qué?

100 | Unidad 2
Expresiones algebraicas fraccionarias | 101

## SÍNTESIS DE LA UNIDAD

Este es un espacio para que construyas tu mapa conceptual de todo lo trabajado en la unidad a partir de algunos conceptos fundamentales. También responderás preguntas de verdadero o falso y actividades de desarrollo para evaluar lo que has aprendido en la unidad.

Síntesis de la Unidad
Unidad 2

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Comenzó con ellos un mapa conceptual, en tu cuaderno. No olvides agregar los problemas de valores que indican las relaciones que hay entre los conceptos.

Expresiones algebraicas fraccionarias

Análisis

Simplificación

Ecuaciones

Otros

Sistema de expresiones algebraicas

Problemas

Estructuras

Multiplicación y división

Adición y sustracción

Estructuras

Multiplicación y división

- Determina si las expresiones algebraicas son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.
  - Para simplificar una fracción, basta dividir numerador y denominador por su máximo común divisor.
  - La fracción algebraica  $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 25}$  es irreducible.
  - Una fracción algebraica queda indefinida en  $x = 3$  si el denominador se anula para tal valor de  $x$ .
  - La fracción  $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}$  es mayor que la fracción  $\frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 1}$  para  $x > 0$  y  $x < 0$ .
  - Una fracción algebraica aumenta de valor si el numerador queda  $8x^2$  y el denominador disminuye.
  - Para determinar los valores donde una fracción algebraica queda indefinida, es necesario buscar los valores para los cuales el denominador se anula.
  - El mínimo común múltiplo de  $12x^2$  y  $14x^2(x - 1)$  es  $12x^2(x - 1)$ .
- Las fracciones  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  que generadas por la expresión  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- La única solución positiva de la ecuación  $x + \frac{1}{x} = 2$  es  $x = 1$ .
- Para dividir dos fracciones algebraicas, es necesario multiplicar la primera, por el inverso multiplicativo de la segunda.
- En el caso  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $x < a$ , el valor de la fracción  $\frac{ax}{x^2 + a^2}$  es mayor que  $\frac{1}{2}$ .
- La expresión  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  se anula únicamente para  $x = -1$ .
- La única solución de la ecuación  $x + \frac{1}{x} = 2$  es  $x = 2$ .
- Las fracciones  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  son generadas por la expresión  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

**Aplica lo que aprendiste en la unidad para desarrollar las siguientes actividades:**

- Halla un número positivo tal que, al restarle 43 veces su inverso multiplicativo, se obtenga 2. ¿Es el único número que satisface esta propiedad?, ¿por qué?
- Una persona se esfuerza por limpiar una parcela. Si uno de ellos se desvía de la mitad del tiempo que el otro, ¿pueden o no terminar a la vez, entonces el tiempo que le toma a cada uno para el solo hacer toda la parcela.
- Resuelve la ecuación  $\frac{x^2 - 2x + 1}{12x^2 - 4x - 10} = \frac{1}{2}$ .
- Un grupo de 40 estudiantes de un colegio acordaron poner una cuota para asistir al cine. Pero 10 de ellos no asistieron, entonces el resto pagó 2.000 adicionales. Determina el valor asignado de la cuota.
- Para sumar las siguientes expresiones y determina los valores de  $x$  para los cuales no están definidas.
 
$$\frac{x^2 + 1}{12x^2 - 12x} + \frac{x^2 + 1}{14x^2 - 14x}$$

102 | Unidad 2
Expresiones algebraicas fraccionarias | 103

## EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

En estas dos páginas, podrás autoevaluar los aprendizajes que lograste en la unidad. Tomando en cuenta que una de las alternativas al egresar de la Educación Media es rendir la PSU, incluimos algunas preguntas tipo de esta prueba.

Evaluación de la Unidad
Unidad 2

Resuelve las siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

- ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor para  $x = 2$ ?
  - $\frac{1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x + 1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x}$
- ¿Cuál de las siguientes fracciones es la menor para  $x = 2$ ?
  - $\frac{1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x + 1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x}$
- Si  $x > 1$ , ¿cuál de las siguientes fracciones es la más cercana a  $\frac{1}{2}$ ?
  - $\frac{2x - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x + 1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x}$
  - $\frac{2x + 1}{x}$
- ¿Cuál de las siguientes no es un cociente para la fracción  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ ?
  - $x = -5$
  - $x = 1$
  - $x = -1$
  - $x = 2$

- ¿Qué fracción no está generada por el mismo numerador que las anteriores?
  - $\frac{1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x + 1}{x^2}$
  - $\frac{2x - 1}{x}$
- El resultado de  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  es:
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
- El resultado de  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  es:
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
- El resultado de  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  es:
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$
  - $\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$

- La expresión  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  no es equivalente a:
  - $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
  - $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
  - $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
  - $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
- La operación  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  da como resultado:
  - $\frac{2x^2 - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x^2 - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x^2 - 1}{x^2}$
  - $\frac{2x^2 - 1}{x^2}$
- Determina un número positivo tal que si se le suma 7 el resultado se divide por 3, y si se le resta 2 el resultado se divide por 5. ¿Cuántos números cumplen con estas condiciones?
- Para asistir a cierto lugar, un grupo de amigos se le cobraron \$ 6000 en total. Pero uno de ellos no pudo asistir, de modo que cada uno de ellos cobró pagar \$ 150 más, para el grupo por el mismo concepto. ¿Cuántos amigos había al comenzar?

104 | Unidad 2
Expresiones algebraicas fraccionarias | 105

Cada vez que encuentres este ícono, te invitamos a seguir aprendiendo con tu hipertexto.



# 1

Unidad

# Números y raíces

## EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Caracterizar los números irracionales como aquellos que no pueden ser escritos como un cociente entre dos números enteros.
- Caracterizar los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.
- Utilizar los números reales en la resolución de problemas, reconocer sus propiedades y realizar aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo.
- Ubicar algunas raíces en la recta numérica y explorar situaciones geométricas en las que ellas están presentes.
- Analizar la demostración de la irracionalidad de algunas raíces cuadradas.
- Interpretar y calcular la raíz enésima de un número real y reconocer algunas propiedades.
- Relacionar las raíces enésimas con las potencias de exponente racional.

## CONVERSEMOS DE:

El matemático italiano Leonardo Fibonacci (1170-1230), famoso por sus estudios acerca de la validez del sistema de numeración árabe y la importancia del cero, formuló la siguiente sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Si observas, cada número de la sucesión es igual a la suma de los dos términos anteriores; además, estos vienen dados por la fórmula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Años después del planteamiento de la sucesión, los astrónomos descubrieron que la relación entre los planetas en el sistema solar podía ser descrita mediante los números de Fibonacci; otros descubrimientos surgieron en la Biología, relacionando la sucesión con la conformación de las plantas cuyos tallos o pétalos tienen forma de espiral, así como en la concha de algunos moluscos, por ejemplo, la concha de un nautilus. En el ejemplo anterior, se muestra una de las múltiples aplicaciones de las raíces, que estudiarás en esta unidad, como también se enseña una vez más la increíble relación entre la Matemática y el mundo que nos rodea.

