УДК–518.9

ИГРА „НАПАДЕНИЕ – ЗАЩИТА“

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

Обычно при решении матричных игр не только не удается указать формулы выражающие значение игры и оптимальные стратегии игроков через параметры игры, но даже формулировка алгорифма, описывающего во всех деталях ход решения игры и его результаты, оказывается довольно редким явлением. Тем более поучительны те (к сожалению, весьма узкие!) классы игр, для которых такие алгорифмы удается построить.

В данной заметке приводится исчерпывающее исследование одного такого класса игр, допускающих наглядную интерпретацию в терминах нападения и защиты.

Пусть игрок 1 силами одной единицы намерен атаковать один из объектов $C_1, \ldots, C_n$, имеющих соответственно положительные ценности a_1, a_n. Игрок 2, также располагающий одной единицей сил, защищает один из этих объектов. Будем считать, что подвергшийся атаке незащищенный объект C_i с достоверностью уничтожается (игрок 1 выигрывает a_i), а защищенный – с вероятностью $p>0$ выдерживает нападение (игрок 1 выигрывает в среднем $(1-p)\,a_i$). В другой, эквивалентной постановке задачи можно считать, что незащищенный объект уничтожается при атаке полностью, а от защищенного сохраняется его доля p.

Очевидно, задача выбора объекта нападения для игрока 1 и выбора объекта защиты для игрока 2 сводится к матричной игре Γ_A с матрицей выигрышей

$$A=\begin{pmatrix} (1-p)\,a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & (1-p)\,a_2 & a_2 \\ & & \\ a_n & a_n & (1-p)\,a_n \end{pmatrix}.$$

Случай, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны, был разобран Дрешером [1], [2].

1. Выясним сначала, в каких условиях *каждая* оптимальная стратегия игрока 2 является чистой. Очевидно, в этих случаях чистая оптимальная стратегия игрока 2 единственная.

Обозначим через a' величину наибольшей среди всех ценностей a_1, a_2,
Пусть для определенности

$$a'=a_1=a_2=\ldots=a_k.$$

Через a'' обозначим следующую по величине после a' ценность. Будем считать, что

$$a''=a_{k+1}=\ldots=a_l.$$

Предположим, что единственной оптимальной стратегией игрока 2 является защита объекта C_j. Покажем, что в этом случае

$$j=k=1.$$

Допустим, что существует незащищенный объект максимальной ценности. Это означает, что существует отличное от j натуральное f, не превосходящее k. Атака игроком 1 объекта C_f даст ему выигрыш a'. Таким образом при сделанном предположении значение v рассматриваемой нами игры должно удовлетворять неравенству

$$v \geqslant a'. \qquad (1)$$

С другой стороны, рассмотрим смешанную стратегию Y игрока 2, состоящую в обороне им с вероятностью $\frac{1}{k}$ каждого из объектов C_1, C_2, C_k. Тогда атака игроком 1 любого из объектов максимальной ценности дает ему

$$\frac{1}{k}(1-p)a' + \frac{k-1}{k}a' = a'\left(1-\frac{p}{k}\right) < a'$$

Атака игроком 1 любого из остальных объектов дает ему не более, чем $a'' < a'$.

Таким образом, применение игроком 2 стратегии Y уменьшает гарантированный выигрыш игрока 1 до числа, меньшего, чем a'. Применение игроком 2 своей оптимальной стратегии может привести разве лишь к дальнейшему уменьшению гарантированного выигрыша 1. Следовательно, $v < a'$, что, однако, противоречит (1).

Значит, всякий объект максимальной ценности должен защищаться с положительной вероятностью. Но так как по предположенному игрок 2 играет *чистую* стратегию, это возможно лишь в том случае, когда имеется только один объект максимальной ценности.

2. Возьмем теперь произвольную оптимальную стратегию $X=(x_1, \ldots, x_n)$ игрока 1. Так как $(X, 1)$ есть ситуация равновесия, мы имеем

$$a_{i1} \leqq XA_{\cdot 1} \leqslant XA_{\cdot j},^{*)} \qquad i, j=1, 2,$$

Следовательно, ненулевые компоненты X могут соответствовать лишь максимальным элементам столбца $A_{\cdot 1}$.

В зависимости от соотношения чисел $(1-p)a'$ и a'' (а только эти числа и могут быть максимальными в столбце $A_{\cdot 1}$) нам могут, вообще говоря, представиться три различных случая.

1° $(1-p)a' > a''$ В этом случае $(1-p)a'$ есть максимальный элемент столбца $A_{\cdot 1}$. Поэтому единственная оптимальная стратегия игрока 1 чистая и состоит в атаке им наиболее ценного объекта; $v=(1-p)a'$

2° $(1-p)a' = a''$ Для того, чтобы стратегия X игрока 1 была оптимальной, в наших условиях необходимо и достаточно, чтобы

$$v=(1-p)a' = XA_{\cdot 1} \leqq XA_{\cdot j}, \qquad j=1, \qquad n.$$

При $1 < j \leqq l$ это дает нам

$$(1-p)a' \leqq x_1 a' + x_j a''(1-p) + (1-x_1-x_j)a'', \qquad (2)$$

а при $j > l$

$$(1-p)a' \leqq x_1 a' + (1-x_1)a''.$$

*) Здесь и далее a_{ij} — обычное обозначение элемента матрицы A. $A_{i\cdot}$ — i-ая строка A, а $A_{\cdot j}$ — ее j-ый столбец.

Последнее неравенство выполняется автоматически, поскольку $p>0$. Неравенства же (2) можно переписать как

$$(1-p)\,a' \leqq x_1 a' + x_j (1-p)^2 a' + (1-x_1-x_j)(1-p)\,a',$$

$$(1-p) \leqq x_1 + x_j (1-p)^2 + (1-x_1-x_j)(1-p),$$

$$0 \leqq x_1 p - x_j p\,(1-p),$$

$$x_j \leqq \frac{x_1}{1-p}. \tag{3}$$

Таким образом, в этом случае оптимальной стратегией игрока 1 будет любая его стратегия, чистая или смешанная, ненулевые компоненты которой соответствуют максимальным элементам (не обязательно всем) выбираемого игроком 2 столбца и должны удовлетворять соотношению (3).

3°. $(1-p)\,a' < a''$ Здесь ненулевыми компонентами оптимальной стратегии X могут быть лишь $x_2, \quad x_l$. Дальнейшие условия ее оптимальности состоят в том, что

$$v = a'' = XA_{\cdot 1} \leqslant XA_{\cdot j}.$$

При $1 < j \leqq l$ это дает нам

$$a'' \leqq x_j a'' (1-p) + (1-x_j)\,a'',$$

что при $x_j > 0$ невозможно. Полученное противоречие показывает, что в этом случае среди оптимальных стратегий игрока 2 должны быть смешанные.

3. Предположим теперь, что игрок 2 имеет смешанные оптимальные стратегии, Y — одна из них, а R — множество тех его чистых стратегий, которые входят в Y с ненулевыми вероятностями. Заметим, что по предположенному множество R содержит не менее двух элементов.

Возьмем произвольную оптимальную стратегию $X=(x_1, \quad x_n)$ игрока 1. Игрок 2, защищая один из объектов C_r $(r \in R)$ дает игроку 1 выиграть

$$XA_{\cdot r} = \sum_{s \in R} a_s x_s - p a_r x_r = v.$$

Сопоставляя любые два равенства этой системы, мы получаем

$$p\,(a_r x_r - a_s x_s) = 0,$$

$$a_r x_r = \text{const}, \qquad r \in R. \tag{4}$$

Так как все $a_r > 0$, это равенство показывает, что либо все x_r $(r \in R)$ равны нулю, либо все они положительны. Рассмотрим сначала первую из этих возможностей.

В ее условиях должны атаковаться только незащищаемые объекты. Так как хотя бы один объект всегда атакуется с положительной вероятностью, R содержит не более, чем $n-1$ стратегию. Ясно, что оптимальный образ действий игрока 1 должен состоять в нападении на тот объект, из числа не принадлежащих R, который имеет наибольшую ценность. Пусть это будет объект C_k.

Тогда пара (k, Y) должна быть в наших предположениях ситуацией равновесия. В частности, поэтому

$$A_{k\cdot} Y^T \leqq a_{kj}, \qquad 1 \leqq j \leqq n. \tag{5}$$

Но в наших условиях объект C_k не защищается, и потому

$$A_k.\, Y^T = a_k. \tag{6}$$

Пусть теперь 2 будет вместо Y играть свою k-ую чистую стратегию. Его убыток тогда будет, очевидно, равен

$$a_{kk} = (1-p)\, a_k < a_k,$$

что вместе с (5) и (6) дает нам противоречие.

Итак, предположение о том, что все вероятности x_r $(r \in R)$ равны нулю, оказалось несостоятельным, и мы должны считать все эти вероятности положительными.

Содержательно наш вывод совершенно естественный: он означает, что в условиях ситуации равновесия обороняться должны только атакуемые объекты. Так как R по предположенному содержит не менее двух чистых стратегий, мы заключаем, что игрок 1 в каждой своей оптимальной стратегии атакует не менее двух объектов. Это значит, что он не может иметь в этом случае чистых оптимальных стратегий.

4. Займемся теперь непосредственно поисками ситуаций равновесия игры Γ_A.

Для того, чтобы (x, y) было ситуацией равновесия необходимо и достаточно, чтобы

$$A_i.\, Y^T \leqq v = XAY^T \leqq XA._j, \qquad i, j = 1, \tag{7}$$

Обозначим множество всех чистых стратегий, входящих в „наиболее смешанную" оптимальную стратегию X с ненулевыми вероятностями, через S. Вп. 3 было установлено, что $R \subset S$. Число стратегий в R обозначим через ρ, а в $S \setminus R$ — через σ.

Соотношение (7) с учетом того, что $y_r > 0$ при $r \in R$ и $x_s > 0$, при $s \in S$ можно переписать в виде следующей системы:

$$A_r.\, Y^T = v, \qquad r \in R; \tag{8}$$

$$A_s.\, Y^T = v, \qquad s \in S \setminus R; \tag{9}$$

$$A_t.\, Y^T \leqq v, \qquad t \notin S; \tag{10}$$

$$XA._r = v, \qquad r \in R; \tag{11}$$

$$XA._s \geqq v, \qquad s \in S \setminus R; \tag{12}$$

$$XA._t \geqq v, \qquad t \notin S. \tag{13}$$

Равенства (8) означают, что

$$A_r.\, Y^T = (1-p)\, a_r y_r + a_r (1-y_r) = a_r (1-py_r) = v, \qquad r \in R. \tag{14}$$

Сопоставляя одно из таких равенств с каждым из остальных (а это можно, ибо R насчитывает не менее двух стратегий), мы получаем

$$a_r (1-py_r) = a_{r'} (1-py_{r'}),$$

$$\frac{a_r}{a_{r'}} (1-py_r) = 1 - py_{r'},$$

а, суммируя по всем $r' \in R$ и полагая

$$\sum_{r' \in R} \frac{1}{a_{r'}} = \alpha_R,$$

мы получаем

$$a_r \alpha_R (1 - p y_r) = \rho - p,$$

откуда

$$y_r = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\rho - p}{a_r \alpha_R}\right). \tag{15}$$

Так как $y_r > 0$, для всех $r \in R$ должно быть

$$a_r > \frac{\rho - p}{\alpha_R}. \tag{16}$$

Далее, подставляя выражение для y_r в (14), мы получаем

$$\frac{\rho - p}{\alpha_R} = v. \tag{17}$$

Таким образом, составляя Y из определяемых равенствами (15) компонент y_r и надлежащего количества нулевых компонент, мы, учитывая (16), получаем стратегию игрока 2, удовлетворяющую в силу (17) равенствам (8). При этом из (16) следует, что чистые стратегии из R соответствуют защитам целей, ценность которых строго больше, чем значение игры. Впрочем, пока значение игры для нас остается неизвестным, так как мы еще не определили величин α_R и ρ.

Равенства (9) означают, что

$$\sum a_s y_j = a_s \sum_j y_j = a_s = v, \qquad s \in S \setminus R. \tag{18}$$

Заметим в связи с этим, что $S \setminus R$ непусто только в том случае, когда в нашей игре существуют цели, ценность которых равна значению игры. Наоборот, если $a_s = v$, то $s \in S \setminus R$.

Предположим, что при некотором $t \notin S$ будет $a_t > v$. Тогда

$$A_{t\cdot}\, Y^T = a_t > v,$$

что противоречит оптимальности стратегии Y. Так как при $a_t = v$ должно быть $t \in S \setminus R$, мы получаем, что при $t \notin S$

$$a_t < v. \tag{19}$$

Таким образом при $t \notin S$

$$A_{t\cdot}\, Y^T < v,$$

откуда следует (10).

В связи со всем только что сказанным, неравенство (16) есть не только необходимое, но и достаточное условие того, что $r \in R$.

Рассмотрим теперь равенства (11), которые можно переписать так:

$$XA_{\cdot r} = \sum_{\substack{i \in R \\ i \neq r}} x_i a_i + (1 - p) a_r x_r + \sum_{i \in S \setminus R} a_i x_i = v.$$

Ввиду того, что первая из этих сумм содержит $\rho - 1$ слагаемое и все они по (4) равны друг другу (обозначим их общее значение через λ), а a_i при $i \in S \setminus R$ есть v, мы, обозначая $\sum\limits_{i \in S \setminus R} x_i$ через $x_{S \setminus R}$, получаем

$$(\rho - p)\lambda + v\, x_{S \setminus R} = v,$$

т.е.

$$\lambda = \frac{v}{\rho - p}\,(1 - x_{S\setminus R}) = \frac{1 - x_{S\setminus R}}{\alpha_R}. \tag{20}$$

Заметим, что (20) вместе с (4) в свою очередь дают нам (11).

Обратимся к неравенствам (12). Они дают нам

$$XA_{\cdot s} = \sum_{i\in R} x_i a_i + \sum_{\substack{i\in S\setminus R\\ i\neq s}} x_i a_i + (1-p)\,x_s a_s \geqq v,$$

или, употребляя введенные обозначения,

$$\rho\lambda + v x_{S\setminus R} - p x_s a_s \geqq v. \tag{21}$$

Но на основании (20)

$$x_{S\setminus R} = 1 - \sum_{r\in R} x_r = 1 - \lambda\alpha_R. \tag{22}$$

Поэтому, учитывая (17), неравенство (21) переписывается как

$$\rho\lambda + \frac{\rho - p}{\alpha_R}\,(1 - \lambda\alpha_R) - p\,\frac{\rho - p}{\alpha_R}\,x_s \geqq \frac{\rho - p}{\alpha_R},$$

или после упрощений

$$x_s \leqq \frac{\lambda\alpha_R}{\rho - p}. \tag{23}$$

Заметим, что и наоборот, из неравенств (23) можно вывести соответствующие неравенства (12).

Наконец, неравенства (13) в наших условиях выполняются автоматически:

$$XA_{\cdot t} = \sum_{r\in R} x_r a_r + \sum_{s\in S\setminus R} x_s a_s > a_s \sum_{s\in S} x_s = a_s = v.$$

Таким образом число v и векторы X и Y удовлетворяющие соотношениям (4), (15), (17) и (23) оказываются соответственно значением игры Γ_A и оптимальными стратегиями игроков в ней.

5. Для завершения решения нашей игры нам остается определить множество R и параметр λ.

Выпишем с этой целью все ценности

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \ldots,\ a_{i_n}$$

в невозрастающем порядке. Ввиду (16), (18) и (19) можно считать, что

$$\{i_1, \ \ldots, \ i_\rho\} = R,$$

$$\{i_{\rho+1}, \qquad i_{\rho+\sigma}\} = S\setminus R,$$

(где, разумеется, $a_{i_{\rho+1}} = \qquad = a_{i_{\rho+\sigma}}$).

Очевидно, неравенство (16) при $r=\rho$ должно соблюдаться, а при бóльших значениях r – нет. Поэтому для нахождения ρ можно воспользоваться следующей процедурой. Перепишем (16) при $r=\rho$ в виде

$$\frac{a_\rho}{a_1} + \frac{a_\rho}{a_2} + \ldots + \frac{a_\rho}{a_\rho} > \rho - p,$$

или

$$\frac{a_1 - a_\rho}{a_1} + \frac{a_2 - a_\rho}{a_2} + \ldots + \frac{a_\rho - a_\rho}{a_\rho} < p. \tag{24}$$

При увеличении ρ на единицу в левой части этого неравенства, во-первых, увеличивается каждое из слагаемых и, во-вторых, прибавляется еще одно неотрицательное слагаемое (фактически – нуль). Поэтому левая часть (24) есть неубывающая функция ρ. Следовательно, либо (24) выполняется при всех значениях ρ и тогда $\rho=n$, либо же существует такое значение ρ, для которого (24) еще выполняется, в то время как для $\rho+1$ оно уже перестает быть справедливым. Очевидно, такое значение ρ единственное и является искомым.

Пусть сначала $\rho=n$. В этом случае, очевидно, $\sigma=0$, а α_R вычисляется непосредственно как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Зная ρ и α_R, мы из (17) получаем $v=\dfrac{n-p}{\alpha_R}$.

Поскольку здесь $x_{S\setminus R}=0$, из (20) мы получаем:

$$\lambda=\frac{1}{\alpha_R},$$

откуда

$$x_i=\frac{1}{a_i\,\alpha_R}, \qquad i=1,$$

а из (15) –

$$y_i=\frac{1}{p}\left(1-\frac{n-p}{a_i\,\alpha_R}\right), \qquad i=1,$$

Пусть теперь $\rho<n$. Значение α_R вычисляется сразу, после чего из формулы (17) находится v. Затем устанавливается σ, как число обьектов, ценность которых равна v. Очевидно, если таких обьектов нет, то $\sigma=0$, фактически именно этот случай соответствует рассмотренному Дрешером.

Найдем, наконец, λ. С этой целью перепишем (23), принимая во внимание (22):

$$\frac{1-x_{S\setminus R}}{\rho-p} \geqq x_s, \qquad s\in S\setminus R. \tag{25}$$

Суммируя это неравенство по всем $s\in S\setminus R$, мы получим

$$\sigma\;\frac{1-x_{S\setminus R}}{\rho-p} \geqq x_{S\setminus R},$$

откуда

$$x_{S\setminus R} \leqq \frac{\sigma}{\sigma+\rho-p},$$

так что, пользуясь снова (22),

$$\lambda=\frac{1-x_{S\setminus R}}{\alpha_R} \geqq \frac{\rho-p}{\alpha_R}\;\frac{1}{\sigma+\rho-p}.$$

Верхняя граница для λ находится из условия

$$\sum_{r\in R} x_r=\lambda\alpha_R \leqq 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\alpha_R}\;\frac{\rho-p}{\sigma+\rho-p} \leqq \lambda \leqq \frac{1}{\alpha_R},$$

откуда (22) и (25) сразу дают нам

$$0 \leqq x_s \leqq \frac{\sigma}{\sigma+\rho-p}.$$

Итак, значение нашей игры есть $\frac{\rho-p}{\alpha_R}$, где ρ и α_R определяются по формуле (24), а оптимальные стратегии подчинены соотношениям

$$\begin{aligned}
&x_r = \frac{\lambda}{a_r}, && r \in R,\\
&\sum_{s \in S \setminus R} x_s \leqq \frac{\sigma}{\sigma+\rho-p}, && s \in S \setminus R,\\
&x_t = 0, && t \notin S,\\
&y_r = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\rho-p}{\alpha_R}\right), && r \in R,\\
&y_t = 0, && t \notin R.
\end{aligned}$$

Оптимальная стратегия игрока 2 единственна во всех случаях. Игрок 1 имеет единственную оптимальную стратегию только при $\sigma=0$.

Ленинград

Поступило в редакцию
18. I. 1968

Литература

1. M. Dresher, Theory and applications of games of strategy, The RAND Corporation, R–216, 1951.
2. М. Дрешер, Стратегические игры, теория и приложения, ,,Советское радио'', М., 1964.

„PUOLIMO – GYNYBOS“ LOŠIMAS

N. VOROBJOVAS

(Reziumė)

Pilnai išspręstas matricinis lošimas, suformuluotas M. Drešerio [1] – [2] ir vadinamas „puolimo – gynybos“ lošimu.

THE „ATTACK – DEFENCE“ GAME

N. VOROBEV

(Summary)

Complete solution of the „attack – defence“ game introduced by M. Dresher [1] – [2] is given.