数理科学特論: 選択公理とバナッハ=タルスキの定理 (藤田 博司)

目 的

- 選択公理と関連する命題について深く理解する
- 超限帰納法と超限再帰の技法を身につける
- バナッハ=タルスキの定理を証明し, 集合論を基礎とする現代の数学について再考する

目 標

- 選択公理とツォルンの補題のステートメントを言える.
- ツォルンの補題を応用した存在証明ができる.
- 整列順序の定義が正しく言える. また, 簡単な例を挙げられる.
- 超限帰納法による証明が読める. また必要に応じて使える.
- バナッハ=タルスキの定理について, 第三者にきちんと説明できる.

第 1 回: 選択公理とは (2011/10/5)

定理 1 実数の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と実数 c について次の二つの条件は同値である.

(1) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, (\, |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon\,)$.

(2) 実数の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が c に収束するなら数列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(c)$ に収束する. □

定義 2 集合 A から単射 $A \to \mathbb{N}$ が存在するとき, A を**可算集合**という. □

定理 3 各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に可算集合 A_n が対応しているとき, それらの和集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ も可算集合である. □

> **選択公理** 集合 I の各要素 $i \in I$ に空でない集合 A_i が対応しているとする. このとき, $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ を, すべての $i \in I$ について $f(i) \in A_i$ となるようにとることができる. □

(選択公理のことを AC と表記することがある.)

定義 4 集合系 $\langle A_i : i \in I \rangle$ の**直積** $\prod_{i\in I} A_i$ を

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f \;:\; f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i,\ \forall i \in I\big(\, f(i) \in A_i\,\big) \right\}$$

によって定義する. □

$$\mathrm{AC} \iff \left(\forall i \in I (A_i \neq \emptyset) \implies \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset \right). \ \square$$

定義 5 集合 X の**冪集合** $\mathcal{P}(X)$ とは X の部分集合全体のなす集合のことである: $\mathcal{P}(X) = \{\, Y : Y \subset X \,\}$. □

$$\mathrm{AC} \iff \forall X \neq \emptyset\, \exists F \Big(\, F : \mathcal{P}(X) \to X\ \wedge \forall Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}\, \big(F(Y) \in Y\big) \Big). \ \square$$