

## ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

Ένα ρεύμα ονομάζεται εναλλασσόμενο όταν το πλάτος του χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση του χρόνου, η οποία εμφανίζει κάποια περιοδικότητα. Το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από μια τομή ενός αγωγού στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν, όταν δεν υπάρχει συνεχής συνιστώσα. Η καμπύλη της περιόδου της συνάρτησης μπορεί να έχει πολλές μορφές. Η μορφή που θα μελετήσουμε είναι η ημιτονική κυματομορφή που είναι και η πιο συνηθισμένη από την καθημερινή μας εμπειρία (ρεύμα δικτύου ΔΕΗ). Η συνάρτηση που περιγράφει το πλάτος της έντασης και της τάσης σε ένα κύκλωμα είναι της μορφής:

$$i = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

$$v = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

όπου  $i$  και  $v$  είναι οι στιγμιαίες τιμές έντασης και τάσης αντίστοιχα,  $I_{\max}$  και  $V_{\max}$  είναι οι μέγιστες τιμές έντασης και τάσης,  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα ( $\omega=2\pi f$ ),  $t$  είναι ο χρόνος και  $\varphi$  είναι η αρχική γωνία η οποία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Δυο άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη για την ένταση και την τάση είναι η τιμή από κορυφή σε κορυφή “peak to peak” ( $I_{pp}$  και  $V_{pp}$ ) και η ενεργός τιμή ή μέση τετραγωνική τιμή “root mean square” ( $I_{rms}$  και  $V_{rms}$ ). Οι τιμές από κορυφή σε κορυφή, είναι προφανές, από το όνομα τους, ότι αντιστοιχούν στο συνολικό πλάτος από τη μέγιστη θετική τιμή της συνάρτησης ως τη μέγιστη αρνητική. Για την ενεργό τιμή μιας συνάρτησης  $a(t)$  ισχύει η σχέση:

$$a_{rms} = \frac{1}{T} \int_0^T a^2 dt \quad (3)$$

Όταν η  $a(t)$  είναι ημιτονική συνάρτηση από την (3) προκύπτει ότι  $a_{rms} = a_{max}/2^{1/2}$ . Έτσι προκύπτει για την ένταση και την τάση:

$$I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$V_{rms} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

Σε ένα κύκλωμα που τα στοιχεία του έχουν ωμική συμπεριφορά ( $R$ ) όταν εφαρμόζεται σε αυτό τάση  $v$  και διαρρέεται από ρεύμα  $i$  ισχύει:

$$i = I_{max} \sin \omega t$$

$$v_R = Ri \Rightarrow v_R = RI_{max} \sin \omega t \quad (6)$$

από όπου παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης. Όταν η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι αποκλειστικά επαγωγική ( $L$ ) ισχύει αντίστοιχα:

$$i = I_{max} \sin \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow v_L = L\omega I_{max} \cos \omega t = I_{max} L\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης  $\pi/2$  με την τάση να προηγείται της έντασης. Όταν η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι αποκλειστικά χωρητική ( $C$ ) ισχύει αντίστοιχα:

$$i = I_{max} \sin \omega t$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow v_C = \frac{1}{C\omega} I_{max} (-\cos \omega t) = \frac{1}{C\omega} I_{max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8)$$

Βλέπουμε ότι υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης  $\pi/2$  με την ένταση αυτή τη φορά να προηγείται της τάσης. Στη γενική περίπτωση όμως που μαζί με τη μιγαδική αντίσταση εμφανίζεται και ωμική, τότε η τάση στα άκρα του δικτύωματος  $RL$  ή  $RC$  δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 v &= v_R + v_L = RI_{\max} \sin \omega t + I_{\max} X_x \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow v &= V_{\max} \sin(\omega t \pm \varphi) \\
 X_L &= L\omega, \quad \varphi = \arctan \frac{L\omega}{R} \\
 X_C &= \frac{1}{C\omega}, \quad \varphi = \arctan \frac{1}{C\omega R}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Το προσφερόμενο έργο, στη μονάδα του χρόνου, στα στοιχεία ενός κυκλώματος ονομάζεται ισχύς. Η ισχύς ως συνάρτηση του χρόνου σε κύκλωμα που τα στοιχεία του έχουν καθαρά επαγωγική συμπεριφορά ( $L$ ) δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t) \cdot i(t) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \sin 2\omega t
 \end{aligned} \tag{10}$$

Όταν η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι αποκλειστικά χωρητική ( $C$ ) ισχύει αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t) \cdot i(t) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cdot (-\cos \omega t) \\
 \Rightarrow P &= -\frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \sin 2\omega t
 \end{aligned} \tag{11}$$

Σε κύκλωμα που τα στοιχεία του έχουν ωμική συμπεριφορά (R) οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t) \cdot i(t) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= I_{\max} V_{\max} \sin^2 \omega t \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} (1 - \cos 2\omega t)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η συνάρτηση της ισχύος μεταβάλλεται με διπλάσια συχνότητα από ότι οι συναρτήσεις του ρεύματος και της τάσης. Παρατηρούμε επίσης ότι η μέση τιμή της ισχύος στο χρόνο μιας περιόδου είναι μηδέν για επαγωγικά και χωρητικά κυκλώματα, ενώ είναι πάντα θετική για ωμικά. Στη γενική περίπτωση, τέλος, που το κύκλωμα εμφανίζει μιγαδική και ωμική αντίσταση η ισχύς που απορροφά το κύκλωμα *RLC* δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t) \cdot i(t) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \vartheta) \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \cos \vartheta - \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \cos(2\omega t + \vartheta)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Στην τελευταία σχέση η μέση τιμή της αρνητικής ποσότητας της συνάρτησης είναι ίση με μηδέν και έτσι για την πραγματική ισχύ έχουμε:

$$P = \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \cos \vartheta = I_{rms} V_{rms} \cos \vartheta \tag{14}$$

Αυτή είναι και η καταναλισκόμενη ισχύ από το κύκλωμα και η μονάδα μέτρησης που μετριέται είναι το “Watt”. Σε αντίθεση με την πραγματική ισχύ, θα ορίσουμε ως άεργο, την ποσότητα που ρέει προς και από το κύκλωμα, με μέση τιμή, στο χρόνο μιας περιόδου, ίση με μηδέν. Η άεργος ισχύς δίνεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \sin \vartheta = I_{rms} V_{rms} \sin \vartheta \tag{15}$$

Οι μονάδες μέτρησης της άεργου ισχύος είναι το “Var”. Τέλος, το γινόμενο της ενεργού έντασης με την ενεργό τάση ονομάζεται φαινόμενη ισχύς.

$$S = \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} = I_{rms} V_{rms} \quad (16)$$

Η φαινόμενη ισχύς αποτελεί χαρακτηριστικό της κάθε συσκευής και μονάδα μέτρησής της είναι το “VA”. Η μιγαδική έκφραση του μεγέθους αυτού είναι:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{V}_{rms} \dot{I}_{rms}^* \Rightarrow S = V_{rms} e^{i\varphi} \cdot I_{rms} e^{-i(\varphi+\theta)} \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= V_{rms} \cdot I_{rms} e^{-i\theta} \Rightarrow S = V_{rms} I_{rms} \cos \theta - i V_{rms} I_{rms} \sin \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= P - iQ \end{aligned} \quad (17)$$

Η ελαχιστοποίηση της άεργου ισχύος είναι σημαντική για την ομαλή λειτουργία των συσκευών αλλά και για το δίκτυο παραγωγής και διακίνησης της ηλεκτρικής ενέργειας. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η τιμή  $\cos\theta$  να είναι κοντά στο 1. Οι συσκευές έχουν συνήθως επαγωγική συμπεριφορά ( $0 < \theta < \pi/2$ ) και άρα η τιμή  $\cos\theta$  είναι μεταξύ 0 και 1. Τοποθετώντας παράλληλα με το επαγωγικό φορτίο ένα χωρητικό μπορούμε να πετύχουμε ελάττωση της γωνίας  $\theta$  και μεγιστοποίηση του συνημίτονου. Η τιμή του πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C = \frac{P}{\omega V_x^2} (\tan \theta_A - \tan \theta_T) \quad (18)$$

όπου  $\theta_T$  η τελική γωνία που επιθυμούμε και  $\theta_A$  η αρχική.

Πορλιδάς Δημήτριος