Hier können wir auch jede Funktion entwickeln im Intervall $[-\pi, +\pi]$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n k_n(x) . \tag{2.14}$$

Die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich in diesem Fall zu

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inx} f(x) dx . \tag{2.15}$$

Allgemein lässt sich das auf periodische Funktionen erweitern. Diese lassen sich sämtlichst durch Fourier-Reihen darstellen. Ist deren Periode nicht durch 2π gegeben, kann man eine einfache Variablen-Transformation durchführen, welche die Periode der Funktion auf das Intervall $[-\pi, +\pi]$ abbildet.

2.1.2 Legendre-Polynome

In der Elektrostatik ist das vollständige Funktionensystem der Legendre-Polynome relevant. Wir betrachten hierzu die Funktion welche im Poisson-Integral auftritt

$$\Psi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \tag{2.16}$$

Bezeichnet man mit α den Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$, können wir dies schreiben als

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{r_<^2 + r_>^2 - 2r_< r_> \cos(\alpha)}} . \tag{2.17}$$

Hier haben wir definiert

$$r_< = \min(r, r') , \qquad r_> = \max(r, r') . \tag{2.18}$$

Der Zweck dieser Definitionen ist, dass man damit einen dimensionslosen Parameter

$$\frac{r_<}{r_>} \leq 1 \tag{2.19}$$

hat, nach welchem man die Wurzel entwickeln kann

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>} \cos\alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{r_>} \left[1 + \cos\alpha \frac{r_<}{r_>} + \frac{1}{2}\left(3\cos^2\alpha - 1\right) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 + \ldots \right] \\
&= \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n .
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten sind die **Legendre-Polynome $P_n(\cos\alpha)$**. Mit der für radialsymmetrische Probleme typischen Substitution $x = \cos\alpha$, so dass $-1 \leq x \leq +1$ gilt, lauten die ersten Legendre-Polynome

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 , \\
P_1(x) &= x , \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) , \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) .
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Man sieht bereits, dass die Legendre-Polynome mit ungeradem Index auch ungerade Funktionen von x sind und umgekehrt. Allgemein kann man die Legendre-Polynome nach der **Rodriguez-Formel** berechnen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,. \tag{2.22}$$

Die Funktion

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{2.23}$$

wird dann auch als generierende Funktion der Legendre-Polynome bezeichnet, da wir diese aus der Taylor-Entwicklung der Funktion erhalten. Wir können Sie benutzen um eine praktische Rekursionsformel für die Legendre-Polynome zu bekommen

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_n nP_n(x)t^{n-1}\,. \tag{2.24}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(1-2xt+t^2)$, wird gerade die generierende Funktion reproduziert

$$(1-2xt+t^2)\sum_n nP_n(x)t^{n-1} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = (x-t)\sum_n P_n(x)t^n\,. \tag{2.25}$$

Wir sortieren diese Gleichung nach Potenzen von t

$$\sum_{m=0}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{s=0}^{\infty} sP_s(x)t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x) = 0. \tag{2.26}$$

Da diese Gleichung für alle t und $x \in [-1,+1]$ gelten muss, müssen die Vorfaktoren jeder Potenz von t separat die Gleichung erfüllen. Um diese Potenzen zu sortieren setzen wir einfach $m = n+1$ und $s = n-1$, was auf die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) \\ &= (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) \end{aligned} \tag{2.27}$$

führt. Diese Gleichung kann allerdings nur ab $n = 1, 2, \ldots$ gelten, da wir ja die Rand-Terme in der Summe nicht explizit behandelt haben. Wir können diese Formel nach $P_{n+1}(x)$ auflösen und erhalten damit eine numerisch stabile **Rekursionsformel für die Legendre-Polynome**

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{n+1}\,. \tag{2.28}$$

Diese Rekursionsformel generiert alle Legendre Polynome aus den zwei einfachsten $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

Die Legendre-Polynome lassen sich also als Taylor-Koeffizienten der generierenden Funktion verstehen. Durch Ableiten der generierenden Funktion nach x

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n \tag{2.29}$$