MS-C1300 Kompleksianalyysi **Peltonen/Lehtomäki**

Laskuharjoitus 5, Viikko 41

Cauchyn integraalilause ja kaava. Tehtävissä 1. ja 2. riittää intuitiivinen perustelu.

1. (a) Mitkä seuraavista joukoista ovat yhdesti yhtenäisiä:
   i. $B(\mathrm{i},2)\backslash\{0\}$,
   ii. $B(0,1)\backslash\big(\bar{B}(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)\big)$,
   iii. $B(0,1)\backslash[0,1)$?

   (b) Mitkä seuraavista poluista ovat 0-homotooppisia joukossa $B(0,1)\backslash\{\frac{1}{n}|n=2,3,\cdots\}$? Parametri $t\in[0,2\pi]$.
   i. $\gamma : t\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$
   ii. $t\mapsto \epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ja ϵ riittävän pieni irrationaaliluku
   iii. $t\mapsto \frac{\mathrm{i}}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$
   iv. $\gamma\tilde{\gamma}$, missä $\tilde{\gamma} : t\mapsto\gamma(-t)$

   Huom. merkintä $\gamma\tilde{\gamma}$ tarkoittaa polkujen tuloa, jossa edetään ensin polun γ parametrisoinnin mukaisesti ja sen jälkeen jatketaan polun $\tilde{\gamma}$ parametrisoinnin mukaisesti.

2. Mitkä seuraavista poluista ovat keskenään homotooppisia alueessa $\mathbb{C}\backslash(\{0\}\cup\{1\})$? Parametri $t\in[0,2\pi]$.

   (a) $\gamma_1 : t\mapsto\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$
   (b) $\gamma_2 : t\mapsto\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$
   (c) $\gamma_2\gamma_3$, missä γ_2 kuten edellä ja $\gamma_3 : t\mapsto 1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\pi)}$
   (d) $\gamma_4 : t\mapsto\gamma_1(-t)$
   (e) $\gamma_5 : t\mapsto\gamma_1(2t)$

3. Määrää integraali

   (a) $\oint_\gamma \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z$, kun γ on ympyrän $S(0,2)$ parametrisointi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

   (b) $\oint_\gamma \frac{z}{z^2+9}\mathrm{d}z$, kun γ on ympyrän $S(2\mathrm{i},4)$ parametrisointi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

4. Määrää integraalin

$$\oint_\gamma \frac{z+1}{z^4+2\mathrm{i}z^3}\mathrm{d}z$$

   arvo, kun γ on ympyrän $S(0,1)$ parametrisointi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

5. Määrää integraalin

$$\oint_\gamma \frac{z^3+3}{z(z-\mathrm{i})^2}\mathrm{d}z$$

arvo, kun γ on polku, joka muodostaa kahdeksikon muotoisen käyrän tasoon kiertämällä yhden kerran pisteen i positiiviseen kiertosuuntaan ja origon yhden kerran negatiiviseen kiertosuuntaan.

6. Määrää integraalin

$$\oint_\gamma \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-\mathrm{i})^3}\right)\mathrm{d}z$$

arvo, kun γ on ympyrän $S(0,6)$ parametrisointi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

7. Mitkä seuraavista väittämistä ovat tosia? Kielteisessä tapauksessa anna lyhyt perustelu.

   (a) Pätee
   $$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0,$$
   kun γ parametrisoi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan mielivaltaisen kompleksitason ympyrän, joka ei kulje pisteen a kautta ja a on polun γ rajaaman kiekon ulkopiste.

   (b) Pätee
   $$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi\mathrm{i},$$
   kun γ parametrisoi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan mielivaltaisen kompleksitason ympyrän, joka ei kulje pisteen a kautta ja a on polun γ rajaaman kiekon sisäpiste.

   (c) Pätee
   $$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi\mathrm{i},$$
   kun γ parametrisoi ensin pisteestä $a+r$ lähtien ympyrän $S(a,r)$ yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan, sitten ympyrän $S(a+r/4, 3r/4)$ yhden kerran negatiiviseen kiertosuuntaan ja lopuksi ympyrän $S(a+3r/4, r/4)$ yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

8. Olkoon γ yksikköympyrän $S(0,1)$ parametrisointi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan ja $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

   (a) Osoita, että pätee
   $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+a^2-2a\cos t} = \oint_\gamma \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}z}{(z-a)(az-1)}.$$

   (b) Määrää integraali
   $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+a^2-2a\cos t}.$$