1. 图论 Graph Theory
1.1. 定义与术语 Definition and Glossary
1.1.1. 图与网络 Graph and Network
1.1.2. 图的术语 Glossary of Graph
1.1.3. 路径与回路 Path and Cycle
1.1.4. 连通性 Connectivity
1.1.5. 图论中特殊的集合 Sets in graph
1.1.6. 匹配 Matching
1.1.7. 树 Tree
1.1.8. 组合优化 Combinatorial optimization
1.2. 图的表示 Expressions of graph
1.2.1. 邻接矩阵 Adjacency matrix
1.2.2. 关联矩阵 Incidence matrix
1.2.3. 邻接表 Adjacency list
1.2.4. 弧表 Arc list
1.2.5. 星形表示 Star
1.3. 图的遍历 Traveling in graph
1.3.1. 深度优先搜索 Depth first search (DFS)
1.3.1.1. 概念
1.3.1.2. 求无向连通图中的桥 Finding bridges in undirected graph
1.3.2. 广度优先搜索 Breadth first search (BFS)
1.4. 拓扑排序 Topological sort
1.5. 路径与回路 Paths and circuits
1.5.1. 欧拉路径或回路 Eulerian path
1.5.1.1. 无向图
1.5.1.2. 有向图
1.5.1.3. 混合图
1.5.1.4. 无权图 Unweighted
1.5.1.5. 有权图 Weighed — 中国邮路问题 The Chinese post problem
1.5.2. Hamiltonian Cycle 哈氏路径与回路
1.5.2.1. 无权图 Unweighted
1.5.2.2. 有权图 Weighed — 旅行商问题 The travelling salesman problem
1.6. 网络优化 Network optimization
1.6.1. 最小生成树 Minimum spanning trees
1.6.1.1. 基本算法 Basic algorithms
1.6.1.1.1. Prim
1.6.1.1.2. Kruskal
1.6.1.1.3. Sollin（Boruvka）
1.6.1.2. 扩展模型 Extended models
1.6.1.2.1. 度限制生成树 Minimum degree-bounded spanning trees
1.6.1.2.2. k 小生成树 The k minimum spanning tree problem(k-MST)
1.6.2. 最短路 Shortest paths
1.6.2.1. 单源最短路 Single-source shortest paths
1.6.2.1.1. 基本算法 Basic algorithms

1.6.2.1.1.1. Dijkstra
1.6.2.1.1.2. Bellman-Ford
1.6.2.1.1.2.1. Shortest path faster algorithm(SPFA)
1.6.2.1.2. 应用 Applications
1.6.2.1.2.1. 差分约束系统 System of difference constraints
1.6.2.1.2.2. 有向无环图上的最短路 Shortest paths in DAG
1.6.2.2. 所有顶点对间最短路 All-pairs shortest paths
1.6.2.2.1. 基本算法 Basic algorithms
1.6.2.2.1.1. Floyd-Warshall
1.6.2.2.1.2. Johnson
1.6.3. 网络流 Flow network
1.6.3.1. 最大流 Maximum flow
1.6.3.1.1. 基本算法 Basic algorithms
1.6.3.1.1.1. Ford-Fulkerson method
1.6.3.1.1.1.1. Edmonds-Karp algorithm
1.6.3.1.1.1.1.1. Minimum length path
1.6.3.1.1.1.1.2. Maximum capability path
1.6.3.1.1.2. 预流推进算法 Preflow push method
1.6.3.1.1.2.1. Push-relabel
1.6.3.1.1.2.2. Relabel-to-front
1.6.3.1.1.3. Dinic method
1.6.3.1.2. 扩展模型 Extended models
1.6.3.1.2.1. 有上下界的流问题
1.6.3.2. 最小费用流 Minimum cost flow
1.6.3.2.1. 找最小费用路 Finding minimum cost path
1.6.3.2.2. 找负权圈 Finding negative circle
1.6.3.2.3. 网络单纯形 Network simplex algorithm
1.6.4. 匹配 Matching
1.6.4.1. 二分图 Bipartite Graph
1.6.4.1.1. 无权图-匈牙利算法 Unweighted - Hopcroft and Karp algorithm
1.6.4.1.2. 带权图-KM 算法 Weighted –Kuhn-Munkres(KM) algorithm
1.6.4.2. 一般图 General Graph
1.6.4.2.1. 无权图-带花树算法 Unweighted - Blossom (Edmonds)

1. 图论 Graph Theory

1.1. 定义与术语 Definition and Glossary

1.1.1. 图与网络 Graph and Network

二元组(V,E)称为**图**(graph)。V为**结点**(node)或**顶点**(vertex)集。E为V中结点之间的边的集合。

点对(u,v)称为**边**(edge)或称**弧**(arc)，其中$u,v \quad V$，称u,v是**相邻**的(adjacent)，称 u,v 与边(u,v)相**关联**(incident)或相邻。

若边的点对(u,v)有序则称为**有向**(directed)边，其中 u 称为**头**(head)，v 称为**尾**(tail)。所形成的图称**有向图**(directed graph)。为对于 u 来说(u,v)是**出边**(outgoing arc)；对于 v 来说(u,v)是**入边**(incoming arc)。反之，若边的点对无序则称为**无向**(undirected)边，所形成的图称**无向图**(undirected graph)。

若图的边有一个**权值**(weight)，则称为赋权边，所形成的图称**赋权图**(weighted graph)或**网络**(network)。用三元组 G(V,E,W)表示网络。其中 W 表示权集，它的元素与边集 E 一一对应。

满足$|E|<|V|\log|V|$的图，称为**稀疏**(sparse)图；反之，称为**稠密**(dense)图。

1.1.2. 图的术语 Glossary of Graph

阶(order)：图 G 中顶点集 V 的大小称作图 G 的阶。
环(loop)：若一条边的两个顶点为同一顶点，则此边称作环。
简单图(simple graph)：没有环、且没有多重弧的图称作简单图。
定向图：对无向图 G 的每条无向边指定一个方向得到的有向图。
底图：把一个有向图的每一条有向边的方向都去掉得到的无向图。
逆图：把一个有向图的每条边都反向由此得到的有向图。
竞赛图(tournament)：有向图的底图是无向完全图，则此有向图是竞赛图。

邻域(neighborhood)：在图中与 u 相邻的点的集合$\{v \mid v \quad V,(u,v) \quad E\}$，称为 u 的邻域，记

为 $N(u)$ 。

度：

度(degree)：一个顶点的度是指与该边相关联的边的条数，顶点 v 的度记作 deg(v)。握手定理：无向图：$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$；有向图：$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v)$ 。

入度(indegree)：在有向图中，一个顶点 v 的入度是指与该边相关联的入边(即边的尾是 v)的条数，记作 $\deg^{+}(v)$ 。

出度(outdegree)：在有向图中，一个顶点的出度是指与该边相关联的出边(即边的头是 v)的条数，记作 $\deg^{-}(v)$ 。

孤立点(isolated vertex)：度为 0 的点。**叶**(leaf)：度为 1 的点。

源(source)：有向图中，$\deg^{+}(v)=0$ 的点。**汇**(sink)：有向图中，$\deg^{-}(v)=0$ 的点。

奇点(odd vertex)：度为奇数的点。**偶点**(even vertex)：度为偶数的点。

子图：

子图(sub-graph)：G'称作图 G 的子图如果 $V(G') \subseteq V(G)$ 以及 $E(G') \subseteq E(G)$ 。

生成子图(spanning sub-graph)：即包含 G 的所有顶点的连通子图，即满足条件 $V(G')=V(G)$ 的 G 的子图 G’。

生成树(spanning tree)：设 T 是图 G 的一个子图，如果 T 是一棵树，且 $V(T)=V(G)$，则称 T 是 G 的一个生成树。即 G 的生成子图，且子图为树。

点导出子图(induced subgraph)：设 $V' \subseteq V(G)$，以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由顶点集 V' 导出的子图，简称为 G 的点导出子图，记为 $G[V']$。

边导出子图(edge-induced subgraph)：设 $E' \subseteq E(G)$，以 E' 为顶点集，以两端点均在 E' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由边集 E' 导出的子图，简称为 G 的边导出子图，记为 $G[E']$。

图的补图(complement)：设 G 是一个图，以 $V(G)$ 为顶点集，以 $\{(u,v) \mid (u,v) \in E(G)\}$ 为边集的图称为 G 的补图，记为 $\overline{G}$ 。

点集的补集：记 $\overline{V'} = V - V'$ 为点集 V' 的补集。

特殊的图：

零图(null graph)：$E=$ ，即只有孤立点的图。n 阶零图记为 N_n 。

平凡图(trivial graph)：一阶零图。
空图(empty graph)：$V=E=$ 的图。
有向无环图(directed acyclic graph(DAG))：有向的无环的图。
完全图(complete graph)：完全图是指每一对不同顶点间都有边相连的的无向图，n 阶完全图常记作 K_n 。

二分图（bipartite graph）：若图 G 的顶点集可划分为两个非空子集 X 和 Y，即 $V=X \quad Y$ 且 $X=Y$ ，且每一条边都有一个顶点在 X 中，而另一个顶点在 Y 中，那么这样的图称作二分图。
完全二分图(complete bipartite graph)：二分图 G 中若任意两个 X 和 Y 中的顶点都有边相连，则这样的图称作完全二分图。若 $|X|=m,|Y|=n$ ，则完全二分图 G 记作 $K_{m,n}$ 。

正则图(regular graph)：如果图中所有顶点的度皆相等，则此图称为正则图。

1.1.3. 路径与回路 Path and Cycle

途径(walk)：图 G 中一个点边交替出现的序列 $p=v_{i_0}e_{i_1}v_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}v_{i_k}$ ，满足 $v_{i_j} \quad V, e_{i_j} \quad E$ ，$e_{i_j}=(v_{i_{j-1}},v_{i_j})$ 。
迹(trail)：边不重复的途径。

路(path)：顶点不重复的迹。

简单图中的路可以完全用顶点来表示，$P=v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ 。

若 $p_1=p_m$ ，称**闭**的(closed)；反之，称为**开**的(open)。

闭途径(closed walk)：起点和终点相同的途径。

闭迹(closed trail)：起点和终点相同的迹，也称为**回路**(circuit)。

圈(cycle)：起点和终点相同的路。

途径（闭途径）、迹（闭迹）、路（圈）上所含的边的个数称为它的**长度**(length)。
简单图 G 中长度为奇数和偶数的圈分别称为**奇圈**(odd cycle)和**偶圈**(even cycle)。

对任意 $u,v \quad V(G)$，从 x 到 y 的具有最小长度的路称为 x 到 y 的**最短路**(shortest path)，其长度称为 x 到 y 的**距离**(distance)，记为 $d_G(u,v)$ 。

图 G 的**直径**(diameter)：$D=\max\{d_G(u,v)\,|\,\forall u,v \quad V(G)\}$ 。

简单图 G 中最短圈的长度称为图 G 的**围长**(girth)，最长圈的长度称为图 G 的**周长**(perimeter)。

1.1.4. 连通性 Connectivity

连通(connected)：在图 G 中，两个顶点间，至少存在一条路径，称两个顶点连通的(connected)；反之，称**非连通**(unconnected)。

强连通(strongly connected)：在有向图 G 中，两个顶点间，至少存在一条路径，称两个顶点强连通。

弱连通(weakly connected)：在有向图 G 中，两个顶点间，若不考虑 G 中边的方向的图才连通的，称原有向图为弱连通。

连通图(connected graph)：图 G 中任二顶点都连通。

连通分量或**连通分支**(connected branch, component)：非连通无向图的极大连通子图(maximally connected sub-graph)。具体说，若图 G 的顶点集 $V(G)$ 可划分为若干非空子集 $V_1,V_2,\cdots,V_\omega$，使得两顶点属于同一子集当且仅当它们在 G 中连通，则称每个子图 $G[V_i]$ 为图 G 的一个连通分支（$i=1,2,\cdots,\omega$）。图 G 的连通分支是 G 的一个极大连通子图。图 G 连通当且仅当 $\omega=1$。

强连通分量(strongly connected branch)：非强连通图有向图的极大强连通子图。

割(cut)：

点割集(vertex cut)：点集 V' V，若 G 删除了 V' 后不连通，但删除了 V' 的任意真子集后 G 仍然连通。则称 V' 点割集。若某一结点就构成就了点割集，则称此结点**割点**(cut vertex)。点数最少的点割集称为**点连通度** k(G)。

边割集(edge cut set)：边集 E' E，若 G 删除了 E' 后不连通，但删除了 E' 的任意真子集后 G 仍然连通。则称 E' 点割集。若某一边就构成就了边割集，则称此结点**割边**(cut edge)或**桥**(bridge)。边数最少的边割集称为**边连通度** k'(G)。

记号 $[S,S']$ 表示一端在 S 中另一端在 S' 中的所有边的集合。

块(block)是指没有割点的极大连通子图。

1.1.5. 图论中特殊的集合 Sets in graph

点覆盖(集)(vertex covering (set))：V' V，满足对于 $\forall e$ E，有 $\exists v$ V'，v 关联 e。即一个点集，使得所有边至少有一个端点在集合里。或者说是“点” 覆盖了所有“边”。**极小点覆盖**(minimal vertex covering)：本身为点覆盖，其真子集都不是。**最小点覆盖**(minimum vertex covering)：点最少的点覆盖。**点覆盖数**(vertex covering number)：最小点覆盖的点数，记为 $\alpha_V(G)$

一般说覆盖集就是指点覆盖集。

边覆盖(集)(edge covering (set))：E' E，满足对于 $\forall v$ V，有 $\exists e$ E'，e 关联 v。即一个

边集，使得所有点都与集合里的边邻接。或者说是“边” 覆盖了所有“点”。 **极小边覆盖**(minimal edge covering)：本身是边覆盖，其真子集都不是。**最小边覆盖**(minimum edge covering)：边最少的边覆盖。**边覆盖数**(edge covering number)：最小边覆盖的边数，记为 $\alpha_E(G)$ 。

独立集(independent set)：$V' \quad V$，满足对于$\forall u,v \quad V'$，有$(u,v) \quad E$。即一个点集，集合中任两个结点不相邻，则称V'为独立集。或者说是导出的子图是零图（没有边）的点集。**极大独立集**(maximal independent set)：本身为独立集，再加入任何点都不是。**最大独立集**(maximum independent set)：点最多的独立集。**独立数**(independent number)：最大独立集的点数，记为 $\beta_V(G)$ 。

团(clique)：$V' \quad V$，满足对于$\forall u,v \quad V'$，有$(u,v) \quad E$。即一个点集，集合中任两个结点相邻。或者说是导出的子图是完全图的点集。**极大团**(maximal clique)：本身为团，再加入任何点都不是。**最大团**(maximum clique)：点最多的团。**团数**(clique number)：最大团的点数，记为 $\omega(G)$ 。

边独立集(edge independent set)：$E' \quad E$，满足对于$\forall e,f \quad E'$，有e,f不邻接。即一个边集，满足边集中的任两边不邻接。**极大边独立集**(maximal edge independent set)：本身为边独立集，再加入任何边都不是。**最大边独立集**(maximum edge independent set)：边最多的边独立集。**边独立数**(edge independent number)：最大边独立集的边数，记为 $\beta_E(G)$ 。

边独立集又称**匹配**(matching)，相应的有**极大匹配**(maximal matching)，**最大匹配**(maximum matching)，**匹配数**(matching number)。

支配集(dominating set)：$V' \quad V$，满足对于$\forall u \quad V - V'$，有$\exists v \quad V'$，$(u,v) \quad E$。即一个点集，使得所有其他点至少有一个相邻点在集合里。或者说是一部分的“点”支配了所有“点”。 **极小支配集**(minimal dominating set)：本身为支配集，其真子集都不是。**最小支配集**(minimum dominating set)：点最少的支配集。**支配数**(dominating number)：最小支配集的点数记为 $\gamma_V(G)$ 。

边支配集(edge dominating set)：$E' \quad E$，满足对于$\forall e \quad E - E'$，有$\exists f \quad E'$，e,f邻接。即一个边集，使得所有边至少有一条邻接边在集合里。或者说是一部分的“边”支配了所有“边”。**极小边支配集**(minimal edge dominating set)：本身是边支配集，其真子集都不是。**最小边支配集**(minimum edge dominating set)：边最少的边支配集。**边支配数**(edge dominating number)：最小边支配集的边数，记为 $\gamma_E(G)$ 。

定理：若 G 中无孤立点，D 为支配集，则 D=V(G)-D 也是一个支配集。
定理：一个独立集是极大独立集，当且仅当它是支配集。

关系：

定理：无向图 G 无孤立点，V_1 是极小支配集，则存在 V_2 是极小支配集，且 $V_1 = V_2$ 。

定理：无向图 G 无孤立点，V' 是极大独立集，则 V' 是极小支配集。逆命题不成立。$\beta_V(G) \quad \gamma_V(G)$。

定理：连通图中，V' 是点覆盖，则 V' 是支配集。极小点覆盖不一定是极小支配集。支配集不一定是点覆盖。

定理：无向图 G 无孤立点，V' 是(极，最小)点覆盖，充要于 $V - V'$ 是(极，最大)独立集。$\alpha_V(G) + \beta_V(G) = |V|$。

定理：无向图 G，V' 是 G 的(极，最大)团，充要于 V' 是 $\overline{G}$ 的(极，最大)独立集。$\omega(G) = \beta_V(\overline{G})$。

由上述定理知，$\alpha_V(G)$，$\beta_V(G)$，$\omega(G)$ 三者互相确定，但都是 NPC 的。但是二分图中，点覆盖数是匹配数。

M 是匹配，W 是边覆盖，N 是点覆盖，Y 是点独立集。

定理：无向图 G 无孤立点，|M|<=|N|,|Y|<=|W|

定理：无向图 G 无孤立点，$\alpha_E(G) + \beta_E(G) = |V|$。先取一个最大匹配 M，1 条边盖两个点剩下的一个未盖点要用一条边来覆盖，边覆盖数=|M| +(|V|-2|M|)= |V|-|M|。

定理：无向图 G 无孤立点，$\beta_E(G) = \alpha_V(G)$，$\beta_V(G) = \alpha_E(G)$。

定理：无向图 G 无孤立点，$\omega(G) = \beta_V(G)$。

求匹配数是 P 的，所以边覆盖和匹配都是易求的。

最小路径覆盖(path covering)：是“路径” 覆盖“点”，即用尽量少的不相交简单路径覆盖有向无环图 G 的所有顶点，即每个顶点严格属于一条路径。路径的长度可能为 0(单个点)。

最小路径覆盖数＝G 的点数－最小路径覆盖中的边数。应该使得最小路径覆盖中的边数尽量多，但是又不能让两条边在同一个顶点相交。拆点：将每一个顶点 i 拆成两个顶点 Xi 和 Yi。然后根据原图中边的信息，从 X 部往 Y 部引边。所有边的方向都是由 X 部到 Y 部。因此，所转化出的二分图的最大匹配数则是原图 G 中最小路径覆盖上的边数。因此由最小路径覆盖数＝原图 G 的顶点数－二分图的最大匹配数便可以得解。

1.1.6. 匹配 Matching

匹配(matching)是一个边集，满足边集中的边两两不邻接。匹配又称**边独立集**(edge independent set)。

在匹配中的点称为**匹配点**(matched vertex)或饱和点；反之，称为**未匹配点**(unmatched

vertex)或未饱和点。

交错轨(alternating path)是图的一条简单路径，满足任意相邻的两条边，一条在匹配内，一条不在匹配内。

增广轨(augmenting path)：是一个始点与终点都为未匹配点的交错轨。

最大匹配(maximum matching)是具有最多边的匹配。

匹配数(matching number)是最大匹配的大小。

完美匹配(perfect matching)是匹配了所有点的匹配。

完备匹配(complete matching)是匹配了二分图较小部份的所有点的匹配。

增广轨定理：一个匹配是最大匹配当且仅当没有增广轨。

综上，**在二分图中，最小覆盖数=最大匹配数。边覆盖数=最大独立数=|V|-最大匹配数。**

1.1.7. 树 Tree

G=(V, E)为一个图，则下列命题等价：(1)G 是一棵树；(2)G 连通，且|E|=|V|-1；(3)G 无圈，且|E|=|V|-1；(4)G 的任何两个顶点之间存在唯一的一条路；(5)G 连通，且将 G 的任何一条弧删去之后，该图成为非连通图；(6)G 无圈，且在 G 的任何两个不相邻顶点之间加入一条弧之后，该图正好含有一个圈。

Cayley 公式：在 n 阶完全图 K_n 中，不同生成树的个数为 n^{n-2} 。

1.1.8. 组合优化 Combinatorial optimization

从若干可能的安排或方案中寻求某种意义下的最优安排或方案，数学上把这种问题称为**(最)优化**(optimization)问题。

所谓**组合(最)优化**(combinatorial optimization)又称**离散优化**(discrete optimization)，它是通过数学方法去寻找离散事件的最优编排、分组、次序或筛选等. 这类问题可用数学模型描述为：

$$\min f(x)$$
$$s.t.\ g(x) \quad 0,\ x \quad D$$

其中 D 表示有限个点组成的集合(定义域)，f 为目标函数, $F = \{x \mid x \quad D, g(x) \quad 0\}$ 为可行域。

网络优化(network optimization)就是研究与(赋权)图有关的组合优化问题。

常见的 P 类网络优化问题：最小生成树，最短路，最大流，最小费用最大流，最大匹配，中国邮路问题。

常见的 NP 类网络优化问题：旅行商问题。

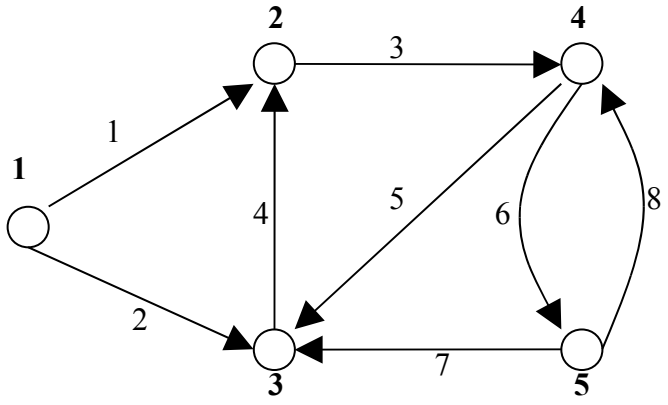
参考文献：

[1]Dictionary of Algorithms and Data Structures NIST，http://www.nist.gov/dads/

[2]Wikipedia，http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory
[3]谢金星，清华大学数学科学系<<网络优化>>讲义
http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~jxie/courses/netopt

1.2. 图的表示 Expressions of graph

下面介绍几种表示图的数据结构。并统一用下图做例子：



1.2.1. 邻接矩阵 Adjacency matrix

用二元数组 $A(u,v)$，来表示图。这种表示法一般用于稠密图。当图不是简单图，邻接矩阵法不能用。

在无权图中，若边 (u,v) 存在， $A(u,v)=1$；否则 $A(u,v)=0$。

$$A=(a_{u,v})_{n\ n}\quad \{0,1\}^{n\ n},\quad a_{u,v}=\begin{matrix}0, & (u,v) & E\\ 1, & (u,v) & E\end{matrix}$$

无权图的例子：

$$\begin{matrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{matrix}$$

在有权图中, 若边 (u,v) 存在,则 $A(u,v)$ 为它的权值；否则人为的规定 $A(u,v)=\infty$ 或 $-\infty$。∞ 是一个足够大的数。

$$A=(a_{u,v})_{n\ \ n},\quad a_{u,v}=\begin{matrix} w(u,v), & (u,v)\quad E \\ , & (u,v)\quad E \end{matrix}$$

无向图中，邻接矩阵是按矩阵副对角线对称的。

1.2.2. 关联矩阵 Incidence matrix

用二元数组 $B(u,k)$，来表示无权有向图。一般不用这种表示法。

若边 k 与点 u 关联，若 k 是 u 的出边，则 $B(u,k)$=1；若 k 是 u 的入边 $B(u,k)$=-1；否则 $B(u,k)$=0。

$$B=(b_{u,k})_{n\ \ m}\quad \{-1,0,1\}^{n\ \ m},\quad b_{u,k}=\begin{matrix} 1, & \exists v\quad V,k\ =(u,v)\quad E, \\ -1, & \exists v\quad V,k\ =(v,u)\quad E, \\ 0, & else \end{matrix}$$

无权图的例子：

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

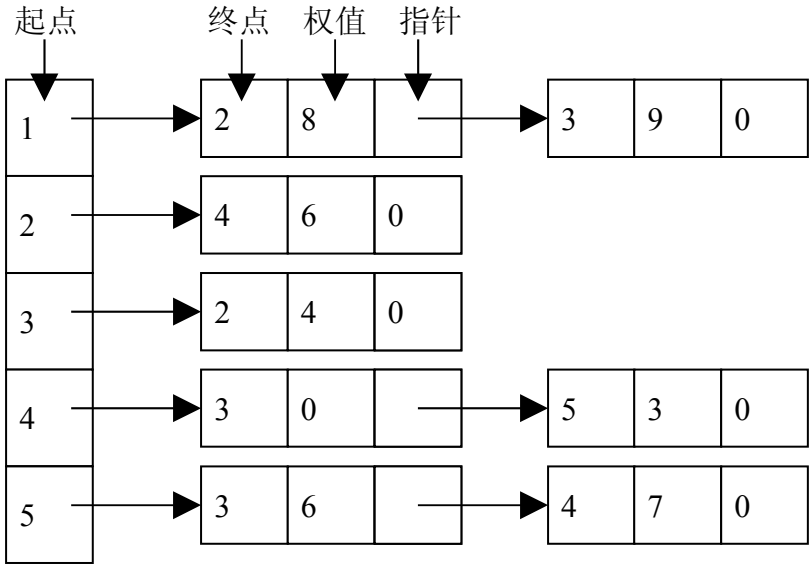
1.2.3. 邻接表 Adjacency list

图的邻接表是图的所有节点的邻接表的集合；而对每个节点，它的邻接表就是它的所有出弧的集合，含有终点，权值等信息。

对于有向图 G=(V,E)，一般用 A(v)表示节点 v 的邻接表，即节点 v 的所有出弧构成的集合或链表(实际上只需要列出弧的另一个端点，即弧的尾)。

一般图都适用。邻接表方法增加或删除一条弧所需的计算工作量很少。

有权图的例子：A(1)={2,3}，A(2)={4}，A(3)={2}，A(4)={3,5}，A(5)={3,4}



1.2.4. 弧表 Arc list

所谓图的弧表,也就是图的弧集合中的所有有序对以表格的方式来表示。弧表表示法直接列出所有弧的起点和终点，以及权值。一般用于稀疏图。缺点是无法通过一些信息(起点，终点)定位一条边。

用S(i),F(i),W(i)分别表示起点，终点，权值。

有权图的例子：

起点	1	3	4	5	5	4	2	1
终点	2	2	5	4	3	3	4	3
权值	8	4	3	7	6	0	6	9

1.2.5. 星形表示 Star

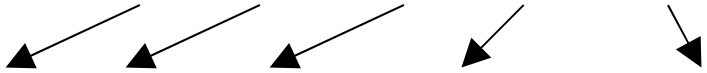
星形表示法就是对弧表的缺点的改进，使之可以通过起点或终点定位边。由于很多时候，算法只需事先知道起点，通过枚举边扩展，而不需要事先知道终点；如图的遍历，松弛操作。

按定位方式，又分前向星形(forwards star)与反向星形(reverse star)。前向星形：通过起点定位边。反向星形：通过终点定位边。实际上，反向星形几乎没用。故本文只讨论前向星形。

通常有两种方法实现这种对弧表改进：边排序法，链表法。

边排序法：把弧表按起点为第一关键字，终点为第二关键字来排序。排序用不用额外空间的快速排序 O(mlogm)或用额外空间 O(m)的计数排序 O(m)均可。之后用数组 last(u)记录以结点 u 为起点的最后一条边的编号，并规定 last(0)=0。这样以结点 u 为起点的边编号就是 last(u-1)+1 到 last(u)。有权图的例子：

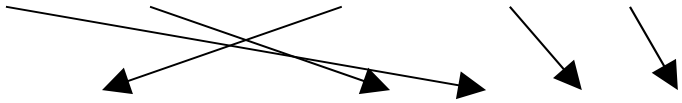
作为起点的点 0 1 2 3 4 5 最后边的编号 0 2 3 4 6 8



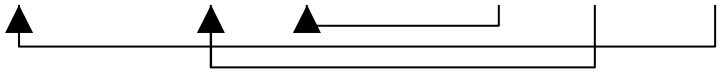
编号 1 2 3 4 5 6 7 8 起点 1 1 2 3 4 4 5 5 终点
2 3 4 2 3 5 3 4 权值 8 9 6 4 0 3 6 7

链表法：给每条边(u,v)加一个前趋，表示以 u 为起点的边链表的前一条边。直观的讲，就是将相同结点的边用链表串起来。last(u)存以 u 为起点的最后一条边的编号。有权图的例子：

作为起点的点 1 2 3 4 5 最后边的编号 6 5 2 7 8



编号 0 1 2 3 4 5 6 7 8 起点 nil 5 3 4 1 2 1 4 5 终点
nil 4 2 5 2 4 3 3 3 权值 nil 7 4 3 8 6 9 0 6 前趋
nil 0 0 0 0 0 4 3 1



星形表示法的优点是占用的存贮空间较少。一般图都适用。边排序法的优点是已知起点和终点的情况下可以精确定位边，容易在起点定位的范围内二分查找终点，在反向边的定位中常用；缺点是代码麻烦，时间抑或空间上都有额外开销。链表法的优点很多，不仅代码简单而且没有太多的时空开销，对于反向边的定位只要多加一个数据项纪录下反向边即可；除了终点定位性，几乎没缺点。

参考文献：

[1]谢金星，清华大学数学科学系<<网络优化>>讲义
http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~jxie/courses/netopt
[2]刘汝佳，黄亮，<<算法艺术与信息学竞赛>>，P60

1.3. 图的遍历 Traveling in graph

1.3.1. 深度优先搜索 Depth first search (DFS)

1.3.1.1. 概念

1.3.1.2. 求无向连通图中的桥 Finding bridges in undirected graph

在无向连通的条件下，边是桥的充要条件是：1.桥一定是 DFS 树中的边；2.桥一定不在圈中。

圈是由一条后向边(u,v)与 DFS 树中 u 到 v 的路径组成。也就是说 u 到 v 的路径上的边都不可能是桥，应该给以标记。记 f(x)为 **x 与其子孙的后向边所连到的最老祖先**(深度最浅)，表示 x 到 f(x) 上的边均不为桥。然而维护 f(x)比较麻烦，其实只要知道 f(x)的**拓扑序数**就可以了。所谓拓扑序数就是**满足儿子的序数总比父亲大**的一个编号方式。这个拓扑序，常用使用深度 d，或者使用时间戳(TimeStamp) DFN（DFS 访问的次序）。下面以深度为例：

记 $g(x)=d(f(x))$，在 DFS 树中从 x 开始通过前向弧和后向弧所能到达的最小的 d。有以下的动态规划：

$$g(x)=\min\begin{array}{ll} d(x) & \\ d(y) & (x,y)\ is\ backforward\ edge\ \ y\quad father \\ g(c) & c\ is\ x's\ child. \end{array}$$

这里：

1.第一次访问 x 时，记录 d(x)

2. d(y)自己发出去的后向边所达到的深度。

3. g(c)就是其子孙中的 g 最小值。

最后，若 g(x)=d(x)，即(father,x)不在圈中，则(father, x)就是桥。

1.3.2. 广度优先搜索 Breadth first search (BFS)

1.4. 拓扑排序 Topological sort

拓扑排序是对有向无圈图(DAG)顶点的一种排序，它使得如果存在 u,v 的有向路径，那

么满足序中 u 在 v 前。拓扑排序就是由一种偏序(partical order)得到一个全序(称为拓扑有序(topological order))。偏序是满足自反性，反对称性，传递性的序。

拓补排序的思路很简单，就是每次任意找一个入度为 0 的点输出，并把这个点以及与这个点相关的边删除。实际算法中，用一个队列实现。

算法：

1. 把所有入度=0 的点入队 Q。
2. 若队 Q 非空，则点 u 出队，输出 u；否则转 4。
3. 把所有与点 u 相关的边(u,v)删除，若此过程中有点 v 的入度变为 0，则把 v 入队 Q，转 2。
4. 若出队点数<N，则有圈；否则输出结果。

算法复杂度: O(m)。

习题：MIPT 012 Correct dictionary

设 R 为非空集合 A 上的二元关系，如果 R 满足自反性(对于每一个 x∈A，(x,x)∈R)，反对称性((x,y)∈R∧(y,x)∈R→x=y)和传递性((x,y)∈R∧(y,x)∈R→(x,z)∈R)，则称 R 为 A 上的偏序关系，记作≤。如果(x,y)∈R，则记作 x≤y，读作“x 小于等于 y”。存在偏序关系的集合 A 称为**偏序集**(partical order)。

拓扑排序的计数。

? ?

AOV(activity on vertex network)

AOE(activity on edge network)，其中顶点表示事件 event，权表示时间。

1.5. 路径与回路 Paths and circuits

1.5.1. 欧拉路径或回路 Eulerian path

对于连通的可重边的图 G，若存在一回路，它通过 G 的所有边一次且仅一次，则这回路称为欧拉路径或回路。

著名的问题：The Königsberg Bridges

下面讨论有向性：

1.5.1.1. 无向图

习题：Ural 1124 Mosaic

1.5.1.2. 有向图

习题：CEOI 2005 Depot Rearrangement

1.5.1.3. 混合图

混合图是指有的边是有向的，有的边是无向的图。

由于无向边只能经过一次，所以不能拆成两条方向相反的有向边，只能给无向边定向，使得定向后的图满足“入度等于出度”。
见 LRJ P324。

下面讨论在有权性上的扩展：

1.5.1.4. 无权图 Unweighted

1.5.1.5. 有权图 Weighed — 中国邮路问题 The Chinese post problem

这就是一个经典的问题中国邮路问题：给出一个连通的无向的可重边的有权图 G，求最短的回路，使得每边至少遍历 1 次。

由于每边至少遍历一次，所以最短路的瓶颈就在于重复遍历。由于图一直保持连通性，所以两两奇点之间都存在欧拉路；又两两奇点之间的最短路可求；奇点个数为偶数。所以问题就等价于找一个奇点构成的完全图 G’(V,E)的最小权匹配(Perfect Matching in General Graph)。V(G’)为原图 G 中的奇点，每条边为两奇点对应原图的最短路长度。

算法：

1. 确定 G 中的奇点，构成 G’。
2. 确定 G’两两结点在 G 中的最短路作为它们在 G’中的边权。
3. 对 G’进行最小权匹配。
4. 最小权匹配里的各匹配边所对应的路径在 G 中被重复遍历一次,得到欧拉图 G”。
5. 对 G”找一条欧拉路即可。

有向的中国邮路问题，比较复杂。

1.5.2. Hamiltonian Cycle 哈氏路径与回路

分支限界搜索
模拟退火

1.5.2.1. 无权图 Unweighted

1.5.2.2. 有权图 Weighed — 旅行商问题 The travelling salesman problem

动态规划

1.6. 网络优化 Network optimization

1.6.1. 最小生成树 Minimum spanning trees

最小生成树是指连通图中所有生成树中边权和最小的一个。即：求 G 的一棵生成树 T，使得

$$w(T) = \min_{T} \quad {}_{e\ T} w(e)$$

1.6.1.1. 基本算法 Basic algorithms

1.6.1.1.1. Prim

基本思想：不断扩展一棵子树 $T = (S, E'), E' \quad E$，直到 S 包括原图的全部顶点，得到最小生成树 T。每次增加一条边，使得这条边是由当前子树结点集 S 及其补集 $\overline{S}$ 所形成的边割集的最小边。

令 d(v)为 v 到结点集 S 的最小距离。

算法：

1. $S=\{v\}, E'=$,d(v_0)=0 (这里v_0是任意一个结点), $d(v)=$,(v v_0)

2. 若$|S|=N$，则结束；否则，转 3。

3. 找补集$\overline{S}$中的 d 最小的节点v，加入S。更新与v相邻的结点w的 d 值，即若$d(w)>W(v,w)$，则$d(w)=W(v,w)$，转 2。

这里的 d 可以用优先队列实现，需用到删除最小(DeleteMin)与减值(DecreaseKey)的操作。假设用 Fibonacci Heap 实现(删除最小 O(logn)，减值 O(1))，算法复杂度：$O(n\log n+m)$。

1.6.1.1.2. Kruskal

基本思想：就是维护一个生成森林。每次将一条权最小的边加入子图 T 中，并保证不形成圈。如果当前弧加入后不形成圈，则加入这条弧，如果当前弧加入后会形成圈，则不加入这条弧，并考虑下一条弧。

算法：

1. $T=$,$i=\cdot$，将 E 中的边按权从小到大排序，$W(e_1)$ $W(e_2)$ $\cdots$ $W(e_m)$。

2. i=i+1，若 i>m，结束，此时 G 没有生成树；否则判断T e_i是否含圈，是则转 2，否则转 3。

3. $T=T$ e_i。若|T|=N，结束，此时 T 为 G 的最小生成树。

分离集合(disjoint set)，可用并查集实现。由于排序是$O(m\log m)$的。所以复杂度为$O(m\log m+ma(n))$。

1.6.1.1.3. Sollin（Boruvka）

基本思想：前面介绍的两种算法的综合。每次迭代同时扩展多棵子树，直到得到最小生成树 T。

算法：

1. 对于所有$v=V, G_v$ $\{v\}$。$T=$ 。

2. 若|T|=N，结束，此时 T 为 G 的最小生成树；否则，对于 T 中所有的子树集合G_v，计算它的边割 $G_v,\overline{G_v}$ 中的最小弧e_v^*（有的书称连接两个连通分量的最小弧“安全边”）。

3. 对 T 中所有子树集合 G_v 及其边割最小弧 $e_v^* = (p,q)$，将 G_v 与 q 所在的子树集合合并。

$T = T \quad e_v^*$。转 2。

由于每次循环迭代时，每棵树都会合并成一棵较大的子树，因此每次循环迭代都会使子树的数量至少减少一半，或者说第 i 次迭代每个分量大小至少为 2^i。所以，循环迭代的总次数为 O(logn)。每次循环迭代所需要的计算时间：对于第 2 步，每次检查所有边 O(m)，去更新每个连通分量的最小弧；对于第 3 步，合并 $O(n/2^i)$ 个子树。所以总的复杂度为 $O(m \log n)$。

```
BORŮVKA(V, E):
  F = (V, ∅)
  while F has more than one component
      choose leaders using DFS
      FINDSAFEEDGES(V, E)
      for each leader v̄
          add safe(v̄) to F
```

```
FINDSAFEEDGES(V, E):
  for each leader v̄
      safe(v̄) ← ∞
  for each edge (u, v) ∈ E
      ū ← leader(u)
      v̄ ← leader(v)
      if ū ≠ v̄
          if w(u, v) < w(safe(ū))
              safe(ū) ← (u, v)
          if w(u, v) < w(safe(v̄))
              safe(v̄) ← (u, v)
```

1.6.1.2. 扩展模型 Extended models

1.6.1.2.1. 度限制生成树 Minimum degree-bounded spanning trees

由于这个问题是 NP-Hard 的，一般用搜索算法解决。本文就只讨论一种特殊多项式情况：单点度限制(one node degree bounded)。

把度限制的点记为 v_0，满足度限制 $\deg(v_0) \quad k$。一种贪心的思路：在最小生成树 T 的基础上，通过添删边来改造树，使之逐渐满足度限制条件。

算法：

1. 求图的最小生成树 T。
2. 若 v_0 已满足度限制，结束；否则转 3。
3. 对于删去 v_0 后的每一个连通分支 T_i (为一棵树)，求添加边割 $[T_i, \overline{T_i} - \{v_0\}]$ 中的最小弧，删除边割 $[T_i, \{v0\}]$ 里的最大弧后的生成树中的边权和最小的一个。更新最小生成树 T。转 2。

第 3 步，v_0 的度少 1。

习题：NOI 2005 小 H 的聚会

1.6.1.2.2. k 小生成树 The k minimum spanning tree problem(k-MST)

生成树 T 删除一条边 f 并加入一条新边 e 的操作称为**交换**。若交换后的图仍是一颗树，则此交换称为**可行交换**。若生成树 T 可通过一次交换成为生成树 T'，则称它们互为**邻树**。对于生成树集合 S，生成树 T，若 T 不在 S 中，且在 S 中存在某生成树是 T 的邻树，称为 T 为 S 的邻树。

定理：设 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 为图的前 k 小生成树，则生成图集合 $\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}$ 的邻树中的边权和最小者可作为第 k+1 小生成树(可能有边权和相同的情况)。

按这个定理设计算法，很难得到有满意的时间复杂度的算法。

下面讨论一个特例：次小生成树(The second MST, 2-MST)

基本思想：枚举最小生成树 T 的每一个邻树，即枚举被添加与被删除的边。由于在树中添加一条边 (u,v) ($(u,v)\quad T$)，一定形成了一个环，环是由 (u,v) 与从 u 到 v 的生成树上的唯一路径(记为 $P(u,v)$)组成的。所以被删除的边一定在 $P(u,v)$ 上。由于要求最小边权和，所以被删除的边一定是 $P(u,v)$ 上最小者，其权值记为 $f(u,v)$ ： $f(u,v)=\min\{w(e)\mid e\quad P(u,v)\}$ 。

算法：

1. 求图的最小生成树 T。次小生成树 T'的权值的最小值 $w(T')=\quad$ 。
2. 以每个结点为根 r，DFS 遍历树。在遍历过程中求出 $f(r,v)\mid v\quad V$，用 $w(T)+w(r,v)-f(r,v)$ 更新次小生成树的权值的最小值 $w(T')$ 。
3. 输出 $w(T')$ 。

算法复杂度的瓶颈在第 2 步 $O(n^2)$ ，故总算法复杂度为 $O(n^2)$ 。

习题：Ural 1416 Confidential

1.6.2. 最短路 Shortest paths

1.6.2.1. 单源最短路 Single-source shortest paths

令 s 为起点，t 为终点。单源最短路问题定义为：对于网络 G=(V,E,W)，寻找 s 到 t 的一条简单路径，使得路径上的所有边权和最少。令 d(v)为 s 到 v 的最短路长度上界。单源最短路问题的规划模型如下：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ min \quad d(t)\\
&s.t.\\
&(2)\ d(v)\ +d(u) \quad w(u,v) \quad (u,v) \quad E\\
&(3)\ d(s)=0
\end{aligned}
$$

对于只含正有向圈的连通有向网络，从起点 s 到任一顶点 j 都存在最短路，它们构成以起点 s 为根的树形图（称为最短路树（Tree of Shortest Paths））。当某弧(u,v)位于最短路上时，一定有 $d(v)-d(u)=w(u,v)$。所以最短路的长度可以由 Bellman 方程（最短路方程）唯一确定：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ d(s)=0\\
&(2)\ d(v)=\min_{u\ \ v}\{d(u)+w(u,v)\}
\end{aligned}
$$

在规划模型与最短路方程中都出现了 $d(v)\ +d(u) \quad w(u,v)$ 形式的式子，下面引入松弛操作：松弛操作是对于边(u,v)进行的改进操作：若 $d(v)>d(u)+w(u,v)$，则改进 $d(v)=d(u)+w(u,v)$。直观的讲，就是路径最后通过(u,v)，使得 s 到 v 的距离比原来 s 到 v 的方案的距离短。松弛操作是最短路算法求解的基本方式。

最短路算法求解过程中的标号规定：对于 V 中每一个顶点 v，设置一个标号：距离标号 d(v)，记录的是从起点到该顶点的最短路长度的上界；再设置一个是前趋 pred(v)，记录的是当起点 s 到该顶点 v 的一条路长取到该上界时，该条路中顶点 v 前面的那个直接前趋。算法通过不断修改这些标号，进行迭代计算。当算法结束时，距离标号表示的是从起点到该顶点的最短路长度。

标号设定算法(Label-Setting)：在通过迭代过程对标号进行逐步修正的过程中，每次迭代将一个顶点从临时标号集合中移入永久标号集合中。

标号修正算法(Label-Correcting)：每次迭代时并不一定将任何顶点标号从临时标号转变为永久标号，只是对临时标号进行一次修正，所有顶点标号仍然都是临时标号；只有在所有迭代终止时，所有顶点标号同时转变为永久标号。

最长路问题可以转化为最短路问题，把弧上的费用反号即可。

1.6.2.1.1. 基本算法 Basic algorithms

1.6.2.1.1.1. Dijkstra

采用了标号设定算法(Label-Setting)。在迭代进行计算的过程中，所有顶点实际上被分成了两类：一类是离起点较近的顶点，它们的距离标号表示的是从点 s 到该顶点的最短路长度，因此其标号不会在以后的迭代中再被改变（称为永久标号）；一类是离起点较远的顶点，它们的距离标号表示的只是从点到该顶点的最短路长度的上界，因此其标号还可能会在以后的迭代中再被改变（称为临时标号）。下文称永久标号为已检查。

算法：

1. $d(s)=0$，$d(v)=\quad,(v\quad s)$，已检查$U=$

2. 取未检查的 u，即$u\quad U$，使得$d(u)$最小。若 u 取不到，即 d(u)=∞则结束；否则标记为已检查，即$U=U\quad\{u\}$。

3. 枚举所有的 u 的临边(u,v)，满足 v 未检查，即$v\quad U$。松弛(u,v)，即若$d(v)>d(u)+w(u,v)$，则改进$d(v)=d(u)+w(u,v)$，pred(v)=u。转 2。

这里的 d 可以用优先队列实现，需用到删除最小(DeleteMin)与减值(DecreaseKey)的操作。假设用 Fibonacci Heap 实现(删除最小 O(logn)，减值 O(1))，则算法复杂度：$O(n\log n+m)$。若用 Binary Heap 则$O((n+m)\log n)$。

适用范围：非负权图。

1.6.2.1.1.2. Bellman-Ford

采用了标号修正算法(Label-Correcting)。本质就是用迭代法（动态规划）解 Bellman-Ford 方程：

$$
\begin{aligned}
&d^{(1)}(s)=0,\\
&d^{(1)}(v)=w(s,v),\quad v\quad s\\
&d^{(k+1)}(v)=\min\{d^{(k)}(v),\min_{u\quad v}\{d^{(k)}(u)+w(u,v)\}\},\quad u,v\quad V,k=1,2,\cdots,n-2
\end{aligned}
$$

$d^{(k)}(v)$表示 s 到 v 的且边数不超过 k 条时的最短路路长。下面用归纳法证明：k=1 显然成立。假设对 k 成立，下面考虑 k+1 的情况.从起点 s 到顶点 v 且所经过的弧数不超过 k+1 条时的最短路有两种可能：含有不超过 k 条弧，即$d^{(k)}(v)$；含有 k+1 条弧，即$\min_{u\quad v}\{d^{(k)}(u)+w(u,v)\}$。

由于第 k+1 次迭代过程中，不会影响 k 次的迭代结果，d 用 O(n)的空间即可。
算法：

1. $d(s)=0$，$d(v)=\quad,(v\quad s)$
2. 松弛所有边(u,v)，即若 $d(v)>d(u)+w(u,v)$，则改进 $d(v)=d(u)+w(u,v)$，pred(v)=u。若没有边被松弛，则算法结束。
3. 若 2 的迭代次数超过 n-1，则有负权圈，结束；否则转 2 继续迭代。

可以证明算法一定在 n-1 步迭代后收敛；否则一定有负权圈。所以算法复杂度为 O(nm)。
适用范围：一般图。

1.6.2.1.1.2.1.Shortest path faster algorithm(SPFA)

SPFA 其实就是 Bellman-Ford 的一种队列实现，减少了冗余，即松驰的边至少不会以一个 d 为∞的点为起点。

算法：

1. 队列 Q={s}，$d(s)=0$，$d(v)=\quad,(v\quad s)$
2. 取出队头 u，枚举所有的 u 的临边 (u,v)。若 $d(v)>d(u)+w(u,v)$，则改进 $d(v)=d(u)+w(u,v)$，pred(v)=u，由于 $d(v)$ 减少了，v 可能在以后改进其他的点，所以若 v 不在 Q 中，则将 v 入队。
3. 一直迭代 2，直到队列 Q 为空(正常结束)，或有的点的入队次数>=n（含有负圈）。

由于点可能多次入队，但队列中同时不会超过 n 个点。所以用一个长度为 n 的循环队列来实现这个队。

SPFA 在形式上和宽度优先搜索非常类似，不同的是宽度优先搜索中一个点出了队列就不可能重新进入队列，但是 SPFA 中一个点可能在出队列之后再次被放入队列，也就是一个点改进过其它的点之后，过了一段时间可能本身被改进，于是再次用来改进其它的点，这样反复迭代下去。设一个点用来作为迭代点对其它点进行改进的平均次数为 k，有办法证明对于通常的（不含负圈，较稀疏）情况，k 在 2 左右。算法复杂度理论上同 Bellman-Ford，O(nm)，但实际上却是 O(km)。

一般用于找负圈(效率高于 Bellman-Ford)，稀疏图的最短路。

习题：Ural 1254 Die Hard （可斜走的网格最短路）。

1.6.2.1.2. 应用 Applications

1.6.2.1.2.1. 差分约束系统 System of difference constraints

差分约束系统：求解 n 个未知数 x_i，满足 m 个不等式：

$$x_j - x_i \quad b_k, \quad 1 \quad i, j \quad n, 1 \quad k \quad m$$

若描述为线形规划模型：$Ax \quad B$。$m \quad n$ 矩阵 A 每行含一个 1 一个-1，其他都是 0。
如线形规划模型

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & x_1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & x_2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x_3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & x_4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & & 3 \end{matrix}$$

等价于

$$\begin{matrix} x_1 - x_3 & -2 \\ x_2 - x_4 & 4 \\ x_1 - x_4 & 5 \\ x_2 - x_3 & -3 \\ x_4 - x_1 & 2 \\ x_1 - x_2 & 3 \end{matrix}$$

注意到单源最短路模型中的。$d(v) \ +d(u) \quad w(u,v)$，即 $d(v) - d(u) \quad w(u,v)$。很像差分约束系统模型。于是可以构造一个有向网络 G=(V,E,W)，称为约束图(constraints graph)。

$V = \{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。$E = \{(v_i, v_j) \mid x_j - x_i \quad b_k\} + \{(v_0, v_i) \mid 1 \quad i \quad n\}$

W：$w(i,j) = b_k \mid x_j - x_i \quad b_k$，$w(v_0, v_i) = 0$

对 v_0 进行 Bellman-Ford 算法，可以得到 $d(v_i)$，令 $x_i = d(v_i) + C$，即为所求，其中 C 是任意一个常数，均满足原不等式组。当有 x_i 为负数且题目要求 x_i 非负时，常常令 C 为最小的 x_i 的相反数。

习题：NOI 1999 01 串

1.6.2.1.2.2. 有向无环图上的最短路 Shortest paths in DAG

算法：

1. $d(s)=0$， $d(v)=\quad,(v\quad s)$。对有向无环图 G，拓扑排序 O(m)。

2.按拓扑序枚举 u。若枚举完，则结束。

3.枚举所有 u 的临边(u,v)，对(u,v)进行松弛操作，即若 $d(v)>d(u)+w(u,v)$，则改进 $d(v)=d(u)+w(u,v)$，pred(v)=u。转 2。

复杂度：$O(m)$

1.6.2.2. 所有顶点对间最短路 All-pairs shortest paths

1.6.2.2.1. 基本算法 Basic algorithms

1.6.2.2.1.1. Floyd-Warshall

本质就是用迭代法（动态规划）：

$$d^{(1)}(u,u)=0,\quad u\quad V$$
$$d^{(1)}(u,v)=w(u,v),\quad u,v\quad V$$
$$d^{(k+1)}(u,v)=\min\{d^{(k)}(u,v),d^{(k)}(u,k)+d^{(k)}(k,v)\},\quad u,v\quad V,k=1,2,\cdots,n-1$$

$d^{(k)}(u,v)$ 表示 u 到 v 的不经过 k,k+1,…,n 结点(除 u,v 外)时，从 u,v 的最短路长。下面用归纳法证明：k=1 显然成立。假设对 k 成立,下面考虑 k+1 的情况；从 u 到 v 且不通过 k+1,…, n 节点的最短路有两种可能：(1)不经过 k 节点，即为 $d^{(k)}(u,v)$；(2)经过 k 节点，即为 $d^{(k)}(u,k)+d^{(k)}(k,v)$。

由于第 k+1 次迭代过程中，不会影响 k 次的迭代结果，d 用 $O(n^2)$ 的空间即可。二维数组 $p(u,v)$，记录 u 到 v，最后经过哪个 k 的迭代。

算法：

1. k=1，对于所有 u,v，$d(u,v)=w(u,v),p(u,v)=v$
2. k=k+1，对于所有 u,v，若 $d(u,v)>d(u,k)+d(k,v)$，则 $d(u,v)=d(u,k)+d(k,v)$，$p(u,v)=k$。若发现某个节点 u 使得 $d^{(k)}(u,u)<0$，则说明网络本来就含有负有向圈，结束。
3. 若 k=n，结束；否则转 2。

算法复杂度：$O(n^3)$

1.6.2.2.1.2. Johnson

本算法适用于稀疏图。它是 Dijkstra 和 Bellman-Ford 算法的综合应用。

本算法用了权值改造(reweighting)技术。若图的权值非负，则对于每个结点用一次 Dijkstra 算法，就可以求出所有顶点对间最短路。若图中有负权，但没有负圈，则可以把权值 W 改造成 W'，W'非负，使得能够使用 Dijkstra 算法。

算法：

1. 给图 G，加一个新结点 v_o。对 v_o 用 Bellman-Ford，若有负圈，则结束；否则可以得到 $h(v)$，即 v_o 到 v 的最短路长。O(nm)
2. 对于所有边 (u,v)，权值改造，即令 $w'(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)$。O(m)
3. 对于每个结点 v，用一次以 Fibonacci Heap 为优先队列的 Dijkstra 算法，可求出 v 与其他顶点的最短路。O(nlogn+m)*O(n)

算法总复杂度 $O(n^2\log n+nm)$。

权值改造满足两个原则：(1)W' 非负；(2)对于任意顶点 u, v，p 是在 W 上的 u 到 v 的最短路当且仅当 p 是在 W'上的 u 到 v 的最短路。下证 $w'(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)$，满足以上两个原则：

(1) 由于 h 是 v0 到 v 的最短路长，$h(u)+w(u,v)\quad h(v)$，所以 $w'(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)\quad 0$。

(2)令路径 $p=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，则

$$\begin{aligned} w'(p) &= \sum_{i=2}^{k} w'(v_{i-1},v_i) = \sum_{i=2}^{k}\left[w(v_{i-1},v_i)+h(v_{i-1})-h(v_i)\right] \\ &= w(p)+h(v_1)-h(v_k) \end{aligned}$$

$w'(p)$ 只与 $w(p)$ 以及首尾的标号 h 有关，不影响 $w'(p)$ 的决策。所以 $w(p)$ 是最短路长当且仅当 $w'(p)$ 是最短路长，且不影响最短路 p。

参考文献：

[1] 25.3 Johnson's algorithm for sparse graphs，Introduction to Algorithms，MIT Press

1.6.3. 网络流 Flow network

1.6.3.1. 最大流 Maximum flow

在有向无权图 G(V,E,C)中，其中 C 为每条边的容量(capability) $c(u,v)$，再给每条边赋予一个流值(flow) $f(u,v)$，并规定源 s 和汇 t。最大流问题的数学模型描述如下：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \max \quad \underset{v \quad V}{} f(s,v) \\
&s.t. \\
&(2)\ f(u,v) \quad c(u,v) \quad u,v \quad V \\
&(3)\ f(u,v) = -f(v,u) \quad u,v \quad V \\
&(4) \quad \underset{v \quad V}{} f(u,v) = 0 \quad u \quad V - \{s,t\}
\end{aligned}
$$

其中(2) $f(u,v) \quad c(u,v)$，为容量限制条件：边的流量不超过边上的容量。

其中(3)规定反向边的流量为正向边的流量的相反数。

其中(4)可以改写成：

$$\underset{(u,w)}{} f(u,w) = \underset{(w,v) \quad E}{} f(w,v), \quad w \quad V - \{s,t\}$$

称为流量平衡条件。它表示除了源 s 和汇 t 外的结点流入等于流出。

其中(1)表示要求从源流出的流量要最大。

最小切割最大流定理：s-t 最大流流值=s-t 最小切割容量。

习题：Ural 1277 Cops and Thieves (最小切割最大流)

1.6.3.1.1. 基本算法 Basic algorithms

1.6.3.1.1.1. Ford-Fulkerson method

增广轨定理：

1.6.3.1.1.1.1.Edmonds-Karp algorithm

1.6.3.1.1.1.1.1. Minimum length path

1.6.3.1.1.1.1.2. Maximum capability path

1.6.3.1.1.2. 预流推进算法 Preflow push method

1.6.3.1.1.2.1.Push-relabel

1.6.3.1.1.2.2.Relabel-to-front

1.6.3.1.1.3. Dinic method

DINIC & MPM
==========

我们能够做的更快一些么？？

前面的算法需要 O(mn)次迭代，而每次需要 O(m)的时间，因此总共需要 O(m^2 n)。
下面我们试着降到 O(n^3)。

想法：假设 d=d(t)，我们将试着一次性的找到很多到 t 的长度为 d 的路径。为了做到这个，我们看前面得到的层次图（我们不考虑所有的后向边以及两个端点在同一层的边）。我们现在尝试着在这个图中执行尽量多的流量，然后我们才重新计算剩余图。

术语：一个充满了这个剩余图的流称之为块流。

因此我们的目标就是在这个剩余图中在 O(n^2)的时间内找到一个块流。

我们定义 c(v)=顶点 v 的容量：也就 c_in[v],c_out[v]的最小值，这里 c_in[v]是所有 v 的入边的容量的和，而 c_out[v]类似。

算法：

-找到具有最小容量 c 的顶点 v。如果他的容量是 0，oh yeah--我们就可以把他和与他相关联的边都删除掉，并且更新他的邻居的容量值。

-如果 c 不为 0，那么我们将从 s 运送 c 个单位流到 v，然后从 v 运送到 t。你可能觉得这不又回到原来的问题了么？但是，这里有点值得注意：因为 v 具有最小的容量，我们可以使用任何的贪心策略来从其他顶点流入流出 c 的流量而不会被堵住。这一点意味着，我们可以在 O(m)的时间内充满 v。

（* daizi
nnd，想了好久才明白具体怎么做的
首先，为了从 s 运送 c 到 v，我们从 v 开始向上考虑，把任意一条从 v 向上的边给充满，
如果不能够充满，说明还没有安置的流量就这些了，全部扔在这条边上就是了，
为什么一定能够找到这样一条边呢，：）

然后假设我们刚才填充的这条边是 u->v，那么我们就有一些流量需要在 u 继续往上
进行处理，使用刚才在 v 点同样的办法，直到一直处理到了 s，一路上肯定是不会
出现什么障碍的。

然后我们将 c 从 v 运送到 t，我们在构造这个层次图的时候很容易就可以保证所有从
s 出发的路径都会在 t 终结，这样就好办了，使用上面同样的办法，只是处理的方
向是从 v 到 t 了。

这样，我们刚才处理的过程就容易得到下面的下面所谓的性质了。
*）

上面的算法给了我们一个可以在 O(mn)的时间内充满这个层次图的算法，下面进一步
分析。

为了得到我们需要的界，我们需要这样一个性质：当我们在上面的对每个新的顶点 v
执行算法的步骤中，保证对每条边我们只检查一次，对其做完所有需要的操作
之后才会去做下一条边。这点意味着，我们可以把运行时间分成两个部分来考虑：
a）花在被充满的边上的时间 b）花在没有被充满的边上的时间。对于 a），因为我们
每次充满一条边就会把它从图中删除，所以 a）的总时间是 O(m)。

因此我们的时间主要由 b）来决定，而 b）对应的边在对每个新的顶点 v 的执行过程中
至多出现 O(n)次，因此总的时间是 O(n^2)。而我们可以在 O(m)的时间内重新计算新
的层次图，所以我们就可以在 O(n m + n n^2)时间完成整个算法，也就是 O(n^3)。

1.6.3.1.2. 扩展模型 Extended models

1.6.3.1.2.1. 有上下界的流问题

问题模型：

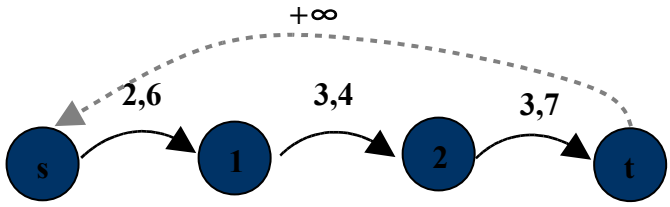
给定一个加权的有向图 $G=(V,E,B,C)$，满足：

(1)容量限制条件：$b(u,v) \quad f(u,v) \quad c(u,v)$

(2)流量平衡条件：$\underset{(u,w)}{\quad} f(u,w) = \underset{(w,v)\ E}{\quad} f(w,v)$

(2)中的 $w \ -V \quad \{s,t\}$，即除了源汇外，所有点都满足流量平衡条件，则称 G 为**有源汇**网络；

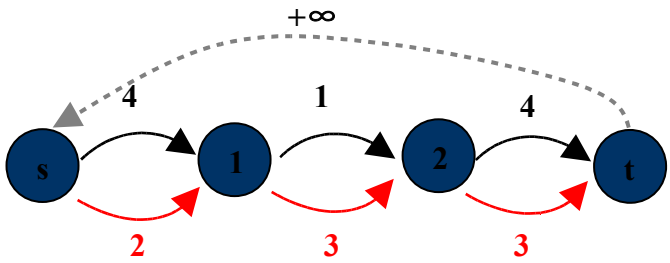
否则 $w \quad V$，即不存在源汇，所有点都满足流量平衡条件，则称 G 为**无源汇**网络。
将这类问题由易到难一一解决：
问题[1] 求无源汇的网络有上下界的可行流



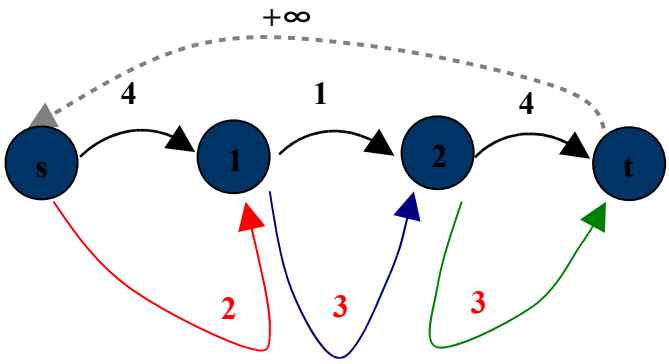
由于下界是一条弧上的流必需要满足的**确定值**。下面引入**必要弧**的概念：**必要弧**是一定流要满的弧。必要弧的构造，将容量下界的限制分离开了，从而构造了一个没有下界的网络 G'：

1. 将原弧(u,v)分离出一条必要弧：$c'(u,v)_{nes} = b(u,v)$。（红色表示）

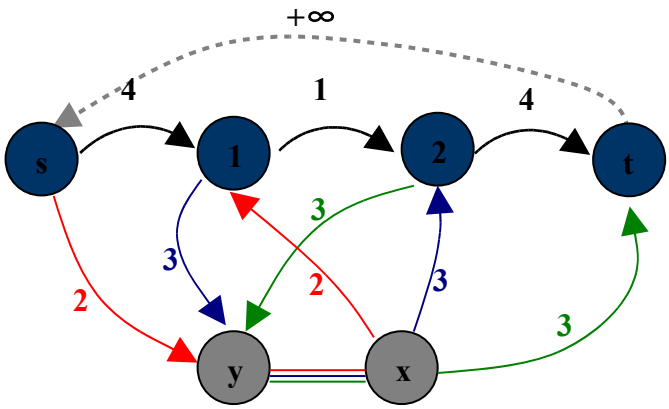
2. 原弧：$c'(u,v) = c(u,v) - b(u,v)$。



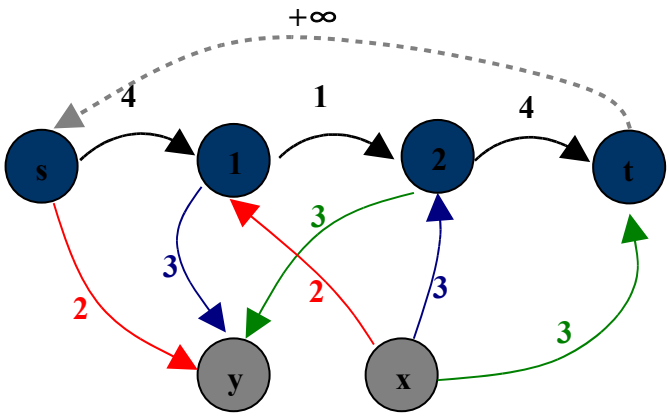
由于必要弧的有一定要满的限制，将必要弧“拉”出来集中考虑：



添加附加源 x, 附加汇 y。想像一条不限上界的(y, x)，用必要弧将它们“串”起来，即对于有向必要弧(u, v)，添加(u, y)，(x, v)，容量为必要弧容量。这样就建立了一个等价的网络。



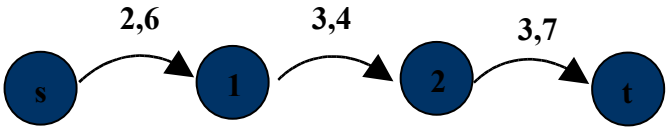
一个无源汇网络的可行流的方案一定是必要弧是满的。若去掉(y, x)后，附加源 x 到附加汇 y 的最大流，能使得 x 的出弧或者 y 的入弧都满，充要于原图有可行流。



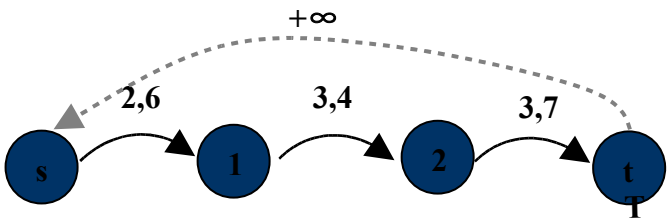
算法：

1. 按上述方法构造新网络(分离必要弧，附加源汇)
2. 求附加源 x 到附加汇 y 的最大流
3. 若 x 的出弧或 y 的入弧都满，则有解，将必要弧合并回原图；否则，无解。

问题[2] 求有源汇的网络有上下界的可行流



加入边(t, s)，下界为 0(保证不会连上附加源汇 x, y)，不限上界，将问题[2]转化为问题[1]来求解。



问题[3]求有源汇的网络有上下界的最大流

算法：

1. 先转化为问题[2]来求解一个可行流。若可行无解，则退出。由于必要弧是分离出来的，所以就可以把必要弧（附加源汇及其临边）及其上的流，暂时删去。再将(T,S)删去，恢复源汇。
2. 再次，从 S 到 T 找增广轨，求最大流。
3. 最后将暂时删去的下界信息恢复，合并到当前图中。输出解。

这样既不破坏下界(分离出来)也不超出上界(第 2 步满足容量限制)，问题解决。

问题[4]求有源汇的网络有上下界的最小流

算法：

1. 同问题[3]。
2. 从 T 到 S 找增广轨，不断反着改进。
3. 同问题[3]。

问题[3]与问题[4]的另一种简易求法：

注意问题[2]中，构造出的(t, s)，上下界几乎没什么限制。下面看看它的性质：

定理：如果从 s 到 t 有一个流量为 a 的可行流 f，那么从 t 到 s 连一条弧(t, s)，其流量下界 $b(t, s) = a$，则这个图一定有一个无源汇的可行流：除了弧(t, s)的容量为 a 外，其余边的容量与 f 相同。

证明：如果从 s 到 t 的最大流量为 a_{max}，那么从 t 到 s 连一条下界 $b(t, s) = a' > a_{max}$ 的弧(t, s)，则从在这个改造后的图中一定没有无源汇的可行流：否则将这个可行流中的弧(t, s)除去，就得到了原图中 s 到 t 的流量为 a'的流，大于最大流量 a_{max}，产生矛盾。

可以二分枚举这个参数 a，即下界 $b(t, s)$，每次用问题[1]判断是否有可行流。这样就可以求出最大流。

同理，问题[4]要求最小流，只要二分枚举上界 $c(t, s)$即可。

因为朴素的预流推进算法 $O(N^3)$，总复杂度为 $O(N^3 \log_2 流量)$ 。

思路：

无源汇 (附加源汇+最大解决)

有源汇 (附加(T,S)->无源汇)

习题：SGU194 Reactor Cooling
SGU176 Flow Construction

参考文献：

[1]安徽 周源，《一种简易的方法求解流量有上下界的网络中网络流问题》，IOI2004 国家集训队作业
[2]江涛，《最大流在信息学竞赛中应用的一个模型》，NOI2006 冬令营

1.6.3.2. 最小费用流 Minimum cost flow

对于有向带权图 G=(V,E,C,W)，求一个图上的流 f，使得每条边的流量与费用的乘积加起来的总和最小，且总流量等于 d。下面是最小费用流问题的数学模型的表述：

$$(1)\ \min \sum_{(u,v)\ E} w(u,v)f(u,v)$$

$$s.t.$$

$$(2)\ f(u,v)\quad c(u,v)\quad u,v\quad V$$

$$(3)\ f(u,v)=-f(v,u)\quad u,v\quad V$$

$$(4)\ \sum_{v\ V} f(u,v)=0\quad u\quad V\ -\{s,t\}$$

$$(5)\ \sum_{v\ V} f(s,v)=d$$

最小费用最大流问题：总流量 d 为网络的最大流的最小费用流问题。

1.6.3.2.1. 找最小费用路 Finding minimum cost path

每次在残量网络中找最小费用路并沿着它增广，直到不存这样增广路。

算法：

1. 用 Bellman-Ford 在残量网络中求 s-t 的最小费用路，若不存在，结束；否则转 2。
2. 沿着找到的最小费用路改进残量网络。转 2。

设 v 是最大流量，则算法最多迭代 v 次，故复杂度为 $O(nmv)$ 。

习题：FJOI 2002 蚯蚓问题

1.6.3.2.2. 找负权圈 Finding negative circle

在最大流的残量网络中不断的找负费用圈并沿着它增广，直到不存这样的负圈。易知，每次沿负费用圈增广，总费用总是不断的减小。

算法：

1. 用最大流算法求出网络的任一个最大流的残量网络。
2. 用 Bellman-Ford 算法找残量网络的负费用圈，若不存在，结束；否则转 3。
3. 沿着找到的负费用圈改进残量网络。转 2。

设 c 为容量最大值，w 为费用最大值。因为每次消圈，费用至少少 1，而初始费用不超过

mcw，所以复杂度上限：$O(nm^2cw)$，是伪多项式算法。但实际上，会比这个快多了。还有一个按照特定次序消圈的算法，$O(nm^2\log n)$。所以最小费用流问题是 P 类的。

习题：Ural 1237 Evacuation Plan

1.6.3.2.3. 网络单纯形 Network simplex algorithm

我不会阿！！！

1.6.4. 匹配 Matching

所有的匹配算法都基于增广轨定理：一个匹配是最大匹配当且仅当没有增广轨。这个定理适用于任意图。

Kuhn-Munkres
Edmonds
Gabow

1.6.4.1. 二分图 Bipartite Graph

由于二分图（又称二部图）的特殊性，使得它可以转化成流问题来解决。

$O(m\sqrt{n})$

习题：Ural 1203 Conference (最小点覆盖)

1.6.4.1.1. 无权图-匈牙利算法 Unweighted - Hopcroft and Karp algorithm

匈牙利算法，匈牙利数学家 Edmonds 于 1965 年提出。

1.6.4.1.2. 带权图-KM 算法 Weighted –Kuhn-Munkres(KM) algorithm

构造**可行顶标**：结点函数 l，对任意弧 (u,v) 满足：$l(u)+l(v) \quad w(u,v)$。

引入**相等子图**：G 的生成子图，包含所有点，但只包含满足 $l(u)+l(v)=w(u,v)$ 的所有弧

(u,v) 。

下证相等子图的一个性质定理：

如果相等子图有完美匹配，则该匹配是原图的最大权匹配。

证明：设 M*是相等子图的完美匹配，M 是原图的任意完美匹配。

$$
\begin{aligned}
w(M^*) &= \sum_{e \in M^*} w(e) \\
&= \sum_{v \in X \cup Y} l(v) \qquad (1) \\
&= \sum_{e \in M} w(e) \quad w(M) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1)是根据相等子图定义;(2)是根据可行顶标定义。

所以关键是寻找好的可行顶标，使相等子图有完美匹配。

算法思想：随便构造一个可行顶标（例如 Y 结点顶标为 0，X 结点的顶标为它出发所有弧的最大权值，然后求相等子图的最大匹配）

-若存在完美匹配，算法终止

-否则修改顶标使得相等子图的边变多，有更大机会存在完美匹配

Kuhn 和 Munkras

1.6.4.2. 一般图 General Graph

1.6.4.2.1. 无权图-带花树算法 Unweighted - Blossom (Edmonds)

朱(永津)-刘(振宏)算法（1965）
Edmons 算法（1968）

Dictionary of Algorithms and Data Structures NIST
Wikipedia
Introduction to Algorithm