

## REPETYTORIUM MATEMATYCZNE

### Algebra wektorów

Reprezentacja wektorów

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{1}_x + A_y \mathbf{1}_y + A_z \mathbf{1}_z$$
$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{1}_x + B_y \mathbf{1}_y + B_z \mathbf{1}_z$$

Długość wektora

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1)$$

Wektor jednostkowy

$$\mathbf{1}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (2)$$

Mnożenie wektora przez skalar

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha A_x \mathbf{1}_x + \alpha A_y \mathbf{1}_y + \alpha A_z \mathbf{1}_z \quad (3)$$

Dodawanie i odejmowanie wektorów

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \mathbf{1}_x + (A_y \pm B_y) \mathbf{1}_y + (A_z \pm B_z) \mathbf{1}_z \quad (4)$$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \angle_{AB} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{1}_x + A_y \mathbf{1}_y + A_z \mathbf{1}_z) \cdot (B_x \mathbf{1}_x + B_y \mathbf{1}_y + B_z \mathbf{1}_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (6)$$

własności iloczynu skalarnego

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \\ (\alpha \mathbf{A}) \cdot (\beta \mathbf{B}) &= \alpha \beta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{aligned}$$

warunek prostopadłości dwóch wektorów

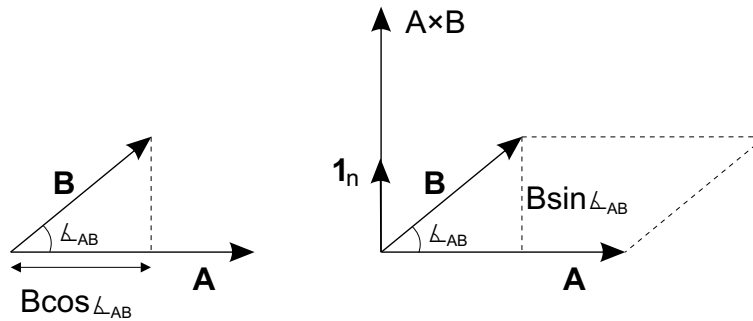
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \angle_{AB} \mathbf{1}_n \quad (7)$$

gdzie  $\mathbf{1}_n$  jest wektorem jednostkowym prostopadłym do wektorów  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ . Wektor  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  tworzy z wektorami  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  układ prawoskrętny a jego moduł jest równy polu równoległoboku zbudowanego na tych wektorach (patrz Rys. 1).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{1}_x + A_y \mathbf{1}_y + A_z \mathbf{1}_z) \times (B_x \mathbf{1}_x + B_y \mathbf{1}_y + B_z \mathbf{1}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{1}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{1}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{1}_z \end{aligned} \quad (8)$$



Rys. 1: Ilustracja iloczynu skalarnego i wektorowego

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{1}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{1}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{1}_z \quad (9)$$

własności iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \\ (\alpha \mathbf{A}) \times (\beta \mathbf{B}) &= \alpha \beta (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} + \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{D} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} \end{aligned}$$

warunek równoległości dwóch wektorów

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

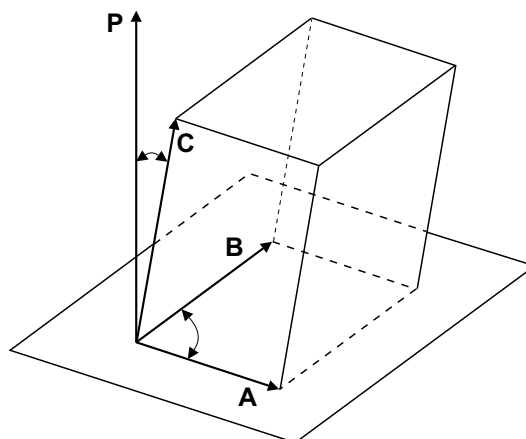
Iloczyn mieszany

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

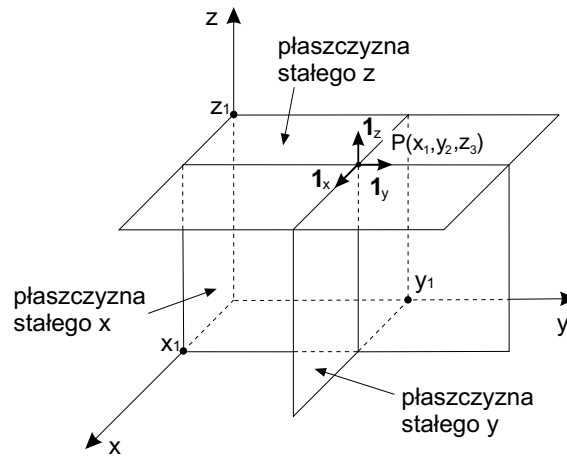
wartość iloczynu mieszanego nie zmienia się przy cyklicznej zmianie wektorów a jego wartość jest skalarem równym objętości  $V$  równoległościanu zbudowanego na tych wektorach (patrz Rys. 2)

$$V = |ABC \sin \alpha \cos \beta|$$

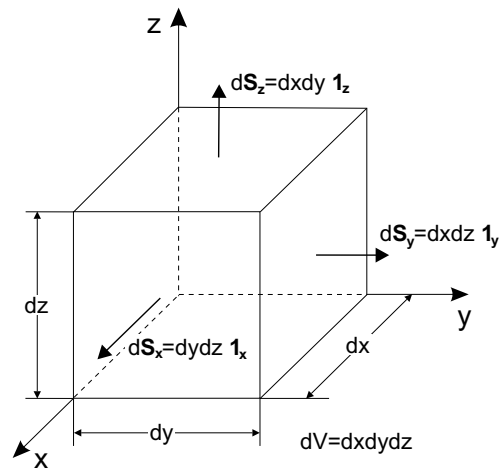
Układy współrzędnych - wektory jednostkowe



Rys. 2: Równoległościan zbudowany za pomocą trzech wektorów



Rys. 3: Reprezentacja punktu w kartezjańskim układzie współrzędnych



Rys. 4: Elementy objętości i powierzchni w kartezjańskim układzie współrzędnych

Współrzędne kartezjańskie -  $x, y, z$

$\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$

Współrzędne cylindryczne -  $r, \phi, z$

$\mathbf{1}_\rho, \mathbf{1}_\phi, \mathbf{1}_z$

Współrzędne sferyczne -  $r, \theta, \phi$

$\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_\theta, \mathbf{1}_\phi$

### Reprezentacja wektorów

Współrzędne kartezjańskie

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{1}_x + A_y \mathbf{1}_y + A_z \mathbf{1}_z$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \mathbf{1}_x + A_y(x, y, z) \mathbf{1}_y + A_z(x, y, z) \mathbf{1}_z$$

Współrzędne cylindryczne

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{1}_\rho + A_\phi \mathbf{1}_\phi + A_z \mathbf{1}_z$$

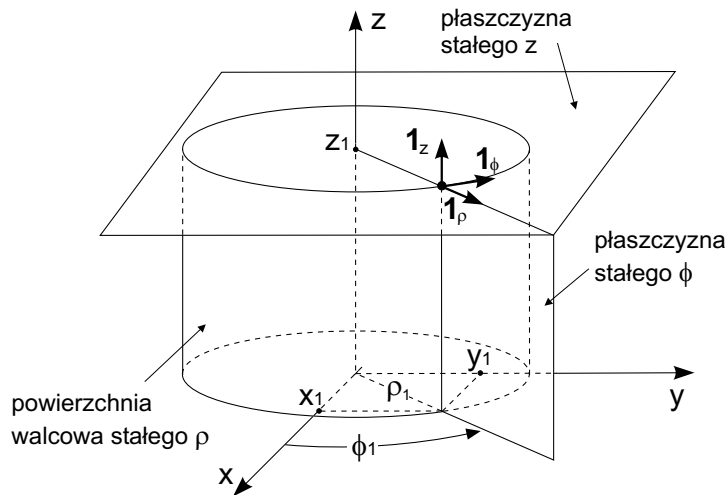
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\rho, \phi, z) = A_\rho(\rho, \phi, z) \mathbf{1}_\rho + A_\phi(\rho, \phi, z) \mathbf{1}_\phi + A_z(\rho, \phi, z) \mathbf{1}_z$$

Współrzędne sferyczne

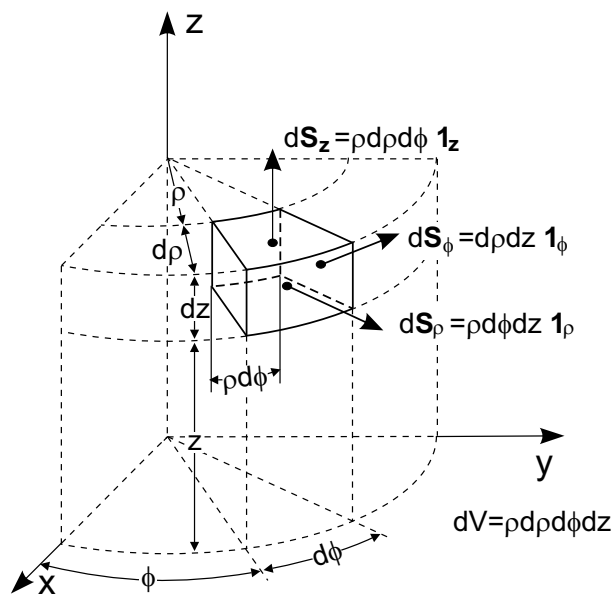
$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{1}_r + A_\theta \mathbf{1}_\theta + A_\phi \mathbf{1}_\phi$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, \theta, \phi) = A_r(r, \theta, \phi) \mathbf{1}_r + A_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{1}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{1}_\phi$$

### Przeliczenie składowych wektora pomiędzy układami



Rys. 5: Reprezentacja punktu w cylindrycznym układzie współrzędnych



Rys. 6: Elementy objętości i powierzchni w cylindrycznym układzie współrzędnych

Zależności ogólne

Współczynniki metryki

$$h_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (10)$$

gdzie

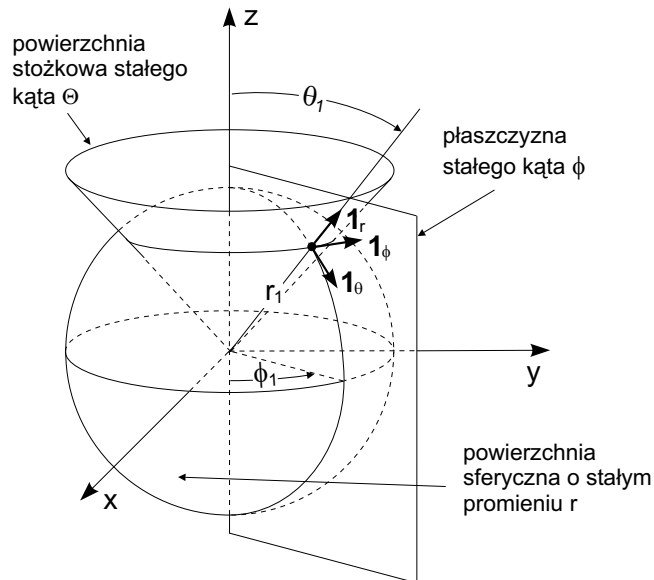
$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

to współrzędne prostokątne, natomiast

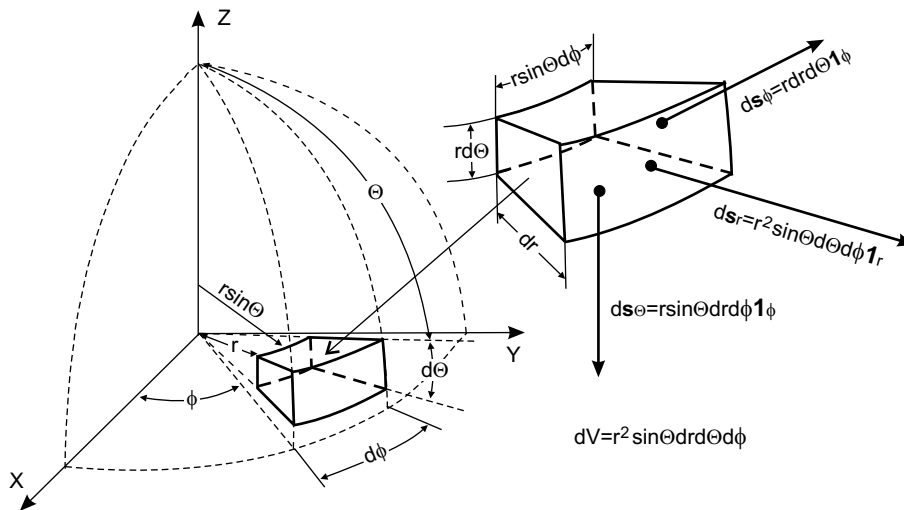
$q_1, q_2, q_3$  – współrzędne wybranego układu krzywoliniowego.

Wyznaczane składowych wektora w dowolnym układzie współrzędnych na podstawie znajomości składowych w układzie kartezjańskim

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (11)$$



Rys. 7: Reprezentacja punktu w sferycznym układzie współrzędnych



Rys. 8: Elementy objętości i powierzchni w sferycznym układzie współrzędnych

Wyznaczanie składowych skalarnych wektora  $A$  w kartezańskim układzie współrzędnych na podstawie znajomości składowych w innym układzie współrzędnych

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

kartezański–cylindryczny

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \phi & \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z & z &= z \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} F_\rho \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_\rho \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

kartezjański–sferyczny

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ z &= r \cos \theta & \phi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} \quad (18)$$

cylindryczny–sferyczny

$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \theta & r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \phi &= \phi & \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ z &= r \cos \theta & \phi &= \phi \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} F_\rho \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_\rho \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

### Nieskończenie małe elementy drogi, powierzchni i objętości

Zależności ogólne

$$d\mathbf{l} = h_1 dq_1 \mathbf{1}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{1}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{1}_3 \quad (22)$$

$d\mathbf{l}$  to wektor przemieszczenia o module równym długości elementarnej drogi całkowania i wskazujący kierunek zmiany położenia.

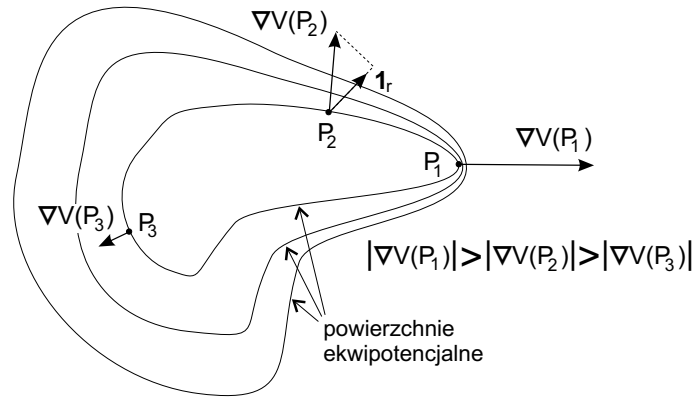
$$d\mathbf{s} = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \mathbf{1}_1 + h_1 h_3 dq_1 dq_3 \mathbf{1}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \mathbf{1}_3 \quad (23)$$

$d\mathbf{s}$  to wektor o długości równej liczbowo polu powierzchni elementarnej płata powierzchni i kierunku wektora normalnego  $\mathbf{1}_n$  skierowanego na zewnątrz tej powierzchni.

$$dV = h_1 h_1 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (24)$$

$dV$  to skalar równy liczbowo elementarnej objętości całkowania. W poszczególnych układach współrzędnych nieskończenie małe elementy drogi, powierzchni i objętości zapisuje się następująco: układ kartezjański

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= dx \mathbf{1}_x + dy \mathbf{1}_y + dz \mathbf{1}_z \\ d\mathbf{s} &= ds_x + ds_y + ds_z = dydz \mathbf{1}_x + dx dz \mathbf{1}_y + dx dy \mathbf{1}_z \\ dV &= dx dy dz \end{aligned}$$



Rys. 9: Gradient funkcji pola skalarnego

układ cylindryczny

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= d\rho\mathbf{1}_\rho + \rho d\phi\mathbf{1}_\phi + dz\mathbf{1}_z \\
 d\mathbf{s} &= ds_\rho + ds_\phi + ds_z = \rho d\phi dz\mathbf{1}_\rho + d\rho dz\mathbf{1}_\phi + \rho d\phi d\rho\mathbf{1}_z \\
 dV &= \rho d\rho d\phi dz
 \end{aligned}$$

układ sferyczny

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= dr\mathbf{1}_r + r d\theta\mathbf{1}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{1}_\phi \\
 d\mathbf{s} &= ds_r + ds_\theta + ds_\phi = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\mathbf{1}_r + r \sin\theta dr d\phi\mathbf{1}_\theta + r dr d\theta\mathbf{1}_\phi \\
 dV &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

## Gradient, dywergencja, rotacja

### Gradient

Gradient funkcji pola skalarnego  $V$  przypisuje każdemu punktowi pola wektor reprezentujący amplitudę i kierunek najszybszego wzrostu funkcji pola skalarnego  $V$

$$\nabla V = \frac{dV}{dn}\mathbf{1}_n,$$

gdzie  $\mathbf{1}_n$  to wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnych. Oznacza to, że wektor  $\nabla V$  jest prostopadły do powierzchni stałego potencjału i równoległy do linii sił pola (patrz Rys. 9). Pochodną funkcji pola skalarnego wzdłuż dowolnego kierunku  $dr$  wyznaczamy jak następuje

$$\frac{dV}{dr} = \nabla V \cdot \mathbf{1}_r \quad \text{natomiast} \quad dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r} \quad (25)$$

Uogólniona postać gradientu funkcji pola skalarnego

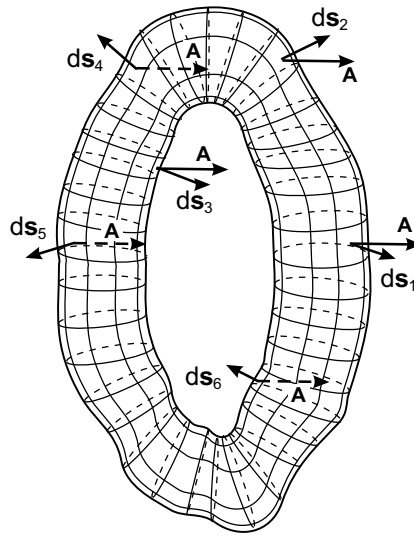
$$\nabla V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \mathbf{1}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \mathbf{1}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \mathbf{1}_3 \quad (26)$$

Gradient funkcji pola skalarnego dla układu kartezjańskiego, cylindrycznego i sferycznego:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z \quad (27)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z \quad (28)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi \quad (29)$$



Rys. 10: Strumień wektora  $\mathbf{A}$  przepływający przez zamkniętą powierzchnię  $S$

### Dywergencja

Dywergencja pola wektorowego  $\mathbf{A}$  określa wydajność źródeł tego pola w jednostce objętości. Uogólniona postać dywergencji

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}, \quad (30)$$

gdzie  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  to strumień wektora  $\mathbf{A}$  przez zamkniętą powierzchnię  $S$  (Rys. 10). Ogólnie strumień wektora możemy wyznaczyć dla dowolnej powierzchni (zamkniętej lub otwartej)

$$\Phi = \iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

Dla powierzchni zamkniętej przedstawia on różnicę pomiędzy strumieniem który wpływa do danej objętości, a strumieniem, który z niej wypływa. Jeżeli w danej objętości otoczonej powierzchnią  $S$  nie występują źródła wektora  $\mathbf{A}$  to całkowity strumień przez tą powierzchnię jest równy 0. W przypadku, gdy w objętości otoczonej powierzchnią  $S$  znajdują się źródła to całkowity strumień jest różny od zera, a jego znak zależy od tego czy są to źródła dodatnie czy ujemne. Jeżeli w ciągłym polu wektorowym całka  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$  to pole takie nazywamy bezźródłowym a wektor  $\mathbf{A}$  solenoidalnym. W zapisie różniczkowym dywergencja przyjmuje następującą postać

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (31)$$

Podstawiając współczynniki metryki, dla poszczególnych układów współrzędnych otrzymujemy

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (33)$$

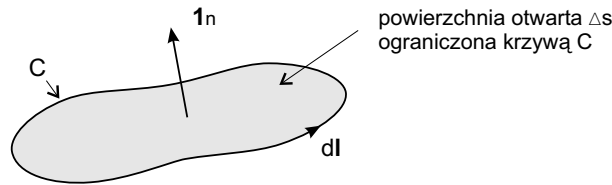
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (34)$$

Jeżeli wydajność źródeł pola wektorowego  $\mathbf{A}$  w jednostce objętości wyrażamy poprzez  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  to całkowitą wydajność w dowolnie określonej przestrzeni można wyrazić poprzez sumę elementarnych wydajności, co sprowadza się do obliczenia całki  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$ .

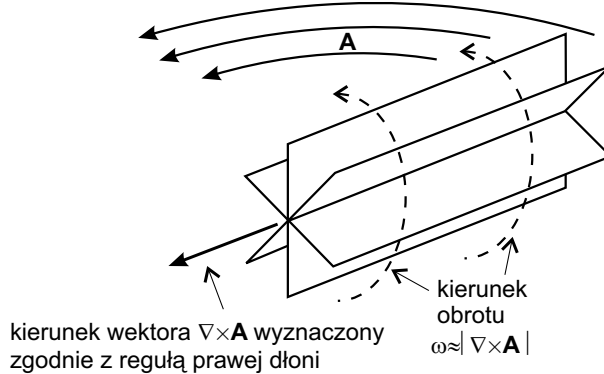
### Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv \quad (35)$$





Rys. 11: Relacje pomiędzy wektorami  $d\mathbf{l}$  i  $\mathbf{1}_n$  występującymi w definicji rotacji i cyrkulacji



Rys. 12: Ilustracja wyznaczania rotacji pola wektorowego

Twierdzenie to mówi, że strumień wektora przez powierzchnię zamkniętą równa się całce objętościowej z dywergencji tego wektora po obszarze ograniczonym tą powierzchnią.

### Rotacja

Rotacja pola wektorowego  $\mathbf{A}$  jest wektorem, którego moduł równa się liczbowo stosunkowi maksymalnej wartości cyrkulacji wektora  $\mathbf{A}$  po krzywej zamkniętej  $C$  do pola powierzchni  $\Delta s$  ograniczonej przez tą krzywą, gdy pole powierzchni  $\Delta s$  dąży do 0. Kierunek wektora  $\nabla \times \mathbf{A}$  jest zgodny z wektorem jednostkowym  $\mathbf{1}_n$  prostopadłym do powierzchni  $\Delta s$  (Rys. 11). Powierzchnia  $\Delta s$  musi znajdować się w takim położeniu, aby cyrkulacja przyjmowała wartość maksymalną.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[ \mathbf{1}_n \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max} \quad (36)$$

Fizyczne znaczenie rotacji najprościej wyjaśnić na przykładzie przepływu cieczy, gdzie wektor  $\mathbf{A}$  opisuje prędkość przepływu. W strumień cieczy wprowadzamy koło łopatkowe (patrz Rys. 12). Pod wpływem ruchu cieczy łopatki koła zaczynają się obracać. Jeżeli w danym punkcie pola wiatraczek ustawimy tak, aby prędkość obrotu była maksymalna, to jego prędkość kątowna będzie proporcjonalna do modułu rotacji  $|\nabla \times \mathbf{A}|$  a oś koła będzie wskazywać kierunek wektora rotacji  $\nabla \times \mathbf{A}$ . Składową wektora rotacji w dowolnym kierunku  $\mathbf{1}_u$  wyznaczamy za pomocą zależności

$$(\nabla \times \mathbf{A})_u = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{1}_u = \lim_{\Delta s_u \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s_u} \quad (37)$$

W (36) i (37)  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  jest całką krzywoliniową wektora  $\mathbf{A}$  po konturze zamkniętej  $C$ . Na ogół wartość całki krzywoliniowej zależy od postaci krzywej i od jej punktów końcowych. Oznacza to, że gdy dwie różne krzywe łączą te same dwa punkty to całki krzywoliniowe wzdłuż obydwu krzywych są różne. Jeżeli jednak  $\mathbf{A}$  jest gradientem funkcji skalarnej  $\mathbf{A} = \nabla V$ , to wartość całki krzywoliniowej zależy wyłącznie od punktów końcowych krzywej a nie od jej postaci. Na podstawie zależności (25) możemy zapisać

$$\oint_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_a^b \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b dV = V(b) - V(a). \quad (38)$$

W polu, dla którego zachodzą powyższe zależności, praca nie zależy od drogi, a pole takie nazywamy polem zachowawczym. Jeżeli całka krzywoliniowa po konturze zamkniętej wektora  $\mathbf{A}$ , który jest

gradientem pewnej funkcji skalarnej, jest równa 0, to również rotacja takiego wektora jest równa 0

$$\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0}. \quad (39)$$

Pole dla którego  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  nazywamy polem bezwirowym. Przy omawianiu dywergencji powiedziano, że jeżeli  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , to mamy do czynienia z polem bezźródłowym, a wektor  $\mathbf{A}$  jest wektorem solenoidalnym. Każdy wektor  $\mathbf{A}$ , który przedstawia rotację innego wektora

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$$

ma dywergencję równą 0

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0. \quad (40)$$

Równania (39) i (40) stanowią dwie fundamentalne tożsamości analizy wektorowej.

Uogólnioną postać rotacji we współrzędnych kartezjańskich i krzywoliniowych zapisujemy następująco

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{1}_1 & h_2 \mathbf{1}_2 & h_3 \mathbf{1}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (41)$$

Podstawiając współczynniki metryki, dla poszczególnych układów współrzędnych otrzymujemy

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{1}_\rho & \rho \mathbf{1}_\phi & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{1}_\rho \\ &+ \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{1}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{1}_z \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & r \mathbf{1}_\theta & r \sin \theta \mathbf{1}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{1}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{1}_\phi \end{aligned} \quad (44)$$

### Twierdzenie Stokesa

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \quad (45)$$

Całka krzywoliniowa danego wektora  $\mathbf{A}$  po konturze zamkniętym  $C$  jest równa strumieniowi rotacji tego wektora przez powierzchnię  $S$ , której brzegiem jest krzywa  $C$ .

### Wybrane tożsamości analizy wektorowej

$$\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U$$

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V\nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$$

## CZEŚĆ ZADANIOWA

**0.1.** Dane są wektory:  $\mathbf{A} = 1\mathbf{x} + 21\mathbf{y} - 31\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{B} = -41\mathbf{y} + 1\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{C} = 51\mathbf{x} - 21\mathbf{z}$ . Wyznaczyć:

- a)  $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ ,
- b)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,
- c)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,
- d) kąt pomiędzy wektorami  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$ ,
- e) składową wektora  $\mathbf{C}$  w kierunku wyznaczonym przez wektor  $\mathbf{A}$ ,
- f)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  i  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ,
- g)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  i  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ .

**Rozwiązanie:**

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= 1\mathbf{x} + 21\mathbf{y} - 31\mathbf{z} - (-41\mathbf{y} + 1\mathbf{z}) = 1\mathbf{x} + 61\mathbf{y} - 41\mathbf{z} \\ |\mathbf{A} - \mathbf{B}| &= \sqrt{1^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 36 + 16} = \sqrt{53}\end{aligned}$$

b) na podstawie zależności (6)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 1 = -11$$

c) na podstawie zależności (9)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2 - 12)\mathbf{1}_x + (0 - 1)\mathbf{1}_y + (4 - 0)\mathbf{1}_z = -10\mathbf{1}_x - \mathbf{1}_y + 4\mathbf{1}_z$$

d) kąt pomiędzy wektorami wyznaczamy z zależności (5)

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{BC} \quad \longrightarrow \quad \phi = \arccos \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{BC}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= 0 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2 \\ B &= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{17}, \quad C = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}\end{aligned}$$

ostatecznie

$$\phi = \arccos \frac{-2}{\sqrt{17}\sqrt{29}} \cong 95^\circ$$

e) składową wektora  $\mathbf{C}$  w kierunku wyznaczonym przez wektor  $\mathbf{A}$  obliczamy z zależności

$$\mathbf{C}_A = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{1}_A$$

gdzie

$$\mathbf{1}_A = \frac{1\mathbf{x} + 21\mathbf{y} - 31\mathbf{z}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_y - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_z$$

ostatecznie

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_A &= (5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2)) \left( \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_y - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_z \right) \\ &= \frac{11}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_x + \frac{22}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_y - \frac{33}{\sqrt{14}}\mathbf{1}_z = \frac{11}{\sqrt{14}}(1\mathbf{x} + 21\mathbf{y} - 31\mathbf{z})\end{aligned}$$

f) na podstawie zależności (6) i (9) obliczamy

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (8 - 0)\mathbf{1}_x + (5 - 0)\mathbf{1}_y + (0 + 20)\mathbf{1}_z = 8\mathbf{1}_x + 5\mathbf{1}_y + 20\mathbf{1}_z \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= 1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 20 = -42 \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2 - 12)\mathbf{1}_x + (0 - 1)\mathbf{1}_y + (-4 - 0)\mathbf{1}_z = -10\mathbf{1}_x - \mathbf{1}_y - 4\mathbf{1}_z \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= -10 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + (-4) \cdot (-2) = -42\end{aligned}$$

g) na podstawie wzoru (9) i wyników otrzymanych w poprzednim punkcie obliczamy

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (40 + 15)\mathbf{1}_x + (-24 - 20)\mathbf{1}_y + (5 - 16)\mathbf{1}_z = 55\mathbf{1}_x - 44\mathbf{1}_y - 11\mathbf{1}_z \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (2 - 0)\mathbf{1}_x + (-20 - 20)\mathbf{1}_y + (0 + 5)\mathbf{1}_z = 2\mathbf{1}_x - 40\mathbf{1}_y + 5\mathbf{1}_z\end{aligned}$$

**0.2.** Początek i koniec wektora określają punkty  $P_1(-2, \sqrt{3}, -5)$  i  $P_2(2, 3\sqrt{3}, 1)$ . Wyznaczyć składowe skalarne i moduł tego wektora oraz wektor jednostkowy równoległy do niego.

**Rozwiązanie:** Wektor rozpięty pomiędzy dwoma punktami  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  wyznaczamy następująco

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (x_2 - x_1)\mathbf{1}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{1}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{1}_z \\ &= (2 + 2)\mathbf{1}_x + (3\sqrt{3} - \sqrt{3})\mathbf{1}_y + (1 + 5)\mathbf{1}_z = 4\mathbf{1}_x + 2\sqrt{3}\mathbf{1}_y + 6\mathbf{1}_z\end{aligned}$$

Moduł wektora obliczamy na podstawie zależności

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2 + 6^2} = 8$$

natomiast wektor jednostkowy

$$\mathbf{1}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{1}_y + \frac{3}{4}\mathbf{1}_z$$

**0.3.** Dany jest wektor  $\mathbf{A} = 3\mathbf{1}_x + 4\mathbf{1}_y + 5\mathbf{1}_z$ . Dobrać do niego wektor  $\mathbf{B}$  tak, aby był on równoległy do  $\mathbf{A}$ , a wartość iloczynu skalarnego  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  była równa  $-125$ .

**Rozwiązanie:** Warunkiem równoległości dwóch wektorów jest zerowanie się ich iloczynu wektorowego. Z warunku  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}4\mathbf{B}_z - 5\mathbf{B}_y &= 0 \\ 5\mathbf{B}_x - 3\mathbf{B}_z &= 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B}_z = \frac{5}{3}\mathbf{B}_x \\ 3\mathbf{B}_y - 4\mathbf{B}_x &= 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B}_y = \frac{4}{3}\mathbf{B}_x\end{aligned}$$

Wyrażając iloczyn skalarny przez współrzędne wektorów przepisujemy warunek  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -125$  w postaci

$$3\mathbf{B}_x + 4\mathbf{B}_y + 5\mathbf{B}_z = -125$$

Po podstawieniu wcześniej wyznaczonych  $\mathbf{B}_y$  i  $\mathbf{B}_z$  otrzymujemy

$$3\mathbf{B}_x + \frac{16}{3}\mathbf{B}_x + \frac{25}{3}\mathbf{B}_x = -125 \quad \text{skąd} \quad \mathbf{B}_x = -7.5$$

Pozostałe składowe wektora  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}_y = \frac{4}{3}\mathbf{B}_x = -10 \quad \text{i} \quad \mathbf{B}_z = \frac{5}{3}\mathbf{B}_x = -12.5$$

Zatem ostatecznie

$$\mathbf{B} = -(7.5\mathbf{1}_x + 10\mathbf{1}_y + 12.5\mathbf{1}_z)$$

**0.4.** Dany jest wektor  $\mathbf{A} = 2\mathbf{1}_x + 2\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$ . Znaleźć wektor  $\mathbf{B}$  prostopadły do wektora  $\mathbf{A}$ , tak aby wektor  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  był równoległy do wektora  $\mathbf{D} = -\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y$

**Rozwiązanie:**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2B_z - B_y)\mathbf{1}_x + (B_x - 2B_z)\mathbf{1}_y + (2B_y - 2B_x)\mathbf{1}_z$$

Z warunku  $\mathbf{C} \times \mathbf{D} = 0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}(B_x - 2B_z) \cdot 0 - (2B_y - 2B_x) \cdot 1 &= 0 \\ (2B_y - 2B_x) \cdot (-1) - (2B_z - B_y) \cdot 0 &= 0 \\ (2B_z - B_y) \cdot 1 - (B_x - 2B_z) \cdot (-1) &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań prowadzi do warunku  $B_x = B_y$

Warunkiem prostopadłości dwóch wektorów jest zerowanie się ich iloczynu skalarnego

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad 2B_x + 2B_y + B_z = 0$$

podstawiając  $B_x = B_y$ , otrzymujemy

$$4B_x + B_z = 0 \quad \longrightarrow \quad B_z = -4B_x$$

Zakładając, że  $B_z = -8$  wtedy  $B_x = B_y = 2$ . Zatem ostatecznie

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{1}_x + 2\mathbf{1}_y - 8\mathbf{1}_z$$

**0.5.** Znaleźć współrzędne wektora  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_x - 2\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z$  we współrzędnych a) cylindrycznych, b) sferycznych.

**Rozwiązanie:**

a) Korzystając z zależności (13)

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \phi = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

Na podstawie transformacji (14)

$$E_\rho = \cos \phi - 2 \sin \phi = \sqrt{5}, \quad E_\phi = -\sin \phi - 2 \cos \phi = 0, \quad E_z = 2.$$

Zatem ostatecznie  $\mathbf{E} = \sqrt{5}\mathbf{1}_\rho + 2\mathbf{1}_z$ .

b) Korzystając z zależności (16)

$$r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \quad \cos \theta = \frac{2}{3}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3},$$
$$\rho = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \phi = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Na podstawie transformacji (17)

$$E_r = \sin \theta \cos \phi - 2 \sin \theta \sin \phi + 2 \cos \theta = 3$$
$$E_\theta = \cos \theta \cos \phi - 2 \cos \theta \sin \phi - 2 \sin \theta = 0$$
$$E_\phi = -\sin \phi - 2 \cos \phi = 0$$

Zatem ostatecznie  $\mathbf{E} = 3\mathbf{1}_r$ .

**0.6.** Znaleźć współrzędne wektora  $\mathbf{B} = 1/\rho\mathbf{1}_\rho - 2/\rho^2\mathbf{1}_\phi + \mathbf{1}_z$  we współrzędnych a) kartezjańskich, b) sferycznych.

**Rozwiązanie:**

a) Korzystając z zależności (13)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Wykorzystując macierz transformacji (15) otrzymujemy

$$B_x = \frac{1}{\rho} \cos \phi + \frac{2}{\rho^2} \sin \phi = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2} + 2y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$
$$B_y = \frac{1}{\rho} \sin \phi - \frac{2}{\rho^2} \cos \phi = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - 2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

Ostatecznie

$$\mathbf{B} = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2} + 2y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\mathbf{1}_x + \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - 2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$$

b) Korzystając z zależności  $\rho = r \sin \theta$  i transformacji (21) otrzymujemy

$$B_r = \frac{1}{r} + \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{1}{r} \cot \theta - \sin \theta, \quad B_\phi = -\frac{2}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Zatem ostatecznie

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} + \cos \theta\right) \mathbf{1}_r + \left(\frac{1}{r} \cot \theta - \sin \theta\right) \mathbf{1}_\theta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{1}_\phi$$

**0.7.** Znaleźć współrzędne wektora  $\mathbf{H} = 1/\sin \theta \mathbf{1}_r + 1/\cos \theta \mathbf{1}_\theta + r \mathbf{1}_\phi$  we współrzędnych a) kartezjańskich, b) cylindrycznych.

**Rozwiązanie:**

a) Korzystając z zależności (16) możemy zapisać

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Na podstawie macierzy transformacji (20) i powyższych zależności otrzymujemy

$$H_x = 2 \cos \phi - r \sin \phi = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$H_y = 2 \sin \phi + r \cos \phi = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$H_z = \cot \theta - \tan \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Ostatecznie

$$\mathbf{H} = \frac{2x - y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_x + \frac{2y + x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_y + \frac{z^2 - x^2 - y^2}{z\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_z$$

b) Na podstawie zależności

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}, \quad \cot \theta = \frac{z}{\rho}, \quad \tan \theta = \frac{\rho}{z}$$

i transformacji (20) otrzymujemy

$$B_\rho = 2$$

$$B_\phi = r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

$$B_z = \cot \theta - \tan \theta = \frac{z}{\rho} - \frac{\rho}{z}$$

Zatem ostatecznie

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{1}_\rho + \sqrt{z^2 + \rho^2} \mathbf{1}_\phi + \frac{z^2 - \rho^2}{z\rho} \mathbf{1}_z$$

**0.8.** Wyznaczyć współczynniki metryki dla układu: a) kartezjańskiego, b) cylindrycznego, c) sferycznego.

**Rozwiązanie:** Współczynniki metryki  $h_1, h_2, h_3$  dla każdego z układów współrzędnych można wyznaczyć z zależności (10)

a) Dla układu kartezjańskiego  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ . Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 & \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial y} = 0 & \frac{\partial y}{\partial y} = 1 & \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0 & \frac{\partial y}{\partial z} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array}$$

i podstawieniu do (10) otrzymujemy

$$h_x = 1 \qquad h_y = 1 \qquad h_z = 1$$

b) Dla układu cylindrycznego  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \phi$ ,  $q_3 = z$ . Korzystając z (13) wyznaczamy pochodne cząstkowe

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho \cos \phi)}{\partial \rho} = \cos \phi & \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho \sin \phi)}{\partial \rho} = \sin \phi & \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho \cos \phi)}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi & \frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho \sin \phi)}{\partial \phi} = \rho \cos \phi & \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0 & \frac{\partial y}{\partial z} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array}$$

Ostatecznie na podstawie (10) otrzymujemy

$$\begin{aligned} h_\rho &= \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1 \\ h_\phi &= \sqrt{(-\rho \sin \phi)^2 + (\rho \cos \phi)^2} = \rho \\ h_z &= 1 \end{aligned}$$

c) Dla układu sferycznego  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \phi$ . Korzystając z zależności (16) wyznaczamy pochodne cząstkowe

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial(r \sin \theta \cos \phi)}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi & \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial(r \sin \theta \sin \phi)}{\partial r} = \sin \theta \sin \phi \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \sin \theta \cos \phi)}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi & \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \sin \theta \sin \phi)}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \phi \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \sin \theta \cos \phi)}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi & \frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \sin \theta \sin \phi)}{\partial \phi} = r \sin \theta \cos \phi \\ \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} = \cos \theta & \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} = -r \sin \theta & \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \phi} = 0 & \end{array}$$

Podstawiając do (10) otrzymujemy

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta} = 1 \\ h_\theta &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta} = r \\ h_\phi &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi} = r \sin \theta \end{aligned}$$

**0.9.** Dane są dwa wektory  $\mathbf{A} = 2\mathbf{1}_x + 2\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$ ,  $\mathbf{B} = 3\mathbf{1}_x - \sqrt{3}\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z$ . Obliczyć a) kąt zawarty pomiędzy wektorami, b) kąty między wektorami a osiami układu.

**Rozwiązanie:**



a) Kąt zawarty między dwoma wektorami obliczamy korzystając z (5)

$$\phi = \arccos\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right)$$

gdzie

$$A = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3, \quad B = \sqrt{9 + 3 + 4} = 4$$

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{8 - 2\sqrt{3}}{12} \cong 0.378$$

Ostatecznie otrzymujemy  $\phi = 67^\circ 47'$ .

b) Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  zawarte pomiędzy danymi wektorami a osiami  $x$ ,  $y$  i  $z$  wyznaczamy z cosinusów kierunkowych

$$\begin{aligned} \cos \alpha_A &= \frac{A_x}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha_A = 48^\circ 11', & \cos \alpha_B &= \frac{B_x}{B} = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha_B = 41^\circ 25' \\ \cos \beta_A &= \frac{A_y}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow \beta_A = 48^\circ 11', & \cos \beta_B &= \frac{B_y}{B} = \frac{-\sqrt{3}}{4} \rightarrow \beta_B = 115^\circ 40' \\ \cos \gamma_A &= \frac{A_z}{A} = \frac{1}{3} \rightarrow \gamma_A = 70^\circ 32', & \cos \gamma_B &= \frac{B_z}{B} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma_B = 60^\circ 00' \end{aligned}$$

**0.10.** Podać warunek, dla którego  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2$ .

**Rozwiązanie:**

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 \cos^2 \phi; \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 = A^2 B^2$$

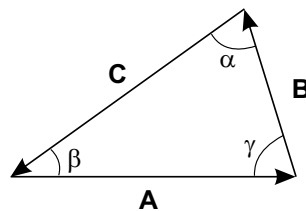
Aby zachodziła równość podana w treści zadania, musi być spełniony warunek

$$\cos \phi = 1 \quad \text{lub} \quad \cos \phi = -1$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\phi = 0, \pi$$

**0.11.** Udowodnić twierdzenia cosinusów i sinusów dla trójkąta przedstawionego na Rys. 13.



Rys. 13: Trójkąt zbudowany z trzech wektorów

**Rozwiązanie:** Aby udowodnić twierdzenie cosinusów

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma}$$

zapiszemy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

zatem

$$\begin{aligned} C^2 &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\pi - \gamma) = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma \end{aligned}$$

Twierdzenie sinusów

Dla trójkąta zbudowanego z wektorów  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  możemy zapisać

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Mnożąc powyższe równanie wektorowo przez  $\mathbf{B}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\ AB \sin \gamma &= BC \sin \alpha \\ \frac{A}{\sin \alpha} &= \frac{C}{\sin \gamma}\end{aligned}$$

Mnożąc równanie wyjściowe wektorowo przez  $\mathbf{A}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \times \mathbf{A} &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} \\ BA \sin \gamma &= AC \sin \beta \\ \frac{B}{\sin \beta} &= \frac{C}{\sin \gamma}\end{aligned}$$

Ostatecznie, łącząc wyniki częściowe, otrzymujemy równanie sinusów

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

**0.12.** Dla trójkąta o wierzchołkach  $A(5, -2, 1), B(8, 4, 7), C(2, 0, 3)$  wyznaczyć współrzędne punktu  $P$ , leżącego na prostej  $AB$  tak, aby wektory  $\mathbf{CP}$  i  $\mathbf{AB}$  były prostopadłe. Obliczyć pole trójkąta i wektor jednostkowy prostopadły do jego powierzchni (patrz Rys. 14).

**Rozwiązanie:** Zdefiniujemy wektor  $\mathbf{A}$  łączący początek układu współrzędnych z punktem  $A$

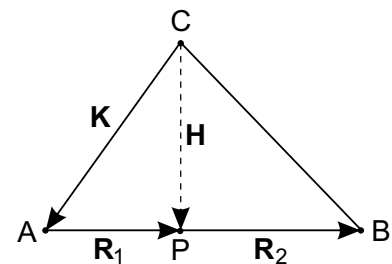
$$\mathbf{A} = \mathbf{OA} = 5\mathbf{1}_x - 2\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$$

analogicznie

$$\mathbf{B} = \mathbf{OB} = 8\mathbf{1}_x + 4\mathbf{1}_y + 7\mathbf{1}_z$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{OC} = 2\mathbf{1}_x + 0\mathbf{1}_y + 3\mathbf{1}_z$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{OP} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$$



Rys. 14:

Dodatkowo oznaczmy

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} - \mathbf{C} = 3\mathbf{1}_x - 2\mathbf{1}_y - 2\mathbf{1}_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = 3\mathbf{1}_x + 6\mathbf{1}_y + 6\mathbf{1}_z$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P} - \mathbf{A}, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{B} - \mathbf{P}$$

Wektor  $\mathbf{R}_1$  obliczamy z zależności

$$\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{1}_R$$

$$\mathbf{1}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{1}{9}(3\mathbf{1}_x + 6\mathbf{1}_y + 6\mathbf{1}_z) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_x + \frac{2}{3}\mathbf{1}_y + \frac{2}{3}\mathbf{1}_z$$

$$R_1 = |\mathbf{K} \cdot \mathbf{1}_R| = \left| 3\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} \right| = \frac{5}{3}$$

zatem

$$\mathbf{R}_1 = \frac{5}{9}\mathbf{1}_x + \frac{10}{9}\mathbf{1}_y + \frac{10}{9}\mathbf{1}_z$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{R}_1 = \frac{50}{9}\mathbf{1}_x - \frac{8}{9}\mathbf{1}_y + \frac{19}{9}\mathbf{1}_z$$

a współrzędne punktu  $P(\frac{50}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{19}{9})$ .

Pole trójkąta wyznaczamy z zależności

$$P_{\Delta} = 0.5RH$$

gdzie

$$H = |\mathbf{H}| = |\mathbf{P} - \mathbf{C}| = \sqrt{(32/9)^2 + (-8/9)^2 + (-8/9)^2} \cong 3.77$$

ostatecznie  $P_{\Delta} \cong 11.33$ .

Wektor jednostkowy, prostopadły do powierzchni trójkąta wyznaczamy z iloczynu wektorowego

$$\mathbf{1}_n = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$$

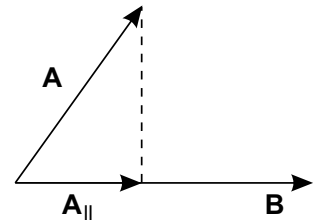
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -18\mathbf{1}_x - 27\mathbf{1}_y + 36\mathbf{1}_z \\ |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| &\cong 48.47 \end{aligned}$$

ostatecznie  $\mathbf{1}_n \cong -0.371\mathbf{1}_x - 0.561\mathbf{1}_y + 0.741\mathbf{1}_z$ .

**0.13.** Dany wektor  $\mathbf{A} = 2\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y - 4\mathbf{1}_z$  rozłożyć na dwa wektory składowe, tak aby jeden był prostopadły a drugi równoległy do wektora  $\mathbf{B} = \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$ .

**Rozwiązanie:** Składową wektora  $\mathbf{A}$  równoległą do wektora  $\mathbf{B}$  wyznaczamy z zależności (patrz Rys. 15)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\parallel} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}_B) \mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_B &= \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}_B &= -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



Rys. 15:

Ostatecznie

$$\mathbf{A}_{\parallel} = -\frac{1}{3}(\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z),$$

natomiast

$$\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{\parallel} = \frac{7}{3}\mathbf{1}_x + \frac{4}{3}\mathbf{1}_y - \frac{11}{3}\mathbf{1}_z.$$

**0.14.** Znaleźć składową skalarną  $E_x$  pola wektorowego  $\mathbf{E} = 25/r^2\mathbf{1}_r$ , określonego we współrzędnych sferycznych, w punkcie  $P(-3, 4, 5)$ .

**Rozwiązanie:** Składową skalarną  $E_x$  wyznaczamy z zależności (18)

$$E_x = \frac{25}{r^2} \sin \theta \cos \phi.$$

Na podstawie zależności (16) możemy zapisać

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$E_x = \frac{25x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a po podstawieniu współrzędnych punktu  $P$

$$E_x(-3, 4, 5) = \frac{-75}{(9 + 16 + 25)^{\frac{3}{2}}} \cong -0.21.$$

**0.15.** Wyprowadzić wzory a następnie obliczyć pole powierzchni i objętość sfery o promieniu 3m.

**Rozwiązanie:** Przy wyznaczeniu pola powierzchni i objętości sfery najwygodniej zastosować sferyczny układ współrzędnych. Pole powierzchni obliczamy następująco

$$s = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathbf{1}_r \cdot d\mathbf{s}_r = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$s = 4\pi r^2 \quad (m^2) \quad \xrightarrow{r=3} \quad s = 36\pi \quad (m^2).$$

Objętość wyznaczamy obliczając całą kę potrojną w sferycznym układzie współrzędnych

$$v = \int_{r=0}^3 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_{r=0}^3 \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$= 4\pi \int_{r=0}^3 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \Big|_0^3 = 36\pi \quad (m^3).$$

**0.16.** Dane jest pole wektorowe  $\mathbf{E} = y\mathbf{1}_x + x\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$ . Obliczyć całkę liniową  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  od punktu  $P_1(2, 1, -1)$  do punktu  $P_2(8, 2, -1)$  a) wzdłuż paraboli  $x = 2y^2$ , b) wzdłuż prostej łączącej oba punkty.

**Rozwiązanie:** Iloczyn skalarny wektora  $\mathbf{E}$  i elementu drogi  $d\mathbf{l}$  w układzie kartezjańskim

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (y\mathbf{1}_x + x\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z) \cdot (\mathbf{1}_x dx + \mathbf{1}_y dy + \mathbf{1}_z dz) = ydx + xdy + zdz$$

a zatem

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{x_1}^{x_2} ydx + \int_{y_1}^{y_2} xdy + \int_{z_1}^{z_2} zdz.$$

a) w tym przypadku  $x = 2y^2$  natomiast  $y = \sqrt{x/2}$ , zatem

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_2^8 \sqrt{\frac{x}{2}} dx + 2 \int_1^2 y^2 dy = 14.$$

b) w tym przypadku  $x = 6y - 4$  natomiast  $y = (x + 4)/6$  (równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P_1$  i  $P_2$ ), zatem

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{6} \int_2^8 (x + 4) dx + \int_1^2 (6y - 4) dy = 14.$$

**0.17.** Wyznaczyć strumień wektora  $\mathbf{D} = 3 \sin \theta \mathbf{1}_r$  przez powierzchnię sfery o promieniu 5, której środkiem jest początek układu współrzędnych.

**Rozwiązanie:** Strumień wektora  $\mathbf{D}$  wyznaczamy z zależności

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3 \sin \theta \mathbf{1}_r) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{1}_r)$$

$$= 3r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta d\phi = 3r^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\pi} d\phi = \frac{3}{2}\pi r^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 3\pi^2 r^2.$$

Ostatecznie, dla  $r = 5$  otrzymujemy  $\Psi = 75\pi^2$ .

**0.18.** Wyrażenie potencjał skalarny ma postać  $V = 2y - x^2y$  [V]. Jakie jest wyrażenie opisujące natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  wiedząc, że  $\mathbf{E} = -\nabla V$ ? Znaleźć kierunek i wartość wektora  $\mathbf{E}$  w punktach  $A = (0, 10)$  i  $B = (10, 10)$ .

**Rozwiązanie:** Natężenie pola elektrycznego wyznaczamy na podstawie zależności

$$\mathbf{E} = -\nabla V = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z \right)$$

$$= - \left( \frac{\partial (x^2y - 2y)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial (x^2y - 2y)}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial (x^2y - 2y)}{\partial z} \mathbf{1}_z \right) = -2xy\mathbf{1}_x + (2 - x^2)\mathbf{1}_y.$$

Podstawiając współrzędne punktów  $A$  i  $B$ , otrzymujemy

$$\mathbf{E}(0, 10) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(10, 10) = -200\mathbf{1}_x - 98\mathbf{1}_y.$$

**0.19.** Obliczyć objętość równoległoscianu zbudowanego z trzech wektorów:  $\mathbf{A} = 2\mathbf{1}_x + 3\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z$ ,  $\mathbf{B} = -3\mathbf{1}_x + 4\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + 6\mathbf{1}_z$  wychodzących z jednego wierzchołka (patrz Rys. 2).

**Rozwiązanie:** Pole równoległoscianu można wyrazić za pomocą iloczynu mieszanego trzech wektorów wychodzących z jednego wierzchołka

$$V = |(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = |\mathbf{P} \cdot \mathbf{C}|,$$

gdzie  $\mathbf{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  jest wektorem prostopadłym do podstawy, którego moduł równa się polu podstawy ( $P = AB \sin \alpha$ )

$$\mathbf{P} = (2\mathbf{1}_x + 3\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z) \times (-3\mathbf{1}_x + 4\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z) = -2\mathbf{1}_x - 10\mathbf{1}_y + 17\mathbf{1}_z.$$

Mnożąc pole podstawy przez wysokość  $C \cos \beta$ , otrzymujemy objętość równoległoscianu

$$V = |(-2\mathbf{1}_x - 10\mathbf{1}_y + 17\mathbf{1}_z) \cdot (\mathbf{C} = \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + 6\mathbf{1}_z)| = |-2 - 10 + 102| = 90.$$

**0.20.** Obliczyć iloczyny skalarne następujących wektorów jednostkowych:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $\mathbf{1}_x \cdot \mathbf{1}_x$    | e) $\mathbf{1}_\rho \cdot \mathbf{1}_r$      | i) $\mathbf{1}_\theta \cdot \mathbf{1}_x$ |
| b) $\mathbf{1}_y \cdot \mathbf{1}_z$    | f) $\mathbf{1}_\phi \cdot \mathbf{1}_x$      | j) $\mathbf{1}_\theta \cdot \mathbf{1}_z$ |
| c) $\mathbf{1}_x \cdot \mathbf{1}_\rho$ | g) $\mathbf{1}_\phi \cdot \mathbf{1}_\theta$ | k) $\mathbf{1}_r \cdot \mathbf{1}_\theta$ |
| d) $\mathbf{1}_y \cdot \mathbf{1}_r$    | h) $\mathbf{1}_z \cdot \mathbf{1}_\rho$      | l) $\mathbf{1}_r \cdot \mathbf{1}_r$      |

**Rozwiązanie:**

a)  $\mathbf{1}_x \cdot \mathbf{1}_x = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$

b)  $\mathbf{1}_y \cdot \mathbf{1}_z = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90 = 0$

c)  $\mathbf{1}_x \cdot \mathbf{1}_\rho = \mathbf{1}_x \cdot (\cos \phi \mathbf{1}_x + \sin \phi \mathbf{1}_y) = \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $\mathbf{1}_y \cdot \mathbf{1}_r = \mathbf{1}_y \cdot (\sin \theta \cos \phi \mathbf{1}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{1}_y + \cos \theta \mathbf{1}_z) = \sin \theta \sin \phi$   
 $= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e)  $\mathbf{1}_\rho \cdot \mathbf{1}_r = \mathbf{1}_\rho \cdot (\sin \theta \mathbf{1}_\rho + \cos \theta \mathbf{1}_z) = \sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

f)  $\mathbf{1}_\phi \cdot \mathbf{1}_x = (-\sin \phi \mathbf{1}_x + \cos \phi \mathbf{1}_y) \cdot \mathbf{1}_x = -\sin \phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g)  $\mathbf{1}_\phi \cdot \mathbf{1}_\theta = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90 = 0$

h)  $\mathbf{1}_z \cdot \mathbf{1}_\rho = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90 = 0$

i)  $\mathbf{1}_\theta \cdot \mathbf{1}_x = (\cos \theta \cos \phi \mathbf{1}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{1}_y - \sin \theta \mathbf{1}_z) \cdot \mathbf{1}_x = \cos \theta \cos \phi$   
 $= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

j)  $\mathbf{1}_\theta \cdot \mathbf{1}_z = (\cos \theta \cos \phi \mathbf{1}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{1}_y - \sin \theta \mathbf{1}_z) \cdot \mathbf{1}_z = -\sin \theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

k)  $\mathbf{1}_r \cdot \mathbf{1}_\theta = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90 = 0$

l)  $\mathbf{1}_r \cdot \mathbf{1}_r = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$

**0.21.** Obliczyć gradient dla następujących funkcji pola skalarnego:

a)  $V = x^2 y + y^2 z + z$

b)  $V = \rho^2 \sin(4\phi) - \rho \cos \phi$

c)  $V = r e^{-r} \sin \theta \cos \phi$

**Rozwiązanie:**

$$\text{a) } \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z = 2xy \mathbf{1}_x + (x^2 + 2yz) \mathbf{1}_y + (y^2 + 1) \mathbf{1}_z$$

$$\text{b) } \nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z = (2\rho \sin(4\phi) - \cos \phi) \mathbf{1}_\rho + (4\rho \cos(4\phi) + \sin \phi) \mathbf{1}_\phi$$

$$\text{c) } \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi = e^{-r} \sin \theta \cos \phi (1-r) \mathbf{1}_r \\ + e^{-r} \cos \theta \cos \phi \mathbf{1}_\theta - e^{-r} \sin \phi \mathbf{1}_\phi$$

**0.22.** Obliczyć dywergencję i rotację dla następujących funkcji pola wektorowego:

$$\text{a) } \mathbf{E} = 2x^2y \mathbf{1}_x + z^2y \mathbf{1}_y + 4 \sin(\pi z) \mathbf{1}_z$$

$$\text{b) } \mathbf{E} = \rho \sin \phi \mathbf{1}_\rho - \frac{\cos(2\phi)}{\rho} \mathbf{1}_\phi + e^z \mathbf{1}_z$$

$$\text{c) } \mathbf{E} = r^2 \sin \phi \mathbf{1}_r + r e^r \sin \theta \mathbf{1}_\theta + r \cos \theta \cos \phi \mathbf{1}_\phi$$

**Rozwiązanie:**

$$\text{a) } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial 2x^2y}{\partial x} + \frac{\partial z^2y}{\partial y} + \frac{\partial 4 \sin(\pi z)}{\partial z} = 4xy + z^2 + 4\pi \cos(\pi z)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z \\ = \left( \frac{\partial 4 \sin(\pi z)}{\partial y} - \frac{\partial z^2y}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial 2x^2y}{\partial z} - \frac{\partial 4 \sin(\pi z)}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial z^2y}{\partial x} - \frac{\partial 2x^2y}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z \\ = -2yz \mathbf{1}_x - 2x^2 \mathbf{1}_z$$

$$\text{b) } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho^2 \sin \phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \cos(2\phi)/\rho}{\partial \phi} + \frac{\partial e^z}{\partial z} \\ = 2 \sin \phi + \frac{2}{\rho^2} \sin(2\phi) + e^z$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{1}_\rho + \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{1}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho E_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{1}_z \\ = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial e^z}{\partial \phi} + \frac{\partial \cos(2\phi)/\rho}{\partial z} \right) \mathbf{1}_\rho + \left( \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial z} - \frac{\partial e^z}{\partial \rho} \right) \mathbf{1}_\phi \\ + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial \cos(2\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{1}_z = -\cos \phi \mathbf{1}_z$$

$$\text{c) } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta E_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^4 \sin \phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r e^r \sin^2 \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r \cos \theta \cos \phi}{\partial \phi} \\ = 4r \sin \phi + 2e^r \cos \theta - \cot \theta \sin \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \sin \theta E_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r E_\phi}{\partial r} \right) \mathbf{1}_\theta \\ + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{1}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial r \sin \theta \cos \theta \cos \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial r e^r \sin \theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{1}_r \\ + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial r^2 \sin \phi}{\partial \phi} - \frac{\partial r^2 \cos \theta \cos \phi}{\partial r} \right) \mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r^2 e^r \sin \theta}{\partial r} - \frac{\partial r^2 \sin \phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{1}_\phi \\ = \cos \phi \cos 2\theta \csc \theta \mathbf{1}_r + \cos \phi (r \csc \theta - 2 \cos \theta) \mathbf{1}_\theta + e^r \sin \theta (2+r) \mathbf{1}_\phi$$

**0.23.** Wyznaczyć iloczyny wektorowe następujących wektorów jednostkowych:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\mathbf{1}_x \times \mathbf{1}_z$    | d) $\mathbf{1}_\theta \times \mathbf{1}_\theta$ |
| b) $\mathbf{1}_y \times \mathbf{1}_\rho$ | e) $\mathbf{1}_r \times \mathbf{1}_z$           |
| c) $\mathbf{1}_z \times \mathbf{1}_\phi$ | f) $\mathbf{1}_\theta \times \mathbf{1}_\rho$   |

**Rozwiązanie:**

- a)  $\mathbf{1}_x \times \mathbf{1}_z = -\mathbf{1}_y$   
 b)  $\mathbf{1}_y \times \mathbf{1}_\rho = \mathbf{1}_y \times (\cos \phi \mathbf{1}_x + \sin \phi \mathbf{1}_y) = -\cos \phi \mathbf{1}_z$   
 c)  $\mathbf{1}_z \times \mathbf{1}_\phi = -\mathbf{1}_\rho$   
 d)  $\mathbf{1}_\theta \times \mathbf{1}_\theta = \mathbf{0}$   
 e)  $\mathbf{1}_r \times \mathbf{1}_z = \mathbf{1}_r \times (\cos \theta \mathbf{1}_r - \sin \theta \mathbf{1}_\theta) = -\sin \theta \mathbf{1}_\phi$   
 f)  $\mathbf{1}_\theta \times \mathbf{1}_\rho = \mathbf{1}_\theta \times (\sin \theta \mathbf{1}_r + \cos \theta \mathbf{1}_\theta) = -\sin \theta \mathbf{1}_\phi$

**0.24.** Dla danych wektorów  $\mathbf{A} = \mathbf{1}_x + 2\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$ ,  $\mathbf{B} = 3\mathbf{1}_x - 4\mathbf{1}_y - 2\mathbf{1}_z$ ,  $\mathbf{C} = -\mathbf{1}_x + 5\mathbf{1}_y - 3\mathbf{1}_z$  i  $\mathbf{D} = -4\mathbf{1}_x - \mathbf{1}_y + 5\mathbf{1}_z$ , sprawdzić następujące tożsamości wektorowe:

- a)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$   
 b)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$   
 c)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$   
 d)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$

**Rozwiązanie:**

- a)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = (4\mathbf{1}_x - 2\mathbf{1}_y - \mathbf{1}_z) \cdot (-5\mathbf{1}_x + 4\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z) = -20 - 8 - 2 = -30$   
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = -1 + 10 - 3 - 4 - 2 + 5 - 3 - 20 + 6 - 12 + 4 - 10 = -30$
- b)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{1}_x + 2\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z) \times (22\mathbf{1}_x + 11\mathbf{1}_y + 11\mathbf{1}_z) = 11\mathbf{1}_x + 11\mathbf{1}_y - 33\mathbf{1}_z$   
 $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (3\mathbf{1}_x - 4\mathbf{1}_y - 2\mathbf{1}_z)(-1 + 10 - 3) - (-\mathbf{1}_x + 5\mathbf{1}_y - 3\mathbf{1}_z)(3 - 8 - 2)$   
 $= 11\mathbf{1}_x + 11\mathbf{1}_y - 33\mathbf{1}_z$
- c)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (5\mathbf{1}_y - 10\mathbf{1}_z) \cdot (22\mathbf{1}_x + 17\mathbf{1}_y + 21\mathbf{1}_z) = 85 - 210 = -125$   
 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (-1 + 10 - 3)(-12 + 4 - 10) - (-4 - 2 + 5)(-3 - 20 + 6)$   
 $= -108 - 17 = -125$
- d)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (5\mathbf{1}_y - 10\mathbf{1}_z) \times (22\mathbf{1}_x + 17\mathbf{1}_y + 21\mathbf{1}_z) = 275\mathbf{1}_x - 220\mathbf{1}_y - 110\mathbf{1}_z$   
 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} = ((5\mathbf{1}_y - 10\mathbf{1}_z) \cdot (-4\mathbf{1}_x - \mathbf{1}_y + 5\mathbf{1}_z))$   
 $(-\mathbf{1}_x + 5\mathbf{1}_y - 3\mathbf{1}_z) - ((5\mathbf{1}_y - 10\mathbf{1}_z) \cdot (-\mathbf{1}_x + 5\mathbf{1}_y - 3\mathbf{1}_z))(-4\mathbf{1}_x - \mathbf{1}_y + 5\mathbf{1}_z)$   
 $= (55\mathbf{1}_x - 275\mathbf{1}_y + 165\mathbf{1}_z) - (-220\mathbf{1}_x - 55\mathbf{1}_y + 275\mathbf{1}_z) = 275\mathbf{1}_x - 220\mathbf{1}_y - 110\mathbf{1}_z$

**0.25.** Dla podanych punktów we współrzędnych kartezjańskich znaleźć współrzędne w układzie cylindrycznym i sferycznym

- a)  $P(1, 1, \sqrt{2})$   
 b)  $P(2, 2, 2\sqrt{2/3})$   
 c)  $P(3, \sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3})$

**Rozwiązanie:** Współrzędne w układzie cylindrycznym i sferycznym można wyznaczyć na podstawie zależności (13) i (16):

$$\begin{aligned} \text{a) } \rho &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, & \phi &= \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\ r &= \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} = 2, & \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie cylindrycznym i sferycznym wynoszą  $P(\rho, \phi, z) = P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$  i  $P(r, \theta, \phi) = P(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \rho &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, & \phi &= \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}, \\ r &= \sqrt{2^2 + 2^2 + (2\sqrt{2/3})^2} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}, & \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arctan \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2/3}} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie cylindrycznym i sferycznym wynoszą  $P(\rho, \phi, z) = P(2\sqrt{2}, \pi/4, 2\sqrt{2/3})$  i  $P(r, \theta, \phi) = P(4\sqrt{2/3}, \pi/3, \pi/4)$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } \rho &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, & \phi &= \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, & z &= 6 + 4\sqrt{3}, \\ r &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2 + (6 + 4\sqrt{3})^2} \cong 13.38, & \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie cylindrycznym i sferycznym wynoszą  $P(\rho, \phi, z) = P(2\sqrt{3}, \pi/6, 6 + 4\sqrt{3})$  i  $P(r, \theta, \phi) = P(13.38, \pi/12, \pi/6)$ .

**0.26.** Dla podanych punktów we współrzędnych cylindrycznych  $P(\rho, \phi, z)$  znaleźć ich współrzędne we współrzędnych kartezjańskich  $P(x, y, z)$  i sferycznych  $P(r, \theta, \phi)$

- a)  $P(3\sqrt{3}, \pi/4, 9)$
- b)  $P(6, \pi, -8)$
- c)  $P(2, \pi/9, 2)$

**Rozwiązanie:** Współrzędne w układzie kartezjańskim i sferycznym można wyznaczyć na podstawie zależności (13) i (19):

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= 3\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}, & y &= 3\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ r &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 9^2} = 6\sqrt{3}, & \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arctan \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie kartezjańskim i sferycznym wynoszą  $P(x, y, z) = P(3\sqrt{3/2}, 3\sqrt{3/2}, 9)$  i  $P(r, \theta, \phi) = P(6\sqrt{3}, \pi/6, \pi/4)$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } x &= 6 \cos \pi = -6, & y &= 6 \sin \pi = 0, \\ r &= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, & \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arctan \left(-\frac{6}{8}\right) \cong 0.795\pi. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie kartezjańskim i sferycznym wynoszą  $P(x, y, z) = P(-6, 0, -8)$  i  $P(r, \theta, \phi) = P(10, 0.795\pi, \pi)$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } x &= 2 \cos \frac{\pi}{9} \cong 1.88, & y &= 2 \sin \frac{\pi}{9} \cong 0.68, \\ r &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, & \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arctan \frac{2}{2} = \pi/4. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie kartezjańskim i sferycznym wynoszą  $P(x, y, z) = P(1.88, 0.68, 2)$  i  $P(r, \theta, \phi) = P(2\sqrt{2}, \pi/4, \pi/9)$ .



**0.27.** Dla podanych punktów we współrzędnych sferycznych  $P(r, \theta, \phi)$  znaleźć ich współrzędne we współrzędnych kartezjańskich  $P(x, y, z)$  i cylindrycznych  $P(\rho, \phi, z)$

a)  $P(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/2)$

b)  $P(4\sqrt{3}, 2\pi/3, 5\pi/6)$

c)  $P(8, \pi/12, 7\pi/4)$

**Rozwiązanie:** Współrzędne w układzie kartezjańskim i cylindrycznym można wyznaczyć na podstawie zależności (16) i (19):

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 0, & y &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 1, \\ z &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1, & \rho &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie kartezjańskim i cylindrycznym wynoszą  $P(x, y, z) = P(0, 1, 1)$  i  $P(\rho, \phi, z) = P(1, \pi/2, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } x &= 4\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} = -3\sqrt{3}, & y &= 4\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} = 3, \\ z &= 4\sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3}, & \rho &= 4\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 6. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie kartezjańskim i cylindrycznym wynoszą  $P(x, y, z) = P(-3\sqrt{3}, 3, -2\sqrt{3})$  i  $P(\rho, \phi, z) = P(6, 5\pi/6, -2\sqrt{3})$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } x &= 8 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{4} \cong 1.46, & y &= 8 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{4} \cong -1.46, \\ z &= 8 \cos \frac{\pi}{12} \cong 7.73, & \rho &= 8 \sin \frac{\pi}{12} \cong 2.07. \end{aligned}$$

Współrzędne punktu w układzie kartezjańskim i cylindrycznym wynoszą  $P(x, y, z) = P(1.46, -1.46, 7.73)$  i  $P(\rho, \phi, z) = P(2.07, 7\pi/4, 7.73)$ .

**0.28.** Dla wektora podanego w układzie kartezjańskim  $\mathbf{A} = y\mathbf{1}_x - x\mathbf{1}_y + 2x\mathbf{1}_z$  wyznaczyć składowe w układzie cylindrycznym w punktach  $P_1(\rho = 1, \phi = \pi/2, z = 1)$  i  $P_2(\rho = 2, \phi = \pi/6, z = 0)$ .

**Rozwiązanie:** Na podstawie zależności (13) możemy zapisać

$$A_x = y = \rho \sin \phi, \quad A_y = -x = -\rho \cos \phi, \quad A_z = 2x = 2\rho \cos \phi.$$

Podstawiając powyższe zależności do (14)

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \sin \phi \\ -\rho \cos \phi \\ 2\rho \cos \phi \end{bmatrix}$$

otrzymujemy

$$\mathbf{A} = (\rho \cos \phi \sin \phi - \rho \cos \phi \sin \phi)\mathbf{1}_\rho - (\rho \sin^2 \phi + \rho \cos^2 \phi)\mathbf{1}_\phi + 2\rho \cos \phi \mathbf{1}_z = -\rho \mathbf{1}_\phi + 2\rho \cos \phi \mathbf{1}_z$$

Podstawiając współrzędne punktów  $P_1$  i  $P_2$  ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(P_1) &= -\mathbf{1}_\phi + 2 \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{1}_z = -\mathbf{1}_\phi \\ \mathbf{A}(P_2) &= -2\mathbf{1}_\phi + 4 \cos \frac{\pi}{6} \mathbf{1}_z = -2\mathbf{1}_\phi + 2\sqrt{3}\mathbf{1}_z \end{aligned}$$

**0.29.** Dla wektora podanego w układzie kartezjańskim  $\mathbf{A} = y\mathbf{1}_x - z\mathbf{1}_y$  wyznaczyć składowe w układzie sferycznym w punktach  $P_1(1, \pi/2, \pi/2)$  i  $P_2(4, \pi/4, \pi/4)$ .

**Rozwiązanie:** Na podstawie zależności (16) możemy zapisać

$$A_x = y = r \sin \theta \sin \phi, \quad A_y = -z = -r \cos \theta, \quad A_z = 0.$$

Podstawiając powyższe zależności do (17)

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \sin \theta \sin \phi \\ -r \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (r \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi - r \sin \theta \cos \theta \sin \phi) \mathbf{1}_r + (r \sin \theta \cos \theta \cos \phi \sin \phi - r \cos^2 \theta \sin \phi) \mathbf{1}_\theta \\ &\quad - (r \sin \theta \sin^2 \phi + r \cos \theta \cos \phi) \mathbf{1}_\phi \end{aligned}$$

Podstawiając współrzędne punktów otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(P_1) &= \left( \sin^2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{1}_r \\ &\quad + \left( \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{1}_\theta - \left( \sin \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{1}_\phi = -\mathbf{1}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(P_2) &= \left( 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - 4 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{1}_r \\ &\quad + \left( 4 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - 4 \cos^2 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{1}_\theta - \left( 4 \sin \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{1}_\phi \\ &= (1 - \sqrt{2}) \mathbf{1}_r + (1 - \sqrt{2}) \mathbf{1}_\theta - (2 + \sqrt{2}) \mathbf{1}_\phi \end{aligned}$$

**0.30.** Dla podanych funkcji pola skalarnego i wektorowego:  $V = x^2 - y^2 + 2z$ ,  $U = 1 + z - y$ ,  $\mathbf{A} = xy\mathbf{1}_x + 2yz\mathbf{1}_y - xz\mathbf{1}_z$  i  $\mathbf{B} = (x+y)\mathbf{1}_x + z^2\mathbf{1}_y + y^2\mathbf{1}_z$  sprawdzić następujące tożsamości analizy wektorowej:

- $\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0}$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- $\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U$
- $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V\nabla \cdot \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

**Rozwiązanie:**

a) zgodnie z (27)

$$\nabla V = \frac{\partial(x^2 - y^2 + 2z)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial(x^2 - y^2 + 2z)}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial(x^2 - y^2 + 2z)}{\partial z} \mathbf{1}_z = 2x\mathbf{1}_x - 2y\mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z$$

Podstawiając powyższy wynik do równania (42) otrzymujemy

$$\nabla \times (\nabla V) = \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathbf{1}_y - \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right) \mathbf{1}_z = \mathbf{0}$$

b) na podstawie (42)

$$\nabla \times \mathbf{A} = - \left( \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial 2yz}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial xy}{\partial z} + \frac{\partial xz}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial 2yz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = -2y\mathbf{1}_x + z\mathbf{1}_y - x\mathbf{1}_z$$

zatem zgodnie z (32)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial 2y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

c) ponieważ

$$UV = (1 + z - y)(x^2 - y^2 + 2z) = x^2 - y^2 + 2z + x^2z - y^2z + 2z^2 - x^2y + y^3 - 2yz$$

zatem

$$\begin{aligned}\nabla(UV) &= \frac{\partial UV}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial UV}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial UV}{\partial z} \mathbf{1}_z \\ &= 2x(1-y+z) \mathbf{1}_x - (2y(1+z) + x^2 - 3y^2 + 2z) \mathbf{1}_y + (2 + x^2 - y^2 + 4z - 2y) \mathbf{1}_z\end{aligned}$$

Korzystając z wyniku otrzymanego w pierwszym podpunkcie, możemy zapisać

$$U\nabla V = 2x(1-y+z) \mathbf{1}_x - 2y(1-y+z) \mathbf{1}_y + 2(1-y+z) \mathbf{1}_z$$

Po obliczeniu gradientu funkcji  $U$

$$\nabla U = \frac{\partial(1-y+z)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial(1-y+z)}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial(1-y+z)}{\partial z} \mathbf{1}_z = -\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$$

wyznaczamy

$$V\nabla U = -(x^2 - y^2 + 2z) \mathbf{1}_y + (x^2 - y^2 + 2z) \mathbf{1}_z$$

Sumując wyniki cząstkowe, otrzymujemy

$$U\nabla V + V\nabla U = 2x(1-y+z) \mathbf{1}_x - (2y(1+z) + x^2 - 3y^2 + 2z) \mathbf{1}_y + (2 + x^2 - y^2 + 4z - 2y) \mathbf{1}_z$$

d)

$$\begin{aligned}V\mathbf{A} &= (x^2 - y^2 + 2z)(xy \mathbf{1}_x + 2yz \mathbf{1}_y - xz \mathbf{1}_z) = (x^3y - xy^3 + 2xyz) \mathbf{1}_x \\ &\quad + (2x^2yz - 2y^3z + 4yz^2) \mathbf{1}_y - (x^3z - xy^2z + 2xz^2) \mathbf{1}_z\end{aligned}$$

korzystając z zależności (32)

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = 3x^2y - y^3 + 2yz + 2x^2z - 6y^2z + 4z^2 - x^3 + xy^2 - 4xz$$

Na podstawie wcześniej otrzymanych wyników

$$\mathbf{A} \cdot \nabla V = 2x^2y - 4y^2z - 2xz$$

Dywergencja funkcji pola wektorowego  $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = y + 2z - x$$

zatem

$$V\nabla \cdot \mathbf{A} = (x^2 - y^2 + 2z)(y + 2z - x) = x^2y + 2x^2z - x^3 - y^3 - 2y^2z + xy^2 + 2yz + 4z^2 - 2xz$$

Sumując wyniki cząstkowe, otrzymujemy

$$\mathbf{A} \cdot \nabla V + V\nabla \cdot \mathbf{A} = 3x^2y + 2x^2z - x^3 - y^3 - 6y^2z + xy^2 + 2yz + 4z^2 - 4xz$$

e) na podstawie (9) wyznaczamy

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2y^3z + xz^3) \mathbf{1}_x - (x^2z + xyz + xy^3) \mathbf{1}_y + (xyz^2 - 2xyz - 2y^2z) \mathbf{1}_z$$

zatem

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = z^3 - xz - 3xy^2 + 2xyz - 2xy - 2y^2$$

Na podstawie (9)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left( \frac{\partial y^2}{\partial y} - \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial(x+y)}{\partial z} - \frac{\partial y^2}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = 2(y-z) \mathbf{1}_x - \mathbf{1}_z$$

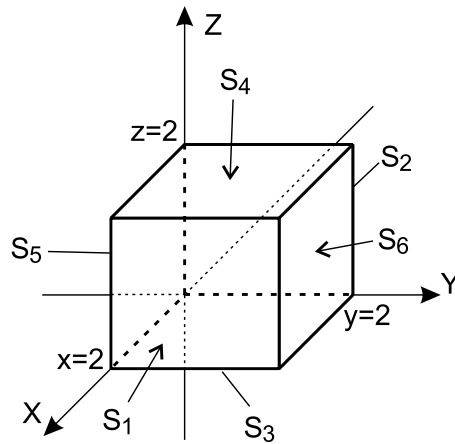
i wcześniej otrzymanych wyników możemy zapisać

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = -2y(x+y) + z^3 - xy^2$$

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 2xy(y-z) + xz$$

Łącząc wyniki cząstkowe, otrzymujemy

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = z^3 - xz - 3xy^2 + 2xyz - 2xy - 2y^2$$



Rys. 16: Oznaczenia ścian sześcianu z Zad. 0.32

**0.31.** Udowodnić następujące tożsamości:

- a)  $\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0}$   
 b)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

**Rozwiązanie:**

a) na podstawie (41)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \left( h_1 h_3 \frac{\partial A_3}{\partial q_2} - h_1 h_2 \frac{\partial A_2}{\partial q_3} \right) \mathbf{1}_1 + \left( h_1 h_2 \frac{\partial A_1}{\partial q_3} - h_2 h_3 \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \right) \mathbf{1}_2 + \left( h_2 h_3 \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - h_1 h_3 \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{1}_3 \right]$$

po podstawieniu (26)

$$\nabla \times (\nabla V) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_1 \left( \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial V}{\partial q_3} - \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \mathbf{1}_1 + h_2 \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_3} - \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \mathbf{1}_2 + h_3 \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) \mathbf{1}_3 \right] = \mathbf{0}$$

b) po przekształceniu wyrażenia  $\nabla \times \mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial A_3}{\partial q_2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial A_2}{\partial q_3} \right) \mathbf{1}_1 + \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \right) \mathbf{1}_2 + \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{1}_3$$

po podstawieniu powyższej zależności do (31)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] = 0$$

**0.32.** Stwierdzić poprawność twierdzenia Gaussa dla pola wektorowego  $\mathbf{E} = xy\mathbf{1}_x + yz\mathbf{1}_y + xz\mathbf{1}_z$  przenikającego przez sześcian przedstawiony na Rys. 16.

**Rozwiązanie:** Wyznaczanie strumienia pola dla wszystkich ścian sześcianu:

- ściana przednia  $S_1$ ,  $x = 2$ ,  $ds = dydz\mathbf{1}_x$

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot ds = \int_0^2 \int_0^2 2y dy dz = 4 \int_0^2 y dy = 8$$

- ściana tylna  $S_2$ ,  $x = 0$ ,  $ds = -dydz\mathbf{1}_x$

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot ds = 0$$

- ściana dolna  $S_3$ ,  $z = 0$ ,  $ds = -dxdy\mathbf{1}_z$

$$\int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- ściana górna  $S_4$ ,  $z = 2$ ,  $ds = dxdy\mathbf{1}_z$

$$\int_{S_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 \int_0^2 2xdxdy = 4 \int_0^2 xdx = 8$$

- ściana lewa  $S_5$ ,  $y = 0$ ,  $ds = -dxdz\mathbf{1}_y$

$$\int_{S_5} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- ściana prawa  $S_6$ ,  $y = 2$ ,  $ds = dxdz\mathbf{1}_y$

$$\int_{S_6} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 \int_0^2 2zdxdz = 4 \int_0^2 zdz = 8$$

Sumując wyniki cząstkowe

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 24$$

Dywergencja funkcji pola wektorowego  $\mathbf{E}$  (32)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial yz}{\partial y} + \frac{\partial xz}{\partial z} = x + y + z$$

zatem

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (x + y + z)dxdydz = 24$$

**0.33.** Zweryfikować poprawność twierdzenia Gaussa dla pola wektorowego  $\mathbf{E} = \sin \theta/r\mathbf{1}_r$  przenikającego przez powierzchnię sferyczną o promieniu 3 umieszczonej w początku układu współrzędnych.

**Rozwiązanie:** Dla powierzchni sferycznej  $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{1}_r$ , gdzie  $r = 3$ , zatem

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin^2 \theta d\theta d\phi = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta d\phi \\ &= \frac{3}{2} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta d\phi \right) = 3\pi^2 \end{aligned}$$

Dywergencja funkcji pola wektorowego  $\mathbf{E}$  w sferycznym układzie współrzędnych (34)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{r^2}$$

przyjmując dla układu sferycznego  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  możemy zapisać

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^3 \sin^2 \theta dr d\theta d\phi = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta d\phi$$

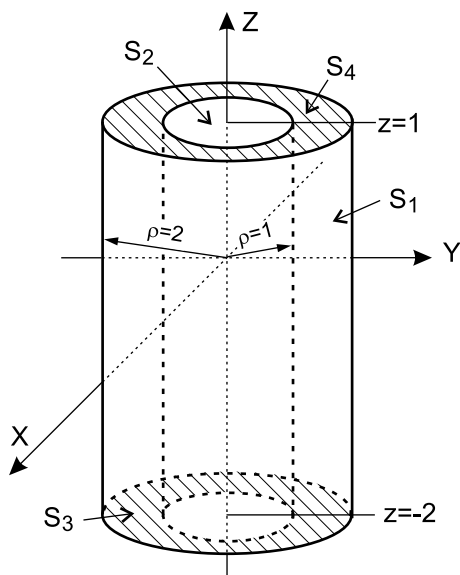
co sprowadza się do wyznaczenia identycznej całki jak przy obliczaniu strumienia pola  $\mathbf{E}$ , zatem  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 3\pi^2$ .

**0.34.** Zweryfikować poprawność twierdzenia Gaussa dla pola wektorowego  $\mathbf{E} = \sin(\phi/2)/\rho^2 \mathbf{1}_\rho + z\mathbf{1}_z$  przenikającego bryłę przedstawioną na Rys. 17

**Rozwiązanie:** Wyznaczanie strumienia pola wektorowego  $\mathbf{E}$  dla wszystkich powierzchni geometrii przedstawionej na Rys. 17:

- zewnętrzna, boczna powierzchnia walca  $S_1$ ,  $\rho = 2$ ,  $ds = \rho d\phi dz \mathbf{1}_\rho$

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\rho^2} \rho d\phi dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \sin \frac{\phi}{2} d\phi dz = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{\phi}{2} d\phi = 6$$



Rys. 17: Geometria analizowana w Zad. 0.34

- wewnętrzna, boczna powierzchnia walca  $S_2$ ,  $\rho = 1$ ,  $ds = -\rho d\phi dz \mathbf{1}_\rho$

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot ds &= - \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\rho^2} \rho d\phi dz = - \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \sin \frac{\phi}{2} d\phi dz \\ &= -3 \int_0^{2\pi} \sin \frac{\phi}{2} d\phi = -12 \end{aligned}$$

- dolna powierzchnia  $S_3$ ,  $z = -2$ ,  $ds = -\rho d\rho d\phi \mathbf{1}_z$

$$\int_{S_3} \mathbf{E} \cdot ds = - \int_0^{2\pi} \int_1^2 z \rho d\rho d\phi = 2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho d\rho d\phi = 6\pi$$

- górna powierzchnia  $S_4$ ,  $z = 1$ ,  $ds = \rho d\rho d\phi \mathbf{1}_z$

$$\int_{S_4} \mathbf{E} \cdot ds = \int_0^{2\pi} \int_1^2 z \rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho d\rho d\phi = 3\pi$$

Sumując wyniki cząstkowe  $\int_S \mathbf{E} \cdot ds = 9\pi - 6$ . Dywergencja pola wektorowego w cylindrycznym układzie współrzędnych (33)

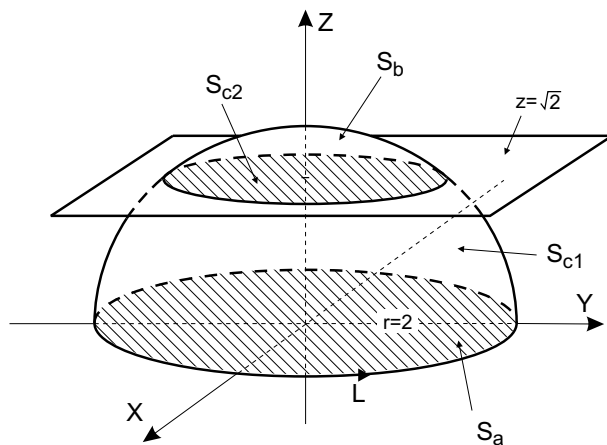
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sin(\phi/2)/\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial z} = -\frac{\sin(\phi/2)}{\rho^3} + 1$$

dla układu cylindrycznego  $dV = \rho d\rho d\phi dz$ , zatem

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} &= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \int_1^2 \left( -\frac{\sin(\phi/2)}{\rho^3} + 1 \right) \rho d\rho dz d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \int_1^2 \rho d\rho dz d\phi - \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \int_1^2 \frac{\sin(\phi/2)}{\rho^2} d\rho dz d\phi \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 dz d\phi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-2}^1 \sin(\phi/2) dz d\phi = 3 \int_0^{2\pi} d\phi - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin(\phi/2) d\phi = 9\pi - 6. \end{aligned}$$

**0.35.** Zweryfikować poprawność twierdzenia Stokesa dla konturu kołowego  $L$  o promieniu  $r = 2$  leżącego w płaszczyźnie  $xy$  (Rys. 18) znajdującego się w polu wektorowym  $\mathbf{A} = z^2 \mathbf{1}_\rho + \rho \mathbf{1}_\phi - \cos \phi \mathbf{1}_z$ . Obliczenia wykonać dla trzech powierzchni (patrz Rys. 18)

- powierzchni kołowej położonej w płaszczyźnie  $xy$ ,
- powierzchni półkolistej ograniczonej krzywą  $L$ ,
- powierzchni półkolistej ograniczonej krzywą  $L$  i płaszczyzną  $z = \sqrt{2}$ .



Rys. 18: Geometria analizowana w Zad. 0.35

**Rozwiązanie:** Zadany kontur kołowy  $L$  leży w płaszczyźnie  $xz$ , zatem  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \mathbf{1}_\phi$ , natomiast  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \rho^2 d\phi$ . Dla  $\rho = 2$  zapiszemy

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \rho^2 d\phi = 2\pi\rho^2 = 8\pi.$$

Rotacja wektora  $\mathbf{A}$  (43)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\cos\phi)}{\partial\phi} - \frac{\partial\rho}{\partial z} \right) \mathbf{1}_\rho + \left( \frac{\partial z^2}{\partial z} - \frac{\partial(-\cos\phi)}{\partial\rho} \right) \mathbf{1}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial\rho^2}{\partial\phi} - \frac{\partial z^2}{\partial\phi} \right) \mathbf{1}_z \\ &= \frac{1}{\rho} \sin\phi \mathbf{1}_\rho + 2z \mathbf{1}_\phi + 2 \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

a) dla kołowej powierzchni leżącej w płaszczyźnie  $xy$   $ds = \rho d\rho d\phi \mathbf{1}_z$  zatem

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2\rho d\rho d\phi = 8\pi.$$

b) dla powierzchni półkolistej całkę powierzchniową najwygodniej policzyć w sferycznym układzie współrzędnych, gdzie  $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{1}_r$ . Na podstawie (21)  $\nabla \times \mathbf{A}$  zapisujemy w układzie sferycznym

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\sin\phi}{r} + 2\cos\theta \right) \mathbf{1}_r + \left( \frac{\sin\phi}{r \tan\theta} - 2\sin\theta \right) \mathbf{1}_\theta + 2r \cos\theta \mathbf{1}_\phi$$

zatem dla  $r = 2$

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin\phi}{r} + 2\cos\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 8 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin\phi d\theta d\phi = 4 \int_0^{2\pi} d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 8\pi. \end{aligned}$$

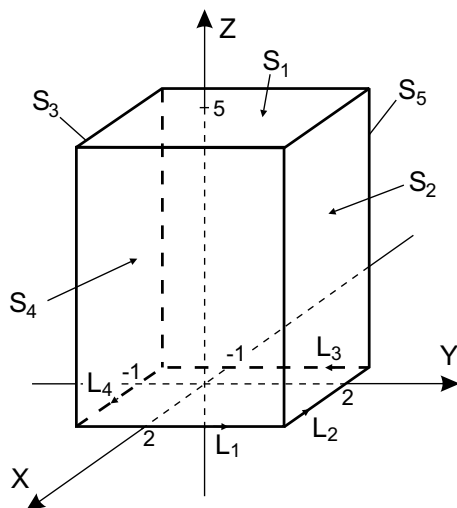
c) dla powierzchni półkolistej ograniczonej dodatkowo płaszczyzną  $z = \sqrt{2}$  należy obliczyć strumień rotacji wektora  $\mathbf{A}$  dla dwóch powierzchni  $S_{c1}$  i  $S_{c2}$ . Strumień pola dla powierzchni bocznej  $S_{c1}$  można wyznaczyć w układzie sferycznym dla kąta  $\theta$  zmieniającego się w granicach od  $\pi/4$  do  $\pi/2$ . Korzystając z wyników cząstkowych otrzymanych w punkcie drugim możemy zapisać

$$\begin{aligned} \int_{S_{c1}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( \frac{\sin\phi}{r} + 2\cos\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 8 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \sin\phi d\theta d\phi = 2 \int_0^{2\pi} d\phi + \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 4\pi. \end{aligned}$$

Strumień pola dla powierzchni  $S_{c2}$ , podobnie jak w punkcie a, wyznaczamy w układzie cylindrycznym dla  $\rho = \sqrt{2}$

$$\int_{S_{c2}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho d\rho d\phi = 4\pi.$$

Sumując wyniki cząstkowe dla  $S_{c1}$  i  $S_{c2}$  ponownie otrzymujemy wynik  $8\pi$ .



Rys. 19: Geometria analizowana w Zad. 0.36

**0.36.** Zweryfikować poprawność twierdzenia Stokesa dla prostokątnego konturu  $L$  (Rys. 19) w polu wektorowym  $\mathbf{A} = (z^2 - xy)\mathbf{1}_x + (x + y)\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$ . Obliczenia wykonać dla: a) płaskiej powierzchni leżącej w płaszczyźnie  $xy$ , b) prostopadłościanu ograniczonego przez kontur  $L$  (patrz Rys. 19).

**Rozwiązanie:** Obliczanie cyrkulacji pola  $\mathbf{A}$  dla poszczególnych krawędzi konturu  $L$ :

- krawędź  $L_1$ ,  $d\mathbf{l} = dy\mathbf{1}_y$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = x + y$ ,  $x = 2$

$$\int_{L_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-1}^2 (2 + y)dy = \left(2y + \frac{1}{2}y^2\right) \Big|_{-1}^2 = 7.5.$$

- krawędź  $L_2$ ,  $d\mathbf{l} = dx\mathbf{1}_x$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = z^2 - xy$ ,  $y = 2$ ,  $z = 0$

$$\int_{L_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_2^{-1} (-2x)dx = (-x) \Big|_2^{-1} = 3.$$

- krawędź  $L_3$ ,  $d\mathbf{l} = dy\mathbf{1}_y$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = x + y$ ,  $x = -1$

$$\int_{L_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_2^{-1} (-1 + y)dy = \left(-y + \frac{1}{2}y^2\right) \Big|_2^{-1} = 1.5.$$

- krawędź  $L_4$ ,  $d\mathbf{l} = dx\mathbf{1}_x$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = z^2 - xy$ ,  $y = -1$ ,  $z = 0$

$$\int_{L_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-1}^2 xdx = \left(\frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-1}^2 = 1.5.$$

Sumując wyniki cząstkowe otrzymujemy  $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 13.5$ .

Rotacja pola wektorowego  $\mathbf{A}$  (42)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial(x+y)}{\partial z}\right)\mathbf{1}_x + \left(\frac{\partial(z^2 - xy)}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{1}_y + \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2 - xy)}{\partial y}\right)\mathbf{1}_z \\ &= 2z\mathbf{1}_y + (x+1)\mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

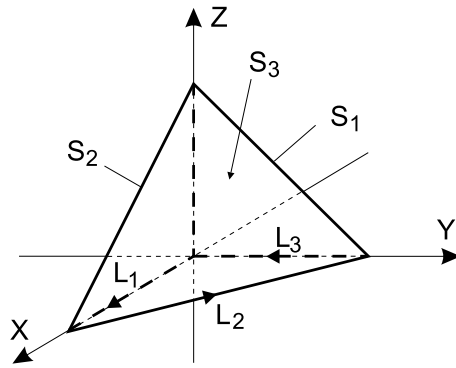
a) dla płaskiej powierzchni kwadratowej w płaszczyźnie  $xy$   $ds = dxdy\mathbf{1}_z$  zatem

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot ds = \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (1+x)dxdy = \int_{-1}^2 \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-1}^2 dy = \frac{9}{2} \int_{-1}^2 dy = \frac{9}{2}y \Big|_{-1}^2 = 13.5.$$

b) strumień rotacji wektora  $\mathbf{A}$  dla poszczególnych ścian prostopadłościanu ograniczonego konturem  $L$ :

- ściana  $S_1$ ,  $ds = dxdy\mathbf{1}_z$ , wymagane jest obliczenie identycznej całki jak w poprzednim punkcie, zatem





Rys. 20: Geometria analizowana w Zad. 0.37

$$\int_{S_1} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 13.5,$$

- powierzchnia  $S_2$ ,  $d\mathbf{s} = dx dz \mathbf{1}_y$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2z dx dz$

$$\int_{S_2} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2 \int_0^5 \int_{-1}^2 z dx dz = 2 \int_0^5 zx \Big|_{x=-1}^{x=2} dz = 6 \int_0^5 z dz = 3z \Big|_0^5 = 75,$$

- powierzchnia  $S_3$ ,  $d\mathbf{s} = -dx dz \mathbf{1}_y$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -2z dx dz$ . Obliczanie strumienia dla  $S_3$  sprowadza się do wyznaczenia identycznej całki jak dla  $S_2$ , zatem

$$\int_{S_3} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -75,$$

- dla powierzchni  $S_4$  i  $S_5$ ,  $d\mathbf{s}$  wynosi, odpowiednio,  $dy dz \mathbf{1}_x$  i  $-dy dz \mathbf{1}_x$ , zatem  $\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Oznacza to, że

$$\int_{S_4} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_5} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Sumując wyniki cząstkowe ponownie otrzymujemy  $\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 13.5$ .

**0.37.** Zweryfikować twierdzenie Stokesa dla trójkątnego konturu  $L$  w polu wektorowym  $\mathbf{A} = (2x + y + z)\mathbf{1}_x$  dla: a) płaskiej powierzchni trójkątnej leżącej w płaszczyźnie  $xy$ , b) czworościanu ograniczonego konturem  $L$  (patrz Rys. 20).

**Rozwiązanie:** Cyrkulacja pola wektorowego  $\mathbf{A}$ :

- krawędź  $L_1$ ,  $d\mathbf{l} = dx \mathbf{1}_x$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2x dx$

$$\int_{L_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^3 2x dx = x^2 \Big|_0^3 = 9,$$

- krawędź  $L_2$  rozpięta jest pomiędzy punktami  $P_1(3, 0, 0)$  i  $P_2(0, 3, 0)$  i leży na prostej  $y = 3 - x$ . Dla  $d\mathbf{l} = dx \mathbf{1}_x + dy \mathbf{1}_y$ , możemy zapisać  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (2x + y + z) dx$ . Podstawiając  $y = 3 - x$  i  $z = 0$  otrzymujemy

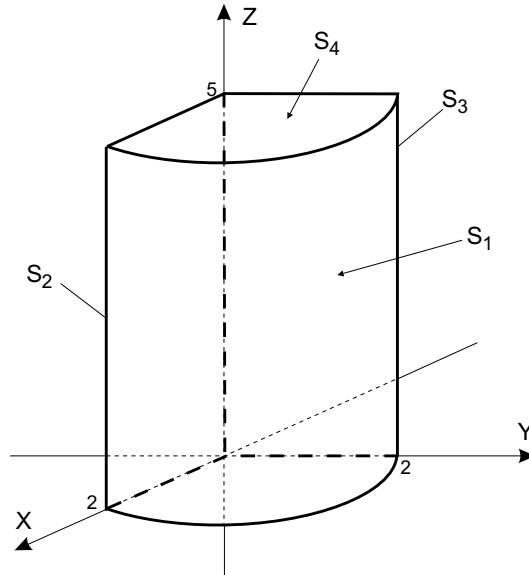
$$\int_{L_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_3^0 (x + 3) dx = \left( \frac{1}{2} x^2 + 3x \right) \Big|_3^0 = -13.5,$$

- dla krawędzi  $L_3$ ,  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{1}_y$  i  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , zatem  $\int_{L_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Sumując wyniki cząstkowe  $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -4.5$ . Rotacja pola wektorowego  $\mathbf{A}$  (42)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial (2x + y + z)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (2x + y + z)}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = \mathbf{1}_y - \mathbf{1}_z.$$

a) dla powierzchni trójkątnej w płaszczyźnie  $xy$   $d\mathbf{s} = dx dy \mathbf{1}_z$ , zatem  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = -dx dy$ . Najpierw całkujemy względem zmiennej  $y$ , a następnie względem zmiennej  $x$ . Drugie całkowanie odbywa się w granicach stałych natomiast całkowanie pierwsze w granicach zmiennych. Wymaga to wyznaczenia



Rys. 21: Geometria analizowana w Zad. 0.38

równania krzywej ograniczającej obszar całkowania. W tym przypadku jest to prosta przechodząca przez punkty  $P_1(3, 0, 0)$  i  $P_2(0, 3, 0)$ , dana równaniem  $y = 3 - x$ , zatem

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^3 \int_0^{3-x} dx dy = \int_0^3 (x - 3) dx = \left( \frac{1}{2} x^2 - 3x \right) \Big|_0^3 = -4.5.$$

b) strumień rotacji wektora  $\mathbf{A}$  dla poszczególnych powierzchni bocznych czworościanu ograniczonego krzywą  $L$

- dla  $S_1$   $d\mathbf{s} = -dydz\mathbf{1}_x$ , zatem  $\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0$ , zatem

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

- dla  $S_2$   $d\mathbf{s} = -dydz\mathbf{1}_y$ ,  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = -dx dz\mathbf{1}_z$ , zatem dla krzywej ograniczającej obszar całkowania  $z = 3 - x$

$$\int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^3 \int_0^{3-x} dx dz = \int_0^3 (x - 3) dx = \left( \frac{1}{2} x^2 - 3x \right) \Big|_0^3 = -4.5,$$

- dla  $S_3$   $d\mathbf{s} = dydz\mathbf{1}_x + dydz\mathbf{1}_y + dx dy\mathbf{1}_z$ ,  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = dx dz\mathbf{1}_y - dx dz\mathbf{1}_z$

$$\int_{S_3} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 \int_0^{3-x} dx dz - \int_0^3 \int_0^{3-x} dx dy = 4.5 - 4.5 = 0.$$

Sumując wyniki cząstkowe otrzymujemy  $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = -4.5$ .

**0.38.** Zweryfikować twierdzenie Stokesa dla konturu  $L$  (patrz Rys. 21) umieszczonego w polu wektorowym  $\mathbf{A} = (y + 1)\mathbf{1}_x - (x + 1)\mathbf{1}_y + 3z\mathbf{1}_z$ . Obliczenia wykonać dla powierzchni walca rozpiętego na konturze  $L$ , ograniczonej płaszczyznami  $xz$  i  $yz$ .

**Rozwiązanie:** Ze względu na kształt konturu, część obliczeń wygodniej będzie wykonać we współrzędnych cylindrycznych. Należy zatem zapisać pole wektorowe  $\mathbf{A}$  we współrzędnych cylindrycznych. Na podstawie (14) i (13) możemy zapisać

$$\mathbf{A} = (\cos \phi - \sin \phi)\mathbf{1}_\rho - (\rho + \cos \phi + \sin \phi)\mathbf{1}_\phi + 3z\mathbf{1}_z.$$

Obliczenia cyrkulacji wektora  $\mathbf{A}$  po konturze  $L$

- prosta  $L_1$ ,  $d\mathbf{l} = dx\mathbf{1}_x$ ,  $y = 0$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dx$

$$\int_{L_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 dx = 2,$$

- koł owa część konturu  $L_2$ ,  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \mathbf{1}_\phi$ ,  $\rho = 2$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -2(2 + \cos \phi + \sin \phi)d\phi$

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= -2 \int_0^{\pi/2} (2 + \cos \phi + \sin \phi) d\phi \\ &= -2 \left( \phi \Big|_0^{\pi/2} - \cos \phi \Big|_0^{\pi/2} + \sin \phi \Big|_0^{\pi/2} \right) = -2\pi - 4, \end{aligned}$$

- prosta  $L_3$ ,  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{1}_y$ ,  $x = 0$ ,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy$

$$\int_{L_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \int_2^0 dy = 2,$$

Sumując wyniki cząstkowe otrzymujemy  $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -2\pi$ . Rotacja pola wektorowego  $\mathbf{A}$  (42)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial 3z}{\partial y} + \frac{\partial(x+1)}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial(y+1)}{\partial z} - \frac{\partial 3z}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y \\ &\quad - \left( \frac{\partial(x+1)}{\partial x} + \frac{\partial(y+1)}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = -2\mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

Strumień rotacji dla poszczególnych powierzchni:

- dla powierzchni bocznej  $S_1$ ,  $ds = \rho d\phi dz \mathbf{1}_\rho$  i  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = 0$ , zatem

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = 0,$$

- dla powierzchni bocznych  $S_2$  i  $S_3$  leżących w płaszczyznach  $xz$  i  $xz$   $ds$  wynosi, odpowiednio,  $-dx dz \mathbf{1}_y$  i  $-dy dz \mathbf{1}_x$ . Również w tym przypadku iloczyny skalarne wektora rotacji pola  $\mathbf{A}$  i odpowiednich elementów powierzchni  $ds$  wynoszą 0, zatem

$$\int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = \int_{S_3} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = 0,$$

- dla powierzchni górnej  $S_4$ ,  $ds = \rho d\rho d\phi \mathbf{1}_z$ ,  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = -2\rho d\rho d\phi$

$$\int_{S_4} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = -2 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho d\rho d\phi = -4 \int_0^{\pi/2} d\phi = -2\pi.$$

Zatem również w tym przypadku otrzymano  $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = -2\pi$ .

**0.39.** Dla podanej funkcji skalarnej  $U = x^3 y z^2$  i wektorowej  $\mathbf{A} = x^2 y^2 z^2 \mathbf{1}_x + x y^2 z^2 \mathbf{1}_y + x^4 y z^2 \mathbf{1}_z$  obliczyć:

- $\Delta U$ ,
- $\Delta \mathbf{A}$ ,
- $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ .

**Rozwiązanie:**

a)  $\Delta$  ( $\nabla \nabla$  lub  $\nabla^2$ ) jest operatorem Laplace'a zdefiniowanym następująco:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

zatem

$$\Delta U = \frac{\partial^2(x^3 y z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^3 y z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^3 y z^2)}{\partial z^2} = 6x y z^2 + 2x^3 y.$$

b) operator Laplace'a dla wektora zdefiniowany jest jak następuje

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= \Delta A_x \mathbf{1}_x + \Delta A_y \mathbf{1}_y + \Delta A_z \mathbf{1}_z = \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_x \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_y + \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_z, \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial^2(x^2y^2z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2y^2z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2y^2z^2)}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_x \\ &+ \left( \frac{\partial^2(xy^2z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(xy^2z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(xy^2z^2)}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_y \\ &+ \left( \frac{\partial^2(x^4yz^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^4yz^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^4yz^2)}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_z \\ &= (2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2) \mathbf{1}_x + (2xz^2 + 2xy^2) \mathbf{1}_y + (12x^2yz^2 + 2x^4y) \mathbf{1}_z.\end{aligned}$$

c) obliczanie gradientu dywergencji wektora  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial(x^2y^2z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^4yz^2)}{\partial z} \\ &= 2xy^2z^2 + 2xyz^2 + 2x^4yz = 2xyz(x^3 + yz + z),\end{aligned}$$

natomiast

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \frac{\partial(2xyz(x^3 + yz + z))}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial(2xyz(x^3 + yz + z))}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial(2xyz(x^3 + yz + z))}{\partial z} \mathbf{1}_z \\ &= 2yz(4x^3 + yz + z) \mathbf{1}_x + 2xz(x^3 + 2yz + z) \mathbf{1}_y + 2xy(x^3 + 2yz + 2z) \mathbf{1}_z\end{aligned}$$

**0.40.** Dla podanego wektora  $\mathbf{A} = x^2y^2\mathbf{1}_x + y^2z^2\mathbf{1}_y + x^2z^2\mathbf{1}_z$  sprawdzić tożsamość wektorową  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ .

**Rozwiązanie:** Zgodnie z (42)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2z^2)}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial(x^2y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y \\ &+ \left( \frac{\partial(y^2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y^2)}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = -2y^2z\mathbf{1}_x - 2xz^2\mathbf{1}_y - 2x^2y\mathbf{1}_z\end{aligned}$$

natomiast

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \left( \frac{\partial(-2x^2y)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz^2)}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial(-2y^2z)}{\partial z} - \frac{\partial(-2x^2y)}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y \\ &+ \left( \frac{\partial(-2xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-2y^2z)}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = 2x(2z - x)\mathbf{1}_x + 2y(2x - y)\mathbf{1}_y + 2z(2y - z)\mathbf{1}_z.\end{aligned}$$

Gradient dywergencji wektora  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial(x^2y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial z} = 2xy^2 + 2yz^2 + 2x^2z, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \frac{\partial(2xy^2 + 2yz^2 + 2x^2z)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial(2xy^2 + 2yz^2 + 2x^2z)}{\partial y} \mathbf{1}_y \\ &+ \frac{\partial(2xy^2 + 2yz^2 + 2x^2z)}{\partial z} \mathbf{1}_z = (2y^2 + 4xz)\mathbf{1}_x + (2z^2 + 4xy)\mathbf{1}_y + (2x^2 + 4yz)\mathbf{1}_z,\end{aligned}$$

natomiast

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial^2(x^2y^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2y^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2y^2)}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial^2(y^2z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(y^2z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(y^2z^2)}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_y \\ &+ \left( \frac{\partial^2(x^2z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2z^2)}{\partial z^2} \right) \mathbf{1}_z = 2(x^2 + y^2)\mathbf{1}_x + 2(y^2 + z^2)\mathbf{1}_y + 2(x^2 + z^2)\mathbf{1}_z.\end{aligned}$$

Sumując wyniki cząstkowe otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} &= (2y^2 + 4xz - 2x^2 - 2y^2)\mathbf{1}_x + (2z^2 + 4xy - 2y^2 - 2z^2)\mathbf{1}_y \\ &+ (2x^2 + 4yz - 2x^2 - 2z^2)\mathbf{1}_z = 2x(2z - x)\mathbf{1}_x + 2y(2x - y)\mathbf{1}_y + 2z(2y - z)\mathbf{1}_z.\end{aligned}$$

**0.41.** Dla wektora położenia  $\mathbf{R} = r\mathbf{1}_r$  wykonać następujące działania w układzie kartezjańskim i sferycznym: a)  $\nabla \cdot \mathbf{R}$ ; b)  $\nabla r$ ; c)  $\nabla r^2$ ; d)  $\nabla 1/r$ .

**Rozwiązanie:** Na podstawie zależności (17) i (16)

$$\mathbf{R} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

a) układ sferyczny (34)

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3,$$

układ kartezjański (32)

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

b) układ sferyczny (29)

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial r} \mathbf{1}_r = \mathbf{1}_r,$$

układ kartezjański (27)

$$\begin{aligned} \nabla r &= \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} \mathbf{1}_z \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{1}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{1}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

c) układ sferyczny (29)

$$\nabla r^2 = \frac{\partial r^2}{\partial r} \mathbf{1}_r = 2r\mathbf{1}_r,$$

układ kartezjański (27)

$$\nabla r^2 = \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z} \mathbf{1}_z = 2x\mathbf{1}_x + 2y\mathbf{1}_y + 2z\mathbf{1}_z.$$

d) układ sferyczny (29)

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial (r^{-1})}{\partial r} \mathbf{1}_r = -\frac{1}{r^2} \mathbf{1}_r,$$

układ kartezjański (27)

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{r} &= \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} \mathbf{1}_z \\ &= -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{1}_x - \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{1}_y - \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

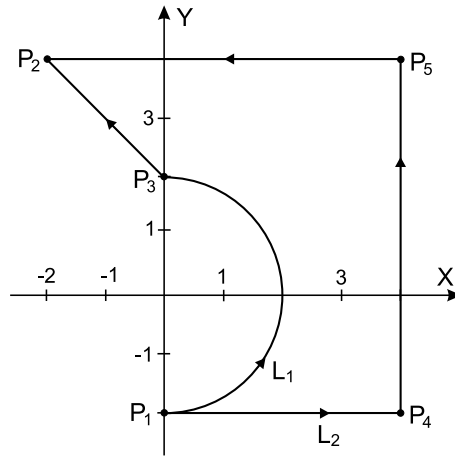
**0.42.** Wyznaczyć całkę krzywoliniową gradientu funkcji skalarnej  $f = \rho(\sin \phi + \cos \phi)$  dla dwóch konturów rozpiętych pomiędzy punktami  $P_1$  i  $P_2$  (Rys. 22). Zweryfikować zależność  $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(b) - f(a)$ .

**Rozwiązanie:** Na podstawie (13) można zapisać  $f = x + y$ . Gradient funkcji skalarnej w układzie kartezjańskim (27)

$$\nabla f = \frac{\partial (x + y)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial (x + y)}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial (x + y)}{\partial z} \mathbf{1}_z = \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y,$$

korzystając z definicji gradientu w układzie cylindrycznym (28)

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial \rho(\sin \phi + \cos \phi)}{\partial \rho} \mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(\sin \phi + \cos \phi)}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi + \frac{\partial \rho(\sin \phi + \cos \phi)}{\partial z} \mathbf{1}_z \\ &= (\sin \phi + \cos \phi) \mathbf{1}_\rho + (\cos \phi - \sin \phi) \mathbf{1}_\phi \end{aligned}$$



Rys. 22: Geometria analizowana w Zad. 0.42

Całkę krzywoliniową po konturze  $L_1$  obliczamy w dwóch etapach. Jako pierwszą wyznaczamy całkę po konturze kołowej we współrzędnych cylindrycznych, gdzie  $\rho = 2$ ,  $dl = \rho d\phi \mathbf{1}_\phi$

$$\int_{P_1}^{P_3} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \phi - \sin \phi) d\phi = 2 \left( \sin \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \cos \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = 4.$$

Następnie wyznaczamy całkę wzdłuż prostej o równaniu  $y = -x + 2$ , przechodzącej przez punkty  $P_2$  i  $P_3$ . W tym przypadku  $d\mathbf{l} = dx \mathbf{1}_x + dy \mathbf{1}_y$ , zatem

$$\int_{P_3}^{P_2} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{-2} dx + \int_2^4 dy = 0.$$

Sumując wyniki cząstkowe otrzymujemy  $\int_{L_1} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = 4$ . Całkę krzywoliniową po konturze  $L_2$  wyznaczamy całkując kolejno wzdłuż trzech prostych

$$\int_{L_2} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_4} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_4}^{P_5} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_5}^{P_2} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^4 dx + \int_{-2}^4 dy + \int_4^{-2} dx = 4.$$

W celu zweryfikowania zależności  $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(b) - f(a)$  wyznaczamy  $f(P_1)$  i  $f(P_2)$ . Dla  $P_1(x = 0, y = -2)$ ,  $P_2(x = -2, y = 4)$

$$f(P_1) = -2, \quad f(P_2) = 2.$$

Ostatecznie otrzymujemy identyczny wynik jak w przypadku obliczania całek krzywoliniowych po konturach  $L_1$  i  $L_2$ ,  $f(P_2) - f(P_1) = 4$ .

**0.43.** Dla podanych funkcji pola skalarnego wyznaczyć kierunek najszybszego wzrostu w punkcie  $P(x = 1, y = 1, z = \sqrt{2})$ :

- $V = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ln y + e^{-xz}$ ,
- $V = \rho \sin \phi - z^2 \cos \phi$ ,
- $V = r \sin \theta + \cos \theta \sin \phi$ .

**Rozwiązanie:** Kierunek najszybszego wzrostu pola skalarnego wyznaczamy poprzez obliczanie gradientu.

a) Gradient w układzie kartezjańskim (27)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z = \left( \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ln y - ze^{-xz} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{1}{y} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) \mathbf{1}_y - (xe^{-xz}) \mathbf{1}_z,$$

podstawiając współrzędne punktu  $P(x = 1, y = 1, z = \sqrt{2})$ , otrzymujemy

$$\nabla V = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y - e^{-\sqrt{2}} \mathbf{1}_z.$$

b) Gradient w układzie cylindrycznym (28)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z = \sin \phi \mathbf{1}_\rho + \left( \cos \phi + \frac{z^2}{\rho} \sin \phi \right) \mathbf{1}_\phi - 2z \cos \phi \mathbf{1}_z,$$

podstawiając współrzędne punktu  $P(\rho = \sqrt{2}, \phi = \pi/4, z = \sqrt{2})$ , otrzymujemy

$$\nabla V = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{1}_\rho + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \mathbf{1}_\phi - 2 \mathbf{1}_z.$$

c) Gradient w układzie sferycznym (29)

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{1}_\phi \\ &= \sin \theta \mathbf{1}_r + \left( \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \sin \phi \right) \mathbf{1}_\theta + \left( \frac{1}{r} \cot \theta \cos \phi \right) \mathbf{1}_\phi, \end{aligned}$$

podstawiając współrzędne punktu  $P(r = 2, \theta = \pi/4, \phi = \pi/4)$ , otrzymujemy

$$\nabla V = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{1}_r + \frac{2\sqrt{2} - 1}{4} \mathbf{1}_\theta + \frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{1}_\phi.$$

**0.44.** Dla podanego pola skalarnego  $f = x^2y + y^2 + xz^2$  wyznaczyć: a) kierunek i amplitudę najszybszego wzrostu pola; b) amplitudę zmiany pola skalarnego  $f$  w kierunku wyznaczanym przez wektor  $\mathbf{A} = \mathbf{1}_z$ . Obliczenia wykonać dla punktu  $P(1, 2, 3)$ .

**Rozwiązanie:**

a) kierunek najszybszego wzrostu pola skalarnego wskazuje gradient funkcji  $f$  (27)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{1}_z = (2xy + z^2) \mathbf{1}_x + (x^2 + 2y) \mathbf{1}_y + 2xz \mathbf{1}_z.$$

Kierunek maksymalnych zmian, dla punktu  $P$ , określa wektor  $13\mathbf{1}_x + 5\mathbf{1}_y + 6\mathbf{1}_z$ . Amplituda tych zmian wynosi

$$|\nabla f| = \sqrt{13^2 + 5^2 + 6^2} \cong 15.17.$$

Amplitudę zmian pola  $f$  w dowolnym kierunku wyznaczamy na podstawie zależności (25). Pochodna funkcji pola skalarnego w kierunku wskazywanym przez wektor  $\mathbf{A}$

$$\frac{df}{dA} = \nabla f \cdot \mathbf{1}_A = \left( (2xy + z^2) \mathbf{1}_x + (x^2 + 2y) \mathbf{1}_y + 2xz \mathbf{1}_z \right) \cdot \mathbf{1}_z = 2xz.$$

Podstawiając współrzędne punktu  $P$ , otrzymujemy  $df/dA = 6$ .

**0.45.** Obliczyć rotację i gradient dla wersorów:  $\mathbf{1}_\rho$ ,  $\mathbf{1}_r$ ,  $\mathbf{1}_\theta$  i  $\mathbf{1}_\phi$ .

**Rozwiązanie:** Niektóre wersory układów krzywoliniowych zmieniają swój kierunek w przestrzeni. A zatem, w przeciwieństwie do wersorów układu kartezjańskiego gradient i dywergencja tych wersorów mogą przyjmować wartości różne od zera. Na podstawie (33) i (43) możemy zapisać

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{1}_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}, & \nabla \times \mathbf{1}_\rho &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{1}_\phi &= 0, & \nabla \times \mathbf{1}_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \mathbf{1}_z = \frac{1}{\rho} \mathbf{1}_z, \\ \nabla \cdot \mathbf{1}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{2}{r}, & \nabla \times \mathbf{1}_r &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{1}_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cot \theta, & \nabla \times \mathbf{1}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \mathbf{1}_\phi = \frac{1}{r} \mathbf{1}_\phi. \end{aligned}$$

**0.46.** Dla podanych wektorów  $\mathbf{A} = 2\sqrt{2}/\rho \mathbf{1}_\rho + 6 \cos \phi \mathbf{1}_\phi - 2z \mathbf{1}_z$  i  $\mathbf{B} = \rho^2 \cos \phi \mathbf{1}_\rho - \sin \phi \mathbf{1}_\phi + \mathbf{1}_z$  obliczyć ich iloczyn skalarny i wektorowy w punkcie  $P(x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}, z = 4)$ .

**Rozwiązanie:** Iloczyn skalarny wektorów  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_z B_z = 2\sqrt{2}\rho \cos \phi - 6 \cos \phi \sin \phi - 2z.$$

Na podstawie (13) wyznaczamy współrzędne punktu  $P$  w układzie cylindrycznym

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2, \quad \phi = \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

zatem  $P(\rho = 2, \phi = \pi/4, z = 4)$ . Podstawiając współrzędne punktu  $P$ , otrzymujemy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 6 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - 8 = -7.$$

Iloczyn wektorowy

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_\phi B_z - A_z B_\phi)\mathbf{1}_\rho + (A_z B_\rho - A_\rho B_z)\mathbf{1}_\phi + (A_\rho B_\phi - A_\phi B_\rho)\mathbf{1}_z \\ &= (6 \cos \phi - 2z \sin \phi)\mathbf{1}_\rho - (2\rho^2 z \cos \phi + 2\sqrt{2}/\rho)\mathbf{1}_\phi - (2\sqrt{2} \sin \phi/\rho + 6\rho^2 \cos^2 \phi)\mathbf{1}_z, \end{aligned}$$

podstawiając współrzędne punktu  $P$ , otrzymujemy

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\sqrt{2}\mathbf{1}_\rho - 17\sqrt{2}\mathbf{1}_\phi - 13\mathbf{1}_z.$$

**0.47.** Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej i równanie normalnej do powierzchni  $V = xy^2 + x^2y - xyz$  w punkcie  $P(1, 1, 2)$ .

**Rozwiązanie:** Wektor  $\mathbf{r}_0 = OP = \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + 2\mathbf{1}_z$  wyznacza punkt styczności, zatem wektor  $\nabla V(\mathbf{r}_0)$  jest prostopadły do powierzchni opisanej równaniem  $V$  w punkcie  $\mathbf{r}_0$ , a zatem również do płaszczyzny stycznej w tym punkcie. Gradient funkcji skalarnej  $V$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{1}_z = (y^2 + 2xy - yz)\mathbf{1}_x + (2xy + x^2 - xz)\mathbf{1}_y - xy\mathbf{1}_z.$$

Podstawiając współrzędne punktu styczności

$$\nabla V(\mathbf{r}_0) = \mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y - \mathbf{1}_z.$$

Jeżeli wektor miejsca  $\mathbf{r}$  wyznacza dowolny punkt leżący na płaszczyźnie stycznej, to wektor  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  jest prostopadły do wektora  $\nabla V(\mathbf{r}_0)$ . Zatem równanie płaszczyzny stycznej

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla V(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Podstawiając wektor wodzący  $\mathbf{r} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$ , otrzymujemy

$$((x-1)\mathbf{1}_x + (y-1)\mathbf{1}_y + (z-2)\mathbf{1}_z) \cdot (\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y - \mathbf{1}_z) = 0.$$

Zatem płaszczyzna styczna do powierzchni  $V$  w punkcie  $\mathbf{r}_0$  opisana jest równaniem  $x+y-z=0$ .

Jeżeli wektor miejsca  $\mathbf{r}$  wyznacza punkt na normalnej do powierzchni w punkcie  $\mathbf{r}_0$ , to wektor  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  jest równoległy do wektora  $\nabla V(\mathbf{r}_0)$ . Zatem normalną do powierzchni  $V$  w punkcie  $\mathbf{r}_0$  można opisać równaniem

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla V(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Dla wektora  $\mathbf{r} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$  zapiszemy

$$((x-1)\mathbf{1}_x + (y-1)\mathbf{1}_y + (z-2)\mathbf{1}_z) \times (\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y - \mathbf{1}_z) = 0.$$

Zatem równanie normalnej do powierzchni w punkcie  $\mathbf{r}_0$

$$(3-y-z)\mathbf{1}_x + (x+z-3)\mathbf{1}_y + (x-y)\mathbf{1}_z = 0.$$



**0.48.** Dla równań Maxwella i zasady zachowania ładunku wyrażonych w następującej postaci:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1e)$$

pokazać, że równania (1c) i (1d) można otrzymać na podstawie równań 1a, 1b i zasady zachowania ładunku (*Wskazówka*. Oblicz dywergencję obu stron równań (1a) i (1b)).

**Rozwiązanie:** Obliczając dywergencję obu stron równania (1a), otrzymujemy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{H}}{\partial t}.$$

na podstawie tożsamości  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$  możemy zapisać

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Dywergencja wektora  $\mathbf{H}$  nie zależy od czasu, zatem przy rozwinięciu ruchu falowego

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Postępując analogicznie z równaniem (1b), otrzymujemy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t}$$

Na podstawie tożsamości  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$  i zasady zachowania ładunku (1e) można zapisać

$$\varepsilon \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

a zatem

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

**0.49.** Na podstawie równań Maxwella przedstawionych w Zad. 0.48 pokazać, że w próżni, gdzie  $\mathbf{J} = 0$  i  $\rho = 0$ , pola elektryczne  $\mathbf{E}$  i magnetyczne  $\mathbf{H}$  spełniają następujące równania falowe:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

*Wskazówka.* Oblicz rotację obu stron równań (1a) i (1b) z Zad. 0.48.

**Rozwiązanie:** Obliczając rotację obu stron równania (1a) z Zad. 0.48, otrzymujemy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}.$$

Na podstawie tożsamości wektorowej, możemy zapisać

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Ponieważ mamy do czynienia z polem elektrycznym w próżni ( $\rho = 0$ ) zatem  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (patrz równanie (1c) z Zad. 0.48). Stąd

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}.$$

Wykorzystując zależność (1b) z Zad. 0.48 ( $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ ) zapiszemy

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Postępując analogicznie dla pola magnetycznego otrzymujemy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left( \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Korzystając z tożsamości wektorowej oraz równań  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  i  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t$  ostatecznie zapiszemy

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

**0.50.** Na podstawie równania (1a) z Zad. 0.48 wykazać, że pole  $\mathbf{E}$  można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi,$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest potencjałem wektorowym ( $\mathbf{H} = 1/\mu \nabla \times \mathbf{A}$ ) natomiast  $\Phi$  jest potencjałem skalarnym ( $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ ).

**Rozwiązanie:** Dla spójności przepiszmy równanie (1a) z Zad. 0.48

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Pole magnetyczne możemy zapisać za pomocą potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Wektor  $\mathbf{H}$  można zapisać w ten sposób, ponieważ pozostaje spełnione równanie  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  ((1d) z Zad. 0.48). Łatwo to pokazać na podstawie (40)

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Podstawiając potencjał magnetyczny  $\mathbf{A}$  do równania wyjściowego, otrzymujemy

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t},$$

a zatem

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Na podstawie tożsamości (39)

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0,$$

możemy zapisać

$$\mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi,$$

zatem

$$\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi.$$

**0.51.** Sztywny przedmiot wiruje wokół osi  $S$  z prędkością  $\mathbf{v}(x, y, z)$ . Wykazać, że:

a)  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,

b)  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ .

c) wyznaczyć  $\boldsymbol{\omega}$ , jeżeli  $\mathbf{v} = z\mathbf{1}_y - y\mathbf{1}_z$ .

Wykorzystać zależność  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_0$ , gdzie  $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{1}_x + b\mathbf{1}_y + c\mathbf{1}_z$  i  $\mathbf{v}_0 = r\mathbf{1}_x + s\mathbf{1}_y + t\mathbf{1}_z$  to, odpowiednio, prędkością kątową i translacyjną. Wektor  $\mathbf{r} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$  wyznacza położenie wirującego przedmiotu.

**Rozwiązanie:** a) Obliczamy dywergencję prędkości liniowej  $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_0) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{v}_0.$$

$\mathbf{v}_0$  jest wektorem stałym i jego współrzędne nie zależą od położenia, tak więc  $\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$ . Iloczyn wektorowy prędkości kątowej i wektora położenia obliczamy na podstawie (8)

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (bz - cy)\mathbf{1}_x + (cx - az)\mathbf{1}_y + (ay - bx)\mathbf{1}_z.$$

Stąd, zgodnie z (32)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial(bz - cy)}{\partial x} + \frac{\partial(cx - az)}{\partial y} + \frac{\partial(ay - bx)}{\partial z} = 0.$$

Na podstawie wyników cząstkowych możemy zapisać  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

b) Rotacja prędkości liniowej

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_0) = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{v}_0.$$

rotacja wektora stałego  $\nabla \times \mathbf{v}_0 = 0$ , natomiast rotację iloczynu wektorowego  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  obliczamy na podstawie (42)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \left( \frac{\partial(ay - bx)}{\partial y} - \frac{\partial(cx - az)}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left( \frac{\partial(bz - cy)}{\partial z} - \frac{\partial(ay - bx)}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y \\ &+ \left( \frac{\partial(cx - az)}{\partial x} - \frac{\partial(bz - cy)}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z = 2(a\mathbf{1}_x + b\mathbf{1}_y + c\mathbf{1}_z) = 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

c) Przekształcając zależność z punktu b, otrzymujemy

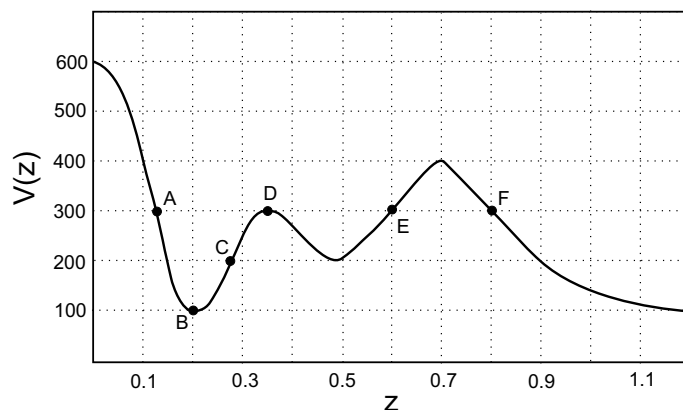
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v},$$

zatem

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial(-y)}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \frac{\partial y}{\partial x} \mathbf{1}_y + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{1}_z \right] = -\mathbf{1}_x.$$

**0.52.** Korzystając z twierdzenia Gaussa i twierdzenia Stokesa przekształcić równania Maxwella z Zad. 0.48 do postaci całkowej:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\mu \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \varepsilon \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \\ \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho dv, \\ \oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 23: Rysunek do Zad. 0.53

**Rozwiązanie:** Dwa pierwsze równania (1a) i (1b) całujemy obustronnie po powierzchni  $S$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = -\mu \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \varepsilon \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}.$$

Korzystając z twierdzenia Stokesa (45), otrzymujemy

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\mu \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \varepsilon \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}.$$

Równania (1c) i (1d) całujemy po objętości  $V$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dv,$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{H}) dv = 0.$$

Na podstawie twierdzenia Gaussa (35), otrzymujemy

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho dv,$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

**0.53.** Na Rys. 23 przedstawiono przebieg skalarneho potencjału elektrycznego  $V(z)$  wzdłuż osi  $z$ . Zakładając, że potencjał zależy wyłącznie od  $z$  wyznaczyć natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E} (= -\nabla V)$  w punktach  $A, B, \dots, F$  (patrz Rys. 23).

**Rozwiązanie:** Na podstawie definicji gradientu wyznaczamy  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z \approx -\frac{\Delta V}{\Delta z} \mathbf{1}_z.$$

Odczytując z Rys. 23 zmiany  $\Delta V$  i  $\Delta z$  w najbliższym sąsiedztwie punktów, otrzymujemy przybliżone wartości natężenia pola elektrycznego

$$\mathbf{E}_A \approx -\frac{200 - 400}{0.15 - 0.1} \mathbf{1}_z = 4000 \mathbf{1}_z,$$

$$\mathbf{E}_B \approx \mathbf{0},$$

$$\mathbf{E}_C \approx -\frac{250 - 150}{0.3 - 0.25} \mathbf{1}_z = -2000 \mathbf{1}_z,$$

$$\mathbf{E}_D \approx \mathbf{0},$$

$$\mathbf{E}_E \approx -\frac{350 - 250}{0.65 - 0.55} \mathbf{1}_z = -1000 \mathbf{1}_z,$$

$$\mathbf{E}_F \approx -\frac{200 - 400}{0.9 - 0.7} \mathbf{1}_z = 1000 \mathbf{1}_z.$$