2 Coniche

2.1 $X^2 + Y^2 = 1$

2.2 $X^2 + Y^2 = 2$

2.3 $X^2 + Y^2 = 3$

Teorema 2.1

Sia C la curva affine $X^2 + Y^2 = 3$, allora $C(\mathbf{Q}) = \varnothing$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista un punto razionale di C, allora possiamo scrivere

$$\left(\frac{m_1}{2^\alpha m_2}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{2^{\alpha+\beta} n_2}\right)^2 = 3$$

dove $m_1, n_1 \in \mathbf{Z}$; $m_2, n_2 \in \mathbf{N}$ con m_2, n_2 dispari; $\alpha, \beta \geqslant 0$ e $(m_1, 2^\alpha m_2) = 1 = (n_1, 2^{\alpha+\beta} n_2)$. Cioè

$$2^\beta m_1^2 n_2^2 + n_1^2 m_2^2 = 3 \cdot 2^{\alpha+\beta} m_2^2 n_2^2 \tag{2.1}$$

Se $\beta > 0$, allora n_1 è dispari, quindi riducendo (2.1) modulo 2 otteniamo: $1 \equiv 0 \bmod 2$, il che è chiaramente impossibile. Quindi $\beta = 0$. Se riduciamo (2.1) modulo 8, notando che $m_2^2 \equiv n_2^2 \equiv 1 \bmod 8$ per il lemma 1.5, otteniamo

$$m_1^2 + n_1^2 \equiv 3 \cdot 2^\alpha \equiv \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha = 0 \\ 6 & \text{se } \alpha = 1 \\ 4 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Se $\alpha > 0$, allora m_1 ed n_1 sono entrambi dispari, e la parte sinistra di (2.2) è congruente a 2, il che è impossibile.

Se $\alpha = 0$, allora riducendo (2.2) modulo 2 otteniamo: $m_1 + n_1 \equiv 1 \bmod 2$. Perciò fra m_1 ed n_1 uno è pari e l'altro è dispari: diciamo che m_1 è pari. Abbiamo, per il lemma 1.5,

$m_1 \bmod 8$	$m_1^2 + n_1^2 \bmod 8$
$0, 4$	1
± 2	5