$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{4*1-3*1}*\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}^{-1} = \frac{1}{2*2-5*1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = -1*\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 23 & -10 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 23 & -10 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1*\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1*\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1*\begin{pmatrix} 23 \\ -7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 1*\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+23-10 \\ -1+1-7+3 \\ 0+0-2+1 \\ 0+0+5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & I_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A_{٢٢} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$\approx$ $\quad ligne_2 \leftarrow ligne_2 - ligne_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$\approx$ $\quad ligne_3 \leftarrow ligne_3 / 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$\approx$ $\quad ligne_4 \leftarrow ligne_4 - 5*ligne_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & ٣ & 1 & ٠ \\ 0 & ١ & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\approx$ $\quad ligne_3 \leftarrow ligne_3 + ligne_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 - 2v_2 = 7*\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2*\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h=-3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\approx$ $\quad$ $ligne_1 \leftarrow ligne_1 - 5*ligne_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & h & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5\mathrm{x}_{٢}+٤\mathrm{x}_3-2\mathrm{x}_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ -9-4\mathrm{x}_5 \\ x_5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + x_2*\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3*\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5*\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} ٥ & -٣ & 2 \\ ١٥ & -٧ & 5 \\ -10 & 12 & h^2-16 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} ١ \\ -١ \\ h-١١ \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices donnent la matrice augmentée suivante : $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 15 & -7 & 5 & -1 \\ -10 & 12 & h^2-16 & h-11 \end{pmatrix}$

Procédons à la réduction des lignes :

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 15 & -7 & 5 & -1 \\ -10 & 12 & h^2-16 & h-11 \end{pmatrix}$$

$\approx$ $\quad$ $L2 \leftarrow L2 - 3*L1$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -10 & 12 & h^2-16 & h-11 \end{pmatrix}$$