

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{4*1-3*1} * \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}^{-1} = \frac{1}{2*2-5*1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = -1 * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 23 & -10 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 23 & -10 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 23 \\ -7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+23-10 \\ -1+1-7+3 \\ 0+0-2+1 \\ 0+0+5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & I_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \text{ligne}_2 \leftarrow \text{ligne}_2 - \text{ligne}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \text{ligne}_3 \leftarrow \text{ligne}_3 / 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \text{ligne}_4 \leftarrow \text{ligne}_4 - 5 * \text{ligne}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \text{ligne}_3 \leftarrow \text{ligne}_3 + \text{ligne}_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 - 2v_2 = 7 * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h = -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \text{ligne}_1 \leftarrow \text{ligne}_1 - 5 * \text{ligne}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & h & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ -9 - 4x_5 \\ x_5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + x_2 * \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -7 & 5 \\ -10 & 12 & h^2 - 16 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h - 11 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices donnent la matrice augmentée suivante : $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 15 & -7 & 5 & -1 \\ -10 & 12 & h^2 - 16 & h - 11 \end{pmatrix}$

Procédons à la réduction des lignes :

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 15 & -7 & 5 & -1 \\ -10 & 12 & h^2 - 16 & h - 11 \end{pmatrix}$$

$$\approx \text{L2} \leftarrow \text{L2} - 3 * \text{L1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -10 & 12 & h^2 - 16 & h - 11 \end{pmatrix}$$