STATIK

STARRER KÖRPER

R. Mair

Fachhochschule München, Fakultät 05

Vorwort

Dieses Büchlein wendet sich an Studenten der Versorgungs- und der Verfahrenstechnik. Bücher über Technische Mechanik sind meistens für Maschinenbauer oder Bauingenieure geschrieben. In der Versorgungs- und Verfahrenstechnik treten mitunter Probleme auf, die in den üblichen Mechanikbüchern nicht behandelt sind. Deswegen ist dieses Büchlein so konzipiert, dass hier nur ausgewählte Grundlagen der Technischen Mechanik behandelt werden, die dem Versorgungs- und Verfahrensingenieur und im Berufsalltag abverlangt werden.

Die "Statik starrer Körper" beschreibt das Wesen von Kräften und Momenten. Sie stellt weiter Methoden zur Bestimmung des äußeren und inneren Gleichgewichts von Tragelementen vor. Obwohl die Rollreibung eigentlich ein Thema der "Statik elastischer Körper" ist, wird die gesamte Reibung auch unter diesem Thema behandelt. Ein besonderes Augenmerk gilt den typischen Tragelementen wie der Druck- und Zugstab, der Biegebalken, der Torsionsstab und die rotationssymmetrische dünne Schale.

Die Methoden werden hinreichend exakt hergeleitet; Vereinfachungen, genormte Methoden und praktische Kniffe bleiben den Vorlesungen in den anwendungsbezogenen Fächern vorbehalten, bauen aber auf den vorgestellten Grundlagen auf.

Ohne regelmäßiges Üben bleibt auch einer begabten Studentin oder einem begabten Studenten die Technische Mechanik verschlossen. Deshalb ist das Üben des dargebotenen Stoffes unabdingbar.

München, den 11.11.2008

1 Kräfte und Momente

1 Kräfte und Momente

1.1 Kraftbegriff

Volumen- und Oberflächenkräfte liegen in der Realität vor. Linienlasten und Einzelkräfte sind Idealisierungen.

Volumenkräfte, Oberflächenkräfte und Linienkräfte müssen nicht konstant sein. Häufig sind diese Kräfte eine Funktion des Ortes, manchmal auch zusätzlich eine Funktion der Zeit. Die Ersatzkraft für ungleichmäßige Belastungen wirkt im Schwerpunkt der Belastungsfeldes.

Die Ersatzkräfte, auch Resultierende genannt, ersetzten die Kraftfelder vollständig.

Angaben über Kräfte im Bauwesen finden sich in der DIN 1055 (Lastannahmen). Andere Kräfteangaben, zum Beispiel von Maschinen, sind von den jeweiligen Herstellern zu erfragen.

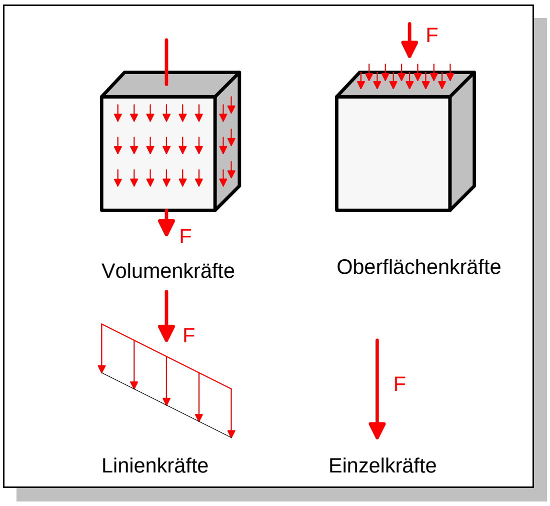


Bild 1.1: Arten von Kräften

1.1.1 Volumenkräfte

Volumenkräfte p sind im Inneren von Körpern aktiv.

Beispiele für Volumenkräfte sind:
- Kräfte im Gravitationsfeld
- Zentrifugalkräfte
- Elektromagnetische Kräfte

Die Einheit der Volumenkräfte p ist N/m³ (Newton pro Kubikmeter) oder kN/m³.

Eine Dichte von einem Kilogramm pro dm³ bewirkt auf der Erdoberfläche eine Volumenkraft von 9,81 N/dm³.

Volumenkräfte von homogenen Körpern unter gleichförmigen Anziehungskräften haben ihre Ersatzkraft F im geometrischen Schwerpunkt des Körpers. Sie weist in Richtung der Volumenkräfte. Ist die Volumenkraft eine Funktion des Ortes, wie beispielsweise bei Fliehkräften, dann liegt ihre Ersatzkraft im Schwerpunkt der Funktion und ihre Richtung muss aus der Integration der Komponenten der Volumenkräfte ermittelt werden.

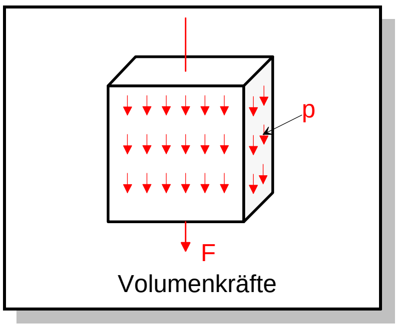


Bild 1.2: Volumenkräfte:

1.1.2 Oberflächenkräfte

Oberflächenkräfte sind nur auf Oberflächen von Körpern aktiv. Beispiele für Oberflächenkräfte sind:

- (Kontakt-) Pressung bei Festkörperberührung
- Drücke von Flüssigkeiten und Gasen (z.B. hydrostatischer Druck)
- Verkehrslasten von Geschossdecken (z.B. Decken von Wohnhäusern p = 1,5 kN/m²)

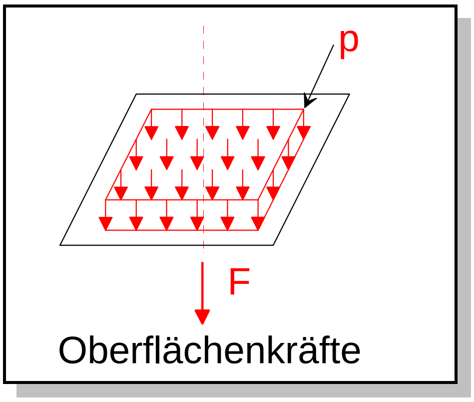


Bild 1.3: Oberflächenkräfte

Die gebräuchliche Einheit von Oberflächenkräften p ist N/m² oder kN/m².

Oberflächenkräfte sind in der Regel nicht konstant über der belasteten Fläche verteilt Die Ersatzkraft F greift im Schwerpunkt des Lastkörpers an. Der Lastkörper wird dabei von der belasteten Fläche und der veränderlichen Oberflächenkraft aufgespannt

Ein Druck von 1 bar ruft eine Oberflächenkraft von p = 0,1 N/mm² hervor.

Flächenlasten werden entweder pro tatsächlicher Fläche (zum Beispiel Drücke) oder in Abhängigkeit von deren Projektion angegeben. Schneelasten werden beispielsweise immer auf eine horizontale Projektion von Flächen angegeben. Unten stehend sind typische Lasten für Dächer skizziert.

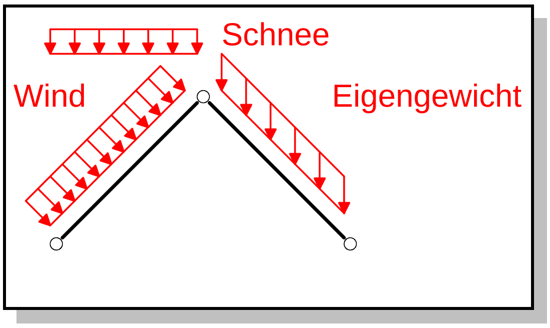
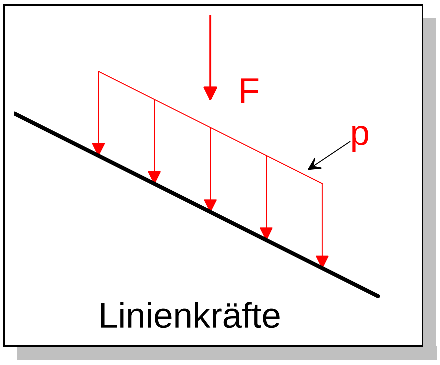


Bild 1.4: Oberflächenkräfte

1.1.3 Linienkräfte



Linienkräfte p stellen bereits eine Idealisierung von Volumenkräften oder Oberflächenkräften dar

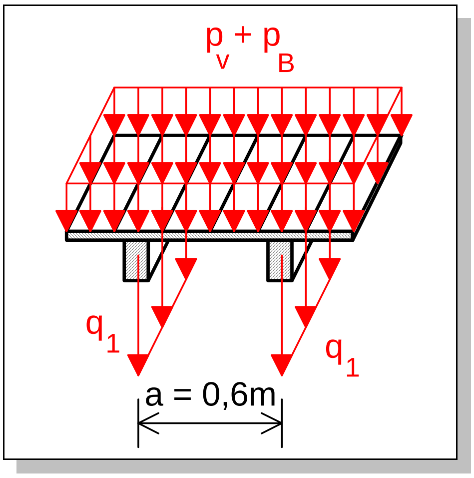
Beispiele für Linienkräfte:
- Gewichtslast eines Balkens
- Auflagerreaktionen von Wänden

Bild 1.5: Linienkräfte

Die Einheit von Linienkräften p ist N/m oder kN/m.

Die Ersatzkraft von Linienkräften greift im Schwerpunkt der Lastfläche an und hat die Richtung der Linienkraft

Beispiel:
Eine Holzbalkendecke gemäß Bild 1.6 ist mit der Verkehrslast p_v = 1,5 kN/m² belastet.



Das Eigengewicht der Bretter wird kann mit p_B = 0,2 kN/m² und das des Balkens mit q_B = 0,075 kN/m angenommen werden.

Gesucht ist die Linienlast q_1, die den Balken beansprucht.

$q_1 = (p_v + p_B) \cdot a + q_B =$
$= (1{,}5\ \text{kN} + 0{,}2\ \text{kN}) \cdot 0{,}6\ \text{m} + 0{,}075\ \text{kN/m} =$
$= 1{,}095\ \text{kN/m}$

Bild 1.6: Holzbalkendecke

1.1.4 Einzelkräfte

Einzelkräfte treten wie Linienlasten in Wirklichkeit nicht auf. Konzentrierte Volumenkräfte oder Oberflächenlasten fasst man als Einzelkräfte auf.

Beispiele für Einzelkräfte:
- Gewichtskräfte von Motoren
- Auflagerpressung von Säulen

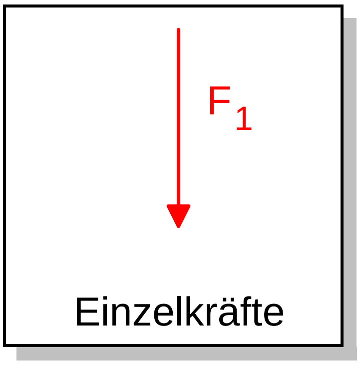


Bild 1.7: Einzelkräfte

Die Einzelkräfte werden in N (Newton) oder in Vielfachen davon (kN, MN, GN, ...) gemessen.

Beispiel:
Ein Holzbalken gemäß Bild 1.8 ist mit der Linienlast q_1 = 1,095 kN/m belastet.

Der Balken ist im Abstand von L = 3 m mit Holzstützen abgestützt.

Gesucht ist die Einzellast F_S, die auf eine Stütze wirkt.

$F_S = 0{,}5 \cdot q \cdot L = 0{,}5 \cdot\ 1{,}095\ \text{kN/m} \cdot 3\ \text{m} = 1642{,}5\ \text{kN}$

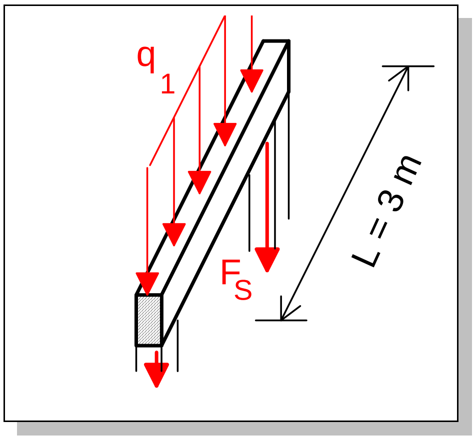


Bild 1.8: Unterstützter Holzbalken

1.1.5 Lastannahmen

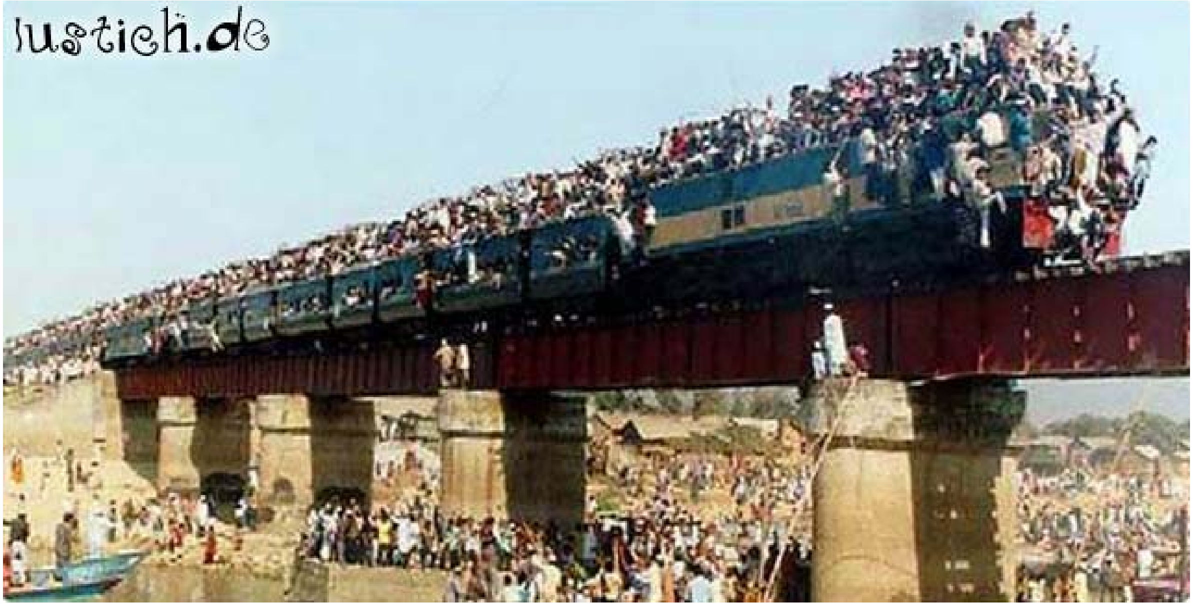


Bild 1.9: Verkehrslast von Personenzügen[1]

Die Lastannahmen im Bauwesen sind in DIN 1055 festgelegt und gliedert sich in folgende Teile:

- Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen
- Teil 2: Bodenkenngrößen (z. Z. in Vorbereitung)
- Teil 3: Eigen- und Nutzlasten für Hochbauten (z. Z. Entwurf)
- Teil 4: Windlasten (z. Z. Entwurf)
- Teil 5: Schnee- und Eislasten (z. Z. Entwurf)
- Teil 6: Einwirkungen auf Silos (z. Z. Entwurf)
- Teil 7: Temperatureinwirkungen (z. Z. Entwurf)
- Teil 8: Einwirkungen während der Bauausführung (z. Z. Entwurf)
- Teil 9: Außergewöhnliche Einwirkungen (z. Z. Entwurf)
- Teil 10: Einwirkungen infolge Krane und Maschinen (z. Z. Entwurf)
- Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln

[1] Entnommen aus www.lustich.de

1.2 Eigenschaften einer Einzelkraft

1.2.1 Die Wirkungslinie

Die Beanspruchung des Balkens ändert sich nicht wenn man das Gewicht an einem kurzen (Fall A) oder an einem langen (Fall B) befestigt (Die Masse des Seils wird vernachlässigt).

Im Fall A und B wird unten am Balken gezogen, im Fall C dagegen von oben gedrückt.

Diesen Unterschied in der Beanspruchung bemerkt man lediglich in der direkten Nachbarschaft der Lasteinleitung. In einem Abstand von etwa der doppelten Balkenhöhe sind die Beanspruchungen in allen drei Fällen annähernd gleich.

Prinzip von St. Vernant:
Die Lasteinleitung wirkt sich nur lokal, also in ihrer unmittelbaren Umgebung aus (Eine genauere Untersuchung der exakten Verhältnisse am Lasteinleitungspunkt ist mit einfachen Mitteln nicht möglich).

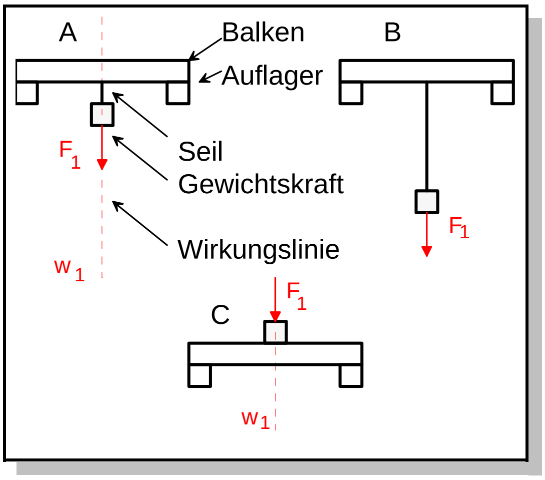


Bild 1.10: Wirkungslinie einer Kraft

Eine Kraft kann auf ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich an ihren Auswirkungen etwas ändert. Die Kraft lässt sich mathematisch als ein linienflüchtiger Vektor beschreiben.

1.2.2 Bewegungen verursacht durch Kräfte

Die zentrisch im Schwerpunkt angreifende Kraft F_1 übt auf eine Scheibe, die lose auf einer Unterlage liegt, unterschiedliche Reaktionen aus:

- wird sie nicht festgehalten, erfährt die Scheibe eine Translation. Dabei kommt es gar nicht darauf an, ob die Scheibe geschoben oder gezogen wird. Die Kraft muss mindestens so groß sein, dass die Reibung überwunden wird. Weiter ist die Richtung der Kraft von Belang. Sie bestimmt die Bewegungsrichtung der Scheibe.
- wird die Scheibe im Punkt A festgehalten, erfährt sie eine Rotation entgegen des Uhrzeigers.
- wird sie im Punkt B festgehalten, erfährt sie eine Rotation im Uhrzeigersinn.

Der Drehsinn hängt davon ab, ob die Kraft links oder rechts des Drehpunktes liegt.

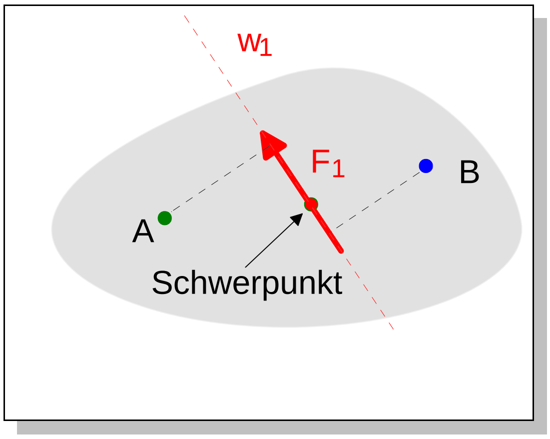


Bild 1.11: Bewegungen verursacht durch Kräfte

1.2.3 Mathematische Beschreibung von Kräften

1.2.3.1 Räumliche Beschreibung von Kräften

Die Kraft $\underline{F}$ ist also ein linienflüchtiger Vektor (Vektoren werden hier mit einem Unterstrich gekennzeichnet), der auf seiner Wirkungslinie $\underline{w}$ beliebig verschoben werden kann. Die Wirkungslinie $\underline{w}$ kann mit der folgenden Geradengleichung beschrieben werden. $\underline{x}_0$ ist der Ortsvektor vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem beliebigen Punkt der Wirkungslinie. Die Kraft $\underline{F}$ wird vorerst als freier Vektor zu $\underline{x}_0$ addiert und danach mit dem Skalar λ gestreckt.

$$\underline{w} = \underline{x}_0 + \lambda \cdot \underline{F} \qquad \text{Gl. (1.1)}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

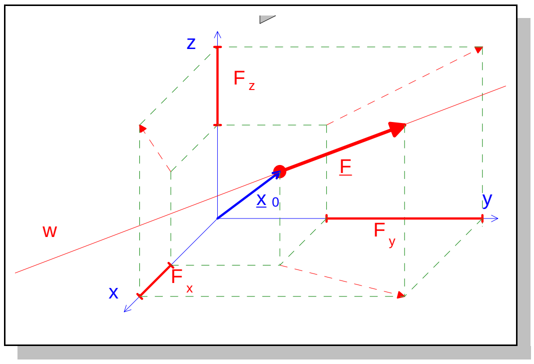


Bild 1.12: Die Kraft im kartesischen Koordinatensystem

Zur Festlegung einer Kraft im Raum sind die drei Komponenten des Ortsvektors $\underline{x}_0$ und drei Komponenten der Kraft $\underline{F}$, also sechs Angaben nötig.

Eine beliebige Kraft $\underline{F}$ kann mittels einer Konstanten c gestreckt oder gestaucht werden.

$$\underline{F}_2 = c \cdot \underline{F}_1$$

Ist c größer als 1, wird die Kraft $\underline{F}_1$ gestreckt,
ist c kleiner als 1 aber größer als 0, wird sie gestaucht.
Nimmt c den Wert c = -1 an, dann wirkt die Kraft $\underline{F}_2$ der ursprünglichen Kraft $\underline{F}_1$ entgegen.

1.2.3.2 Ebene Beschreibung von Kräften

Die Komponenten der Kraft $\underline{F}$ in die jeweilige Koordinatenrichtungen x oder y erhält man mittels Skalarprodukt der Kraft mit dem jeweiligen Einheitsvektor $\underline{e}_i$

$$\mathrm{F}_x = \underline{e}_1 \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \qquad \text{Gl. (1.2)}$$

$$\mathrm{F}_y = \underline{e}_2 \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

oder über die trigonometrischen Beziehungen

$$\mathrm{F}_x = \left|\underline{\mathrm{F}}\right| \cdot \cos\alpha = \sqrt{\mathrm{F}_x^2 + \mathrm{F}_y^2} \cdot \cos\alpha \qquad \text{Gl. (1.3)}$$
$$\mathrm{F}_y = \left|\underline{\mathrm{F}}\right| \cdot \sin\alpha = \sqrt{\mathrm{F}_x^2 + \mathrm{F}_y^2} \cdot \sin\alpha$$

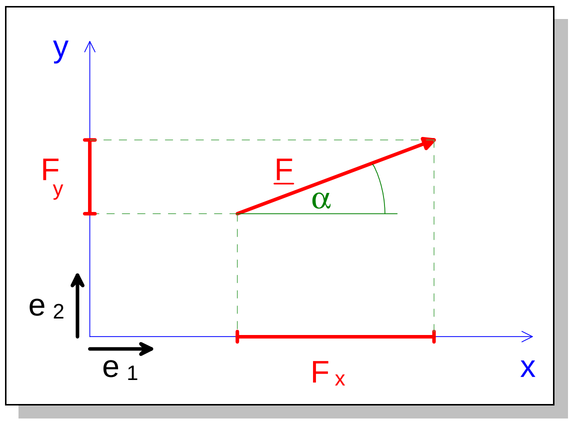


Bild 1.13: Kraftkomponenten in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem

Zur Festlegung einer Kraft in der Ebene sind zwei Koordinaten und zwei Kraftkomponenten, also vier Angaben, nötig.

1.2.4 Das Drehmoment

Die Kraft F besitzt ein Drehmoment bezüglich des Drehpunktes O (Bild 1.14). Das Moment ergibt sich aus Kraft mal Hebelarm und hat die Einheit Nm. (Nicht zu verwechseln mit der mechanischen Arbeit, Kraft mal Weg, das auch Nm als Einheit besitzt). Der Hebelarm muss senkrecht auf der Wirkungslinie stehen.

Das Drehmoment kann man dreidimensional als Vektorprodukt berechnen.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \underline{a} \times \underline{F} \quad . \qquad \text{Gl. (1.4)}$$

Das Drehmoment M ist demnach ein Vektor, der sowohl senkrecht auf der Kraft F als auch auf dem Hebelarm a steht.

Der Betrag des Moments ist $\left|\underline{M}\right| = \left|\underline{a}\right| \cdot \left|\underline{F}\right| \cdot \sin(\beta) \mid 0 \le \beta \le \pi$. Gl. (1.5)

Bei ebenen Problemen zeigt der Vektor eines positiven Drehmoments senkrecht aus der Koordinatenebene heraus. Das skalare Moment M entspricht dabei der dritten Komponente, also der z-Komponente, des Momentenvektors $M = M_z$. Dreht das Moment in mathematisch positivem Sinn, also entgegen der Uhrzeigerrichtung, dann bezeichnet man es als positives Drehmoment. Den Richtungssinn des Moments kann man sich bildlich mit der dem Schraubenweg einer üblichen Rechtsschraube vergegenwärtigen; mit einem positiven Drehmoment wird eine Rechtsschraube herausgedreht.

Bei ebenen Problemen lässt sich das Drehmoment bezüglich des Koordinatenursprungs O als skalares Produkt aus seinen Kraftkomponenten F_x oder F_y mit den jeweiligen Achsenabschnitten bestimmen.

Verschiebt man den Anfangspunkt A der Kraft auf der Wirkungslinie bist zur y-Achse ergibt sich das Moment zu

$M_O = F_x \cdot t$ (F_y hat diesem Fall den Hebelarm 0)

Verschiebt man den Anfangspunkt A der Kraft dann weiter auf der Wirkungslinie bist zur x-Achse ergibt sich das Moment zu

$M_O = -F_y \cdot s$ (F_x hat diesem Fall den Hebelarm 0)

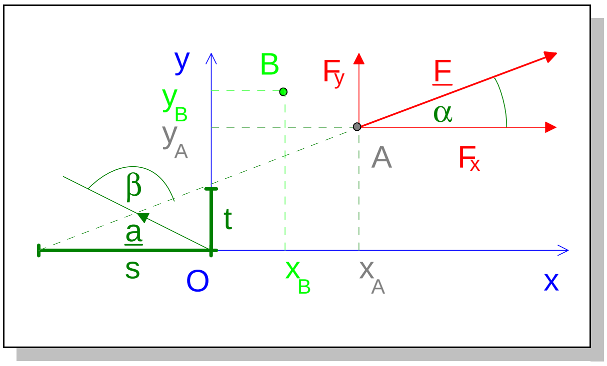


Bild 1.14: Drehmoment einer Kraft

Für jeden allgemeinen Punkt A auf der Wirkungslinie berechnet sich das Drehmoment um den Punkt B zu

$$\boxed{M_B = F_y \cdot (x_A - x_B) - F_x \cdot (y_A - y_B)} \quad . \qquad \text{Gl. (1.6)}$$

Als Sonderfall berechnet sich das Drehmoment um den Ursprung O mit $x_B = y_B = 0$ zu

$$\boxed{M_O = F_y \cdot x_A - F_x \cdot y_A} \quad . \qquad \text{Gl. (1.7)}$$

1.2.5 Kräftepaar

Sind zwei Kräfte $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ vom Betrag gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen nicht auf identischen aber parallelen Wirkungslinien w_1 und w_2, nennt man das System ein Kräftepaar. Bei den zwei Kräftepaaren $\underline{F}_1$ - $\underline{F}_2$ und $\underline{F}_3$ - $\underline{F}_4$ heben sich jeweils alle Kraftkomponenten auf. Das heißt, bei einem Kräftepaar verschwindet die eigentliche Kraft. Wegen der um den Abstand a_2 versetzten Wirkungslinien bleibt aber ein Drehmoment der Größe

$$M = \left|\underline{F}_1\right| \cdot a_2 = \left|\underline{F}_2\right| \cdot a_2$$

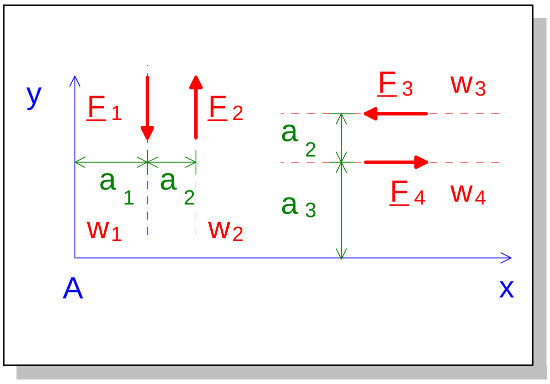


Bild 1.15: Kräftepaare

Das Drehmoment ist nur vom Betrag der Kräfte und vom Abstand der Wirkungslinien abhängig. Wenn $|\underline{F}_1| = |\underline{F}_2| = |\underline{F}_3| = |\underline{F}_4|$ gilt, lässt sich zeigen, dass für das Drehmoment um den Punkt A folgendes gilt:

$$M_A = -\left|\underline{F}_1\right| \cdot a_1 + \left|\underline{F}_2\right| \cdot (a_1 + a_2) = -\left|\underline{F}_2\right| \cdot a_1 + \left|\underline{F}_2\right| \cdot (a_1 + a_2) = \left|\underline{F}_2\right| \cdot a_2 = \left|\underline{F}_1\right| \cdot a_2$$

$$M_A = -\left|\underline{F}_4\right| \cdot a_3 + \left|\underline{F}_3\right| \cdot (a_3 + a_2) = \left|\underline{F}_3\right| \cdot a_2 = \left|\underline{F}_4\right| \cdot a_2 = \left|\underline{F}_1\right| \cdot a_2$$

Verschiebt man ein Kräftepaar oder verdreht es, so übt es auf einen beliebigen Punkt immer das gleiche Drehmoment aus. Das Drehmoment ist unabhängig vom Ort. Es ist, im Gegensatz zu einer Kraft, ein freier Vektor.

1.3 Ersatzkräfte von Kraftsystemen

1.3.1 Ersatzkraft im zentralen Kraftsystem

In einem zentralen Kräftesystem schneiden sich alle Wirkungslinien in einem zentralen Punkt. Bezüglich des zentralen Punktes ist das Drehmoment Null, weil keine einzige Kraft dort einen Hebelarm besitzt. Aus diesem Grund muss die Wirkungslinie der Ersatzkraft (Resultierende) ebenso durch den zentralen Punkt gehen.

1.3.1.1 Zeichnerische Lösung

Im Lageplan werden die Wirkungslinien lagetreu und im Kräfteplan die Kräfte längen- und richtungstreu maßstäblich eingetragen. Alle Kräfte werden im Kräfteplan aneinander gereiht. Der Anfangspunkt der ersten Kraft verbunden mit dem Endpunkt der letzten Kraft ergibt die Resultierende. Eine Parallele zur Resultierenden im Kräfteplan durch den zentralen Punkt im Lageplan liefert die Wirkungslinie im Lageplan.

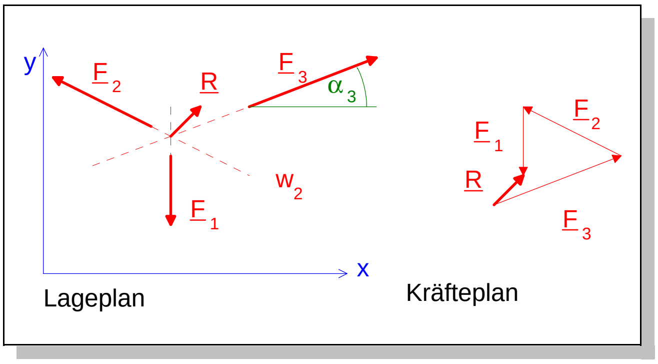


Bild 1.16: Resultierende eines zentralen Kräftesystems

1.3.1.2 Rechnerische Lösung

Die resultierende Kraft $\underline{R}$ ergibt sich aus der vektoriellen Addition der Einzelkräfte $\underline{F}_i$.

$$\underline{R}=\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}=\underline{F}_1+\underline{F}_2+\underline{F}_3=\begin{bmatrix} F_x+F_x+F_x \\ F_y+F_y+F_y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{R}=\sum_{i=1}^{n}\underline{F}_i} \qquad \text{Gl. (1.8)}$$

Für die praktische Berechnung eignet sich am besten eine Tabelle

i	$F_{x,i}$	$F_{y,i}$	$F_{z,i}$
1	$F_{x,1}$	$F_{y,1}$	$F_{z,1}$
2	$F_{x,2}$	$F_{y,2}$	$F_{z,2}$
3	$F_{x,3}$	$F_{y,3}$	$F_{z,3}$
Σ	$\Sigma F_{x,i}$	$\Sigma F_{y,i}$	$\Sigma F_{z,i}$

1.3.2 Ersatzkraft in einem parallelen Kräftesystem bestehend aus zwei Kräften

1.3.2.1 Zeichnerische Lösung

Mit den beiden kollinearen, also auf einer gemeinsamen Wirkungslinie liegenden, gleich groß aber entgegengesetzt wirkenden Hilfskräften $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ werden zwei zentrale Kräftesysteme erzeugt und damit die beiden Hilfsresultierenden $\underline{R}_1$ und $\underline{R}_2$ erzeugt. Die beiden Hilfsresultierenden bilden wieder ein zentrales Kräftesystem, aus dem die Resultierende $\underline{R}$ schließlich hervorgeht.

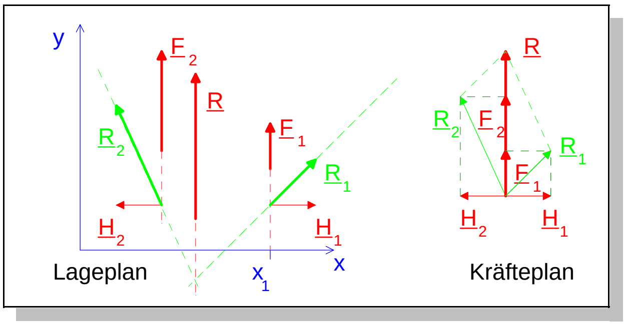


Bild 1.17: Resultierende zweier paralleler Kräfte

1.3.2.2 Rechnerische Lösung

Die Größe und Richtung der Resultierenden ergibt sich wie immer zu

$$\boxed{\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2} \qquad \text{Gl. (1.8)}$$

weil sich die Hilfskräfte voraussetzungsgemäß aufheben. Die Lage der Wirkungslinie lässt sich aus gleichen Drehmomenten der vorhandenen Kräfte und der Ersatzkraft herleiten.

1.3.3 Ersatzkraft in einem parallelen Kräftesystem bestehend aus zwei entgegengesetzten Kräften

1.3.3.1 Zeichnerische Lösung

Die beiden gleich großen entgegengesetzten Hilfskräfte führen wieder zu einem parallelen Kräftesystem. Die Resultierende verschwindet.

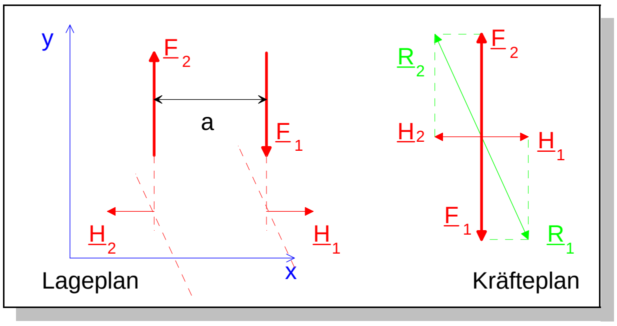


Bild 1.18: Das Kräftepaar

1.3.3.2 Rechnerische Lösung

$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{H}_1 + \underline{F}_2 + \underline{H}_2 = \underline{0}$

$$\boxed{\underline{R} = \underline{0}} \quad \boxed{M = -F_1 \cdot a = -F_2 \cdot a} \qquad \text{Gl. (1.9)}$$

Das Kräftepaar besitzt keine Ersatzkraft, wohl aber ein Drehmoment. Das Drehmoment ist invariant (es verändert nicht seinen Wert) bezüglich eines frei gewählten Drehpunktes!

1.3.4 Ersatzkraft eines parallelen symmetrischen Kräftesystems

Die Resultierende eines symmetrischen parallelen Kraftsystems hat ihre Wirkungslinie auf der Symmetrielinie.

$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_n + \underline{F}'_1 + \underline{F}'_2 + ... + \underline{F}'_n$

$$\boxed{\underline{R} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i} \qquad \text{Gl. (1.10)}$$

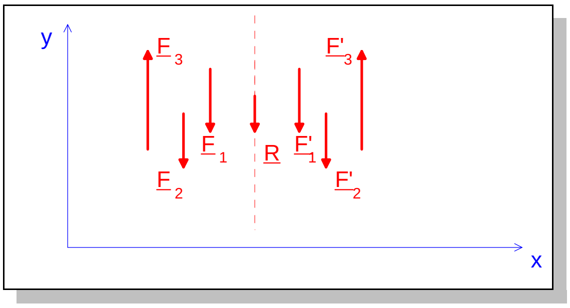


Bild 1.19: Resultierende eines symmetrischen parallelen Kraftsystems

1.3.5 Ersatzkraft eines allgemeinen Parallelkraftsystems

1.3.5.1 Rechnerische Lösung

$\underline{R} = \underline{F}_1 + ... + \underline{F}_i + ... + \underline{F}_n$

$$\boxed{\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i} \qquad \text{Gl. (1.11)}$$

$$\boxed{x_R = \frac{1}{|\underline{R}|} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \cdot x_i} \qquad \text{Gl. (1.12)}$$

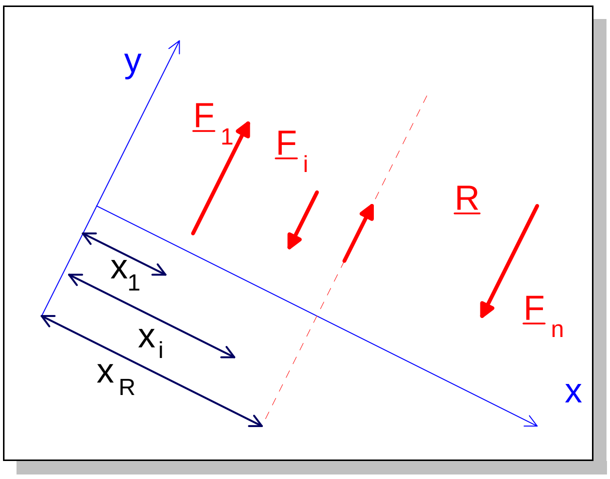


Bild 1.20: Resultierende eines allgemeinen Parallelkraftsystems

1.3.5.2 Zeichnerische Lösung (Seileckverfahren)

Das Seileck kann man sich als geschlossenes Seil, an dem an den Knickpunkten sowohl die gegebenen Kräfte als auch die Resultierende angreifen. Im Kräfteplan bildet jede Kraft mit ihren anliegenden Polstrahlen (= Seilkräfte) ein geschlossenes Krafteck. Das heißt jede Kraft steht mit ihren Seilkräften im Gleichgewicht.

Vorgehensweise:
Im Lageplan werden die Wirkungslinien aller Kräfte aufgetragen.
Im Kräfteplan (Polplan) wird die Größe der Resultierenden aus den vorhandenen Kräften bestimmt.
Im Kräfteplan wird ein für das weitere Zeichnen günstig gelegener Pol frei gewählt.
Im Polplan (Kräfteplan) sind der Pol mit dem Anfangspunkt und dem Endpunkt jeder Kraft mit einem nummerierten Polstrahl zu verbinden. Vom Pol zum Anfangspunkt der ersten Kraft führt der Polstahl "0". Die Resultierende wird vom ersten und letzten Polstrahl eingeschlossen.
Die Polstrahlen, die eine Kraft einschließen, schneiden sich als Seilstrahlen auf der Wirkungslinie dieser Kraft im Lageplan. Polstrahl und Seilstrahl sind parallel zueinander.
Der Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahls ist ein geometrischer Ort der Wirkungslinie der Resultierenden. Die Richtung der Resultierenden ist aus dem Polplan zu übertragen.

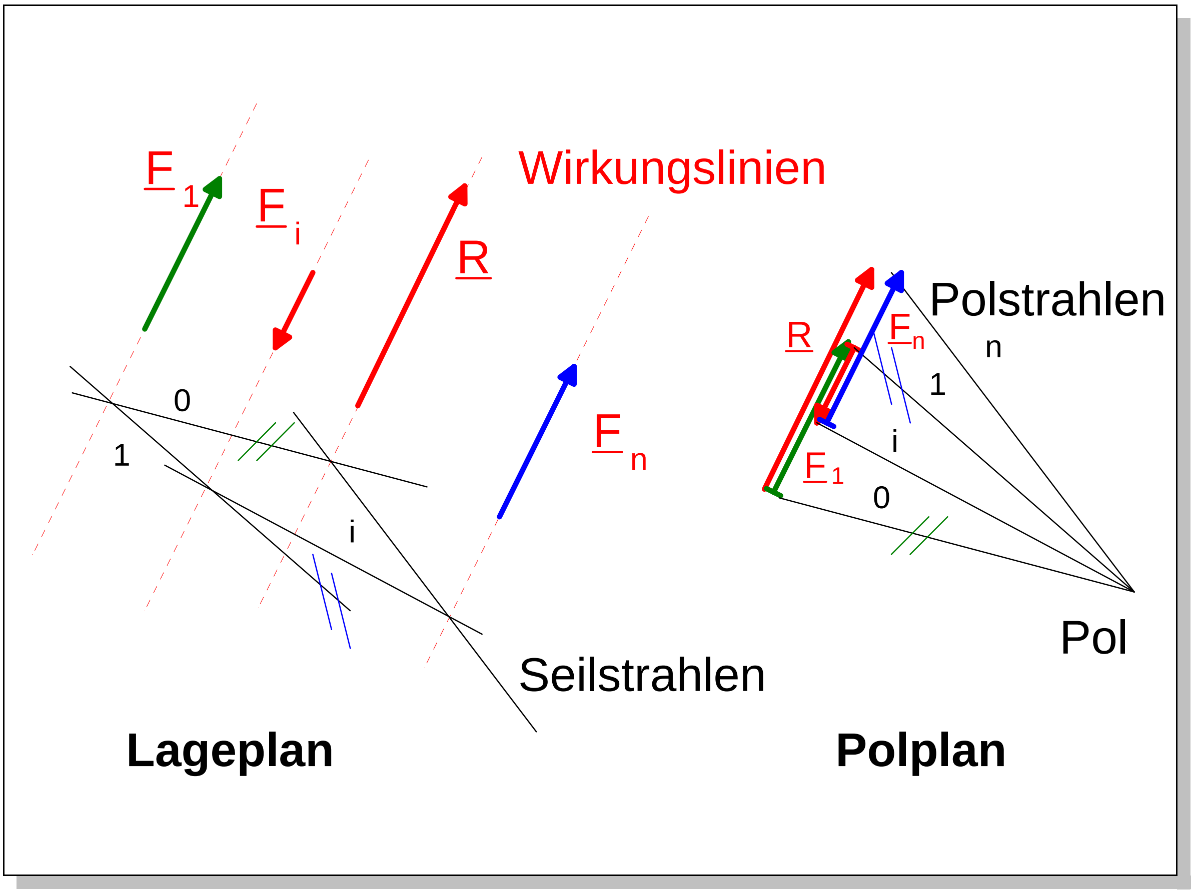


Bild 1.21: Seileckverfahren im parallelen Kraftsystem

Im Polplan (Kräfteplan) findet sich für jede Kraft ein Ersatzsystem. Die Kraft $\underline{F}_1$ wird beispielsweise durch die Polstrahlen 0 und 1 und die Kraft $\underline{F}_n$ durch die Polstrahlen i und n ersetzt . Bis auf die Polstrahlen 0 und n heben sich alle anderen Polstrahlen (Kräfte) auf. Die Kraft i findet sich zum Beispiel in der Ersatzgruppe von $\underline{F}_i$ und entgegengesetzt in der Ersatzgruppe von $\underline{F}_n$. Genau die beiden Polstrahlen, die nicht ausgelöscht werden, bilden das Ersatzsystem für die Resultierende.

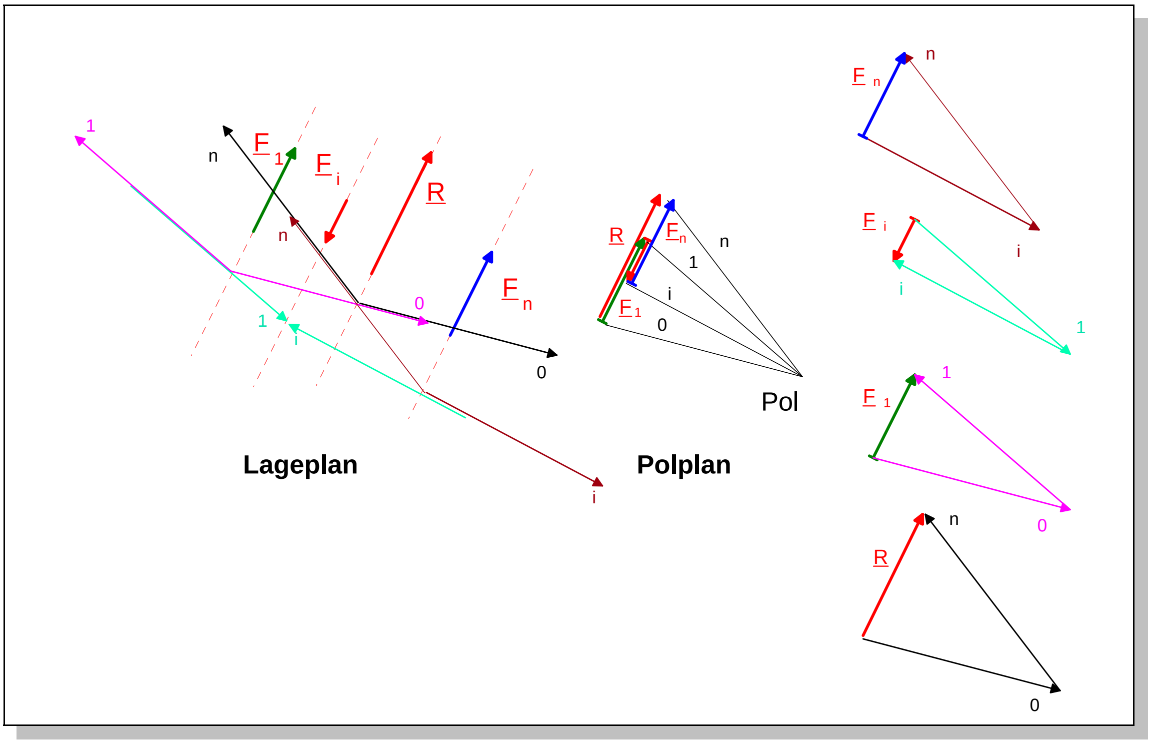


Bild 1.22: Ersatzkräfte im Seileckverfahren

1.3.6 Ersatzkraft eines allgemeinen Kräftesystems

1.3.6.1 Rechnerische Lösung

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \ldots + \underline{F}_i + \ldots + \underline{F}_n \qquad \text{Gl. (1.13)}$$

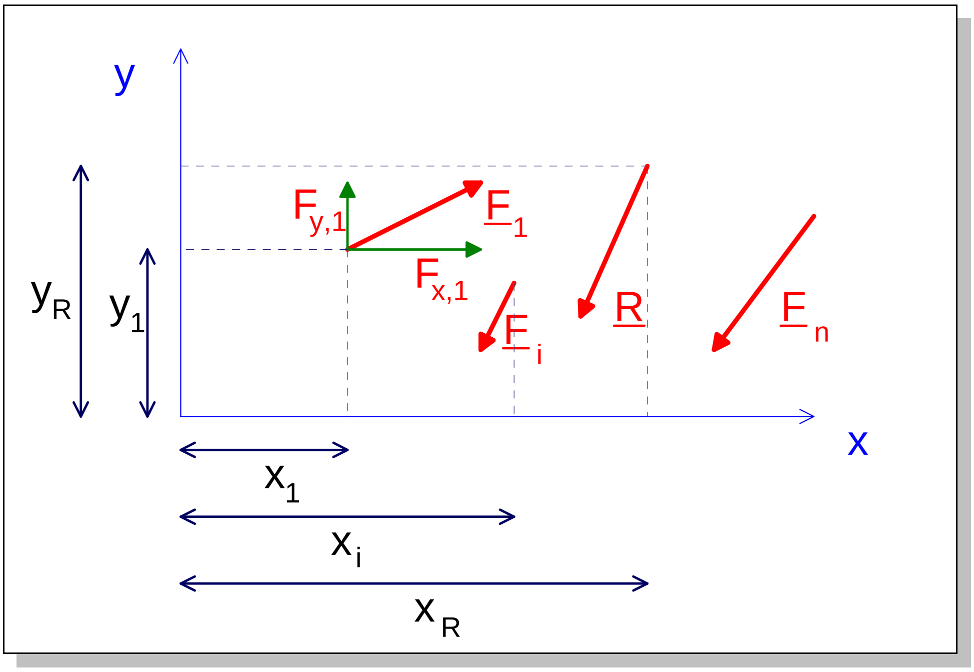


Bild 1.21: Rechnerische Lösung der Ersatzkraft im allgemeinen Kräftesystem

Das Drehmoment der Resultierenden ist $M = x_R \cdot R_y - y_R \cdot R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{y,i} \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} F_{x,i} \cdot y_i$. Daraus lassen sich Fälle:

$$x_R = \frac{1}{R_y} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{y,i} \cdot x_i \;\mid\; R_x \neq 0, R_y \neq 0 \qquad \text{Gl. (1.14a)}$$

$$x_R = \frac{1}{R_y} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} F_{y,i} \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} F_{x,i} \cdot y_i \right] \;\mid\; R_x = 0, R_y \neq 0 \qquad \text{Gl. (1.14b)}$$

$$y_R = \frac{1}{R_x} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{x,i} \cdot y_i \;\mid\; R_x \neq 0, R_y \neq 0 \qquad \text{Gl. (1.15a)}$$

$$y_R = \frac{1}{R_x} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} F_{y,i} \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} F_{x,i} \cdot y_i \right] \;\mid\; R_x \neq 0, R_y = 0 \qquad \text{Gl. (1.15b)}$$

ableiten.

1.3.6.2 Zeichnerische Lösung (Seileckverfahren)

Die Vorgehensweise ist genau so wie beim parallelen Kräftesytem

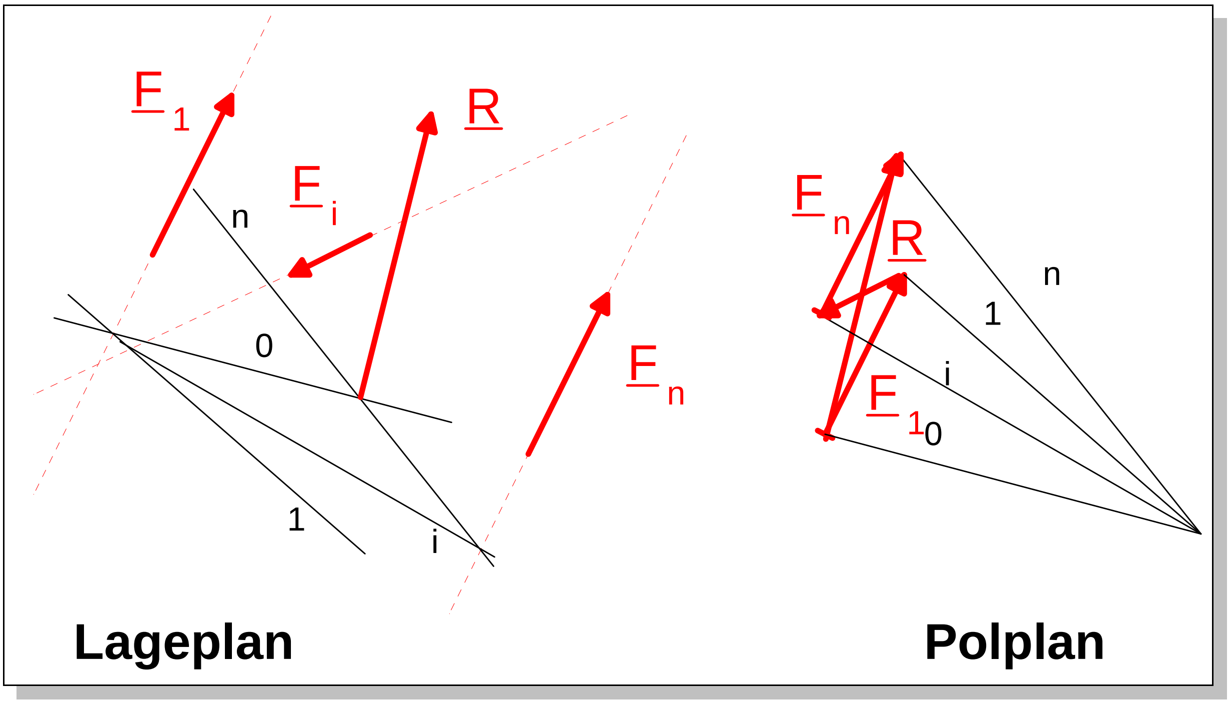


Bild 1.22: Zeichnerische Lösung des allgemeinen Kräftesystems mittels Seileckverfahren

1.3.6.3 Zeichnerische Lösung (zentrale Kräftegruppen)

Vorgehensweise:

- Aus zwei beliebigen Kräften, beispielsweise F_i und F_n, wir eine Teilresultierende $R_{i,n}$ geformt und deren Wirkungslinie im Schnittpunkt der Wirkungslinien der beiden beteiligten Kräfte fixiert.
- Aus der Teilresultierenden und einer weiteren Kraft wird eine neue Teilresultierende gebildet.
- Dieser Prozess wird solange fortgeführt, bis die letzte Teilresultierende mit der letzten verbleibenden Kraft schließlich die Resultierende Ersatzkraft ergibt.

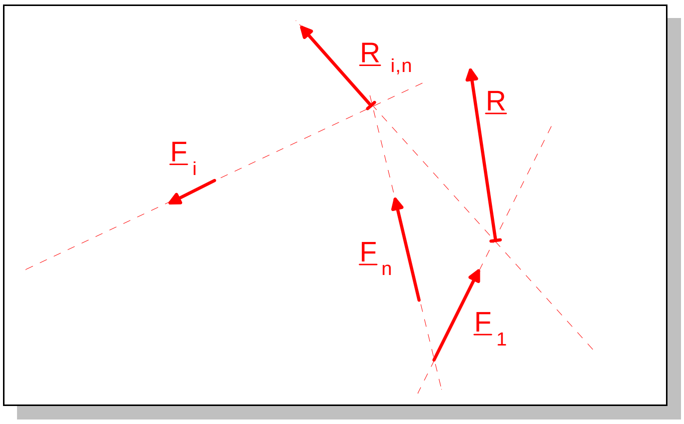


Bild 1.23: Zeichnerische Lösung des allgemeinen Kräftesystems mittels zentraler Kräftegruppen

Behandlung von einzelnen Drehmomenten in Kräftegruppen

Jedes Drehmoment lässt sich als Kräftepaar darstellen. Entweder ist die Kraft frei wählbar, dann muss der Hebelarm rechnerisch ermittelt werden oder der Hebelarm wird frei gewählt, dann ergeben sich die Kräfte dazu.

Sinnvoller Weise wählt man eine Kraft des Kräftepaars so, dass eine der vorhandenen Kräfte ausgelöscht wird. Das entspricht einer Verschiebung der Wirkungslinie der an der alten Stelle ausgelöschten Kraft.

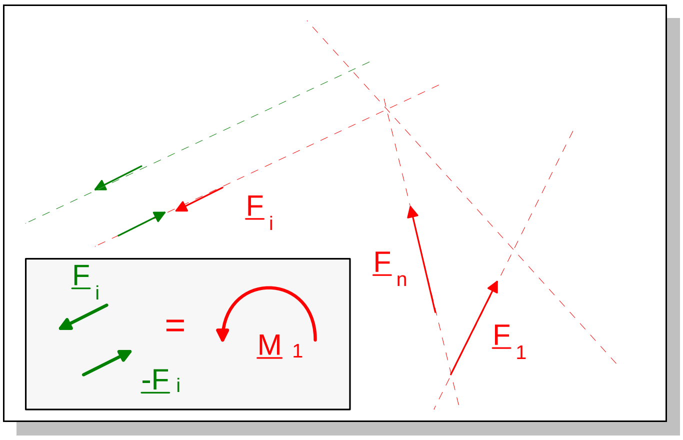


Bild 1.24: Einzelmomente in allgemeinen Kräftesystemen

1.4 Zerlegung von Kräften

1.4.1 Zerlegung einer Kraft in zwei Richtungen

Die Kraft $\underline{F}$ lässt sich eindeutig in die beiden Richtungen 1 und 2 zerlegen, wenn alle Kräfte ein zentrales Kräftesystem bilden.

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{w}_1 \cdot \lambda_1 + \underline{w}_2 \cdot \lambda_2 \qquad \text{Gl. (1.15)}$$

Das sind zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten λ_1 und λ_2.

Eine Zerlegung in ein zentrales Kräftesystem mit drei oder mehr unabhängigen Richtungen ist nicht eindeutig möglich.

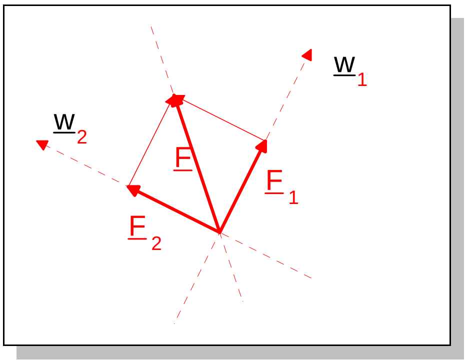


Bild 1.27: Kraftzerlegung in zwei Richtungen

1.4.2 Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Kräfte

Es ist die Kraft $\underline{F}$ und die beiden Wirkungslinien $\underline{w}_1$ und $\underline{w}_2$ gegeben.

Vorgehensweise:

- Auf der Wirkungslinie der Kraft $\underline{F}$ werden zwei willkürlich gewählte Seilstrahlen 0 gezeichnet und 1 zum Schnitt mit den Wirkungslinien der noch unbekannten Kräfte $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ gebracht.
- Die Schlusslinie s schließt das Seileck 0-1-s ab.
- Mit der Kraft $\underline{F}$ und den Polstrahlen 0 und 1 lässt sich der Polplan darstellen. Der Polstrahl s geschnitten mit der Kraft $\underline{F}$ liefert die Unterteilung in $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$.

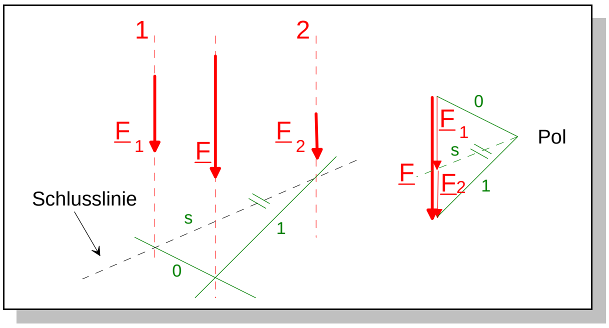


Bild 1.26: Zerlegung einer Resultierenden in zwei parallele Kräfte

1.4.3 Zerlegung einer Kraft in drei nicht zentrale Richtungen

Es ist eine Kraft $\underline{F}$ und drei Wirkungslinien $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$ und $\underline{w}_3$ so gegeben, dass sich die vier Wirkungslinien nicht in einem Punkt schneiden.

Vorgehensweise:

- Die Wirkungslinie der Kraft $\underline{F}$ wird zum Schnitt mit der Wirkungslinie einer der drei Kräfte $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ oder $\underline{F}_3$ gebracht (hier Wirkungslinie 1).
- Verbindet man diesen gefundenen Schnittpunkt mit dem Schnittpunkt der beiden übrigen Wirkungslinien, so erhält man die CULLMANNSCHE Gerade.
- Im Lageplan stellt die CULLMANNSCHE Gerade die Wirkungslinie einer Hilfskraft $\underline{C}$ dar. Sie bildet mit der Wirkungslinie der verwendeten Kraft $\underline{F}_1$ und der Wirkungslinie der gegebenen Kraft $\underline{F}$ ein zentrales Kräftesystem. Damit lässt sich die Kraft F in die Richtungen der CULLMANNSCHEN Geraden und der Richtung von $\underline{F}_1$ zerlegen.
- Die Hilfskraft $\underline{C}$ kann mit den bekannten Mitteln für zentrale Kraftsysteme in die Richtungen 2 und 3 weiter zerlegt werden.

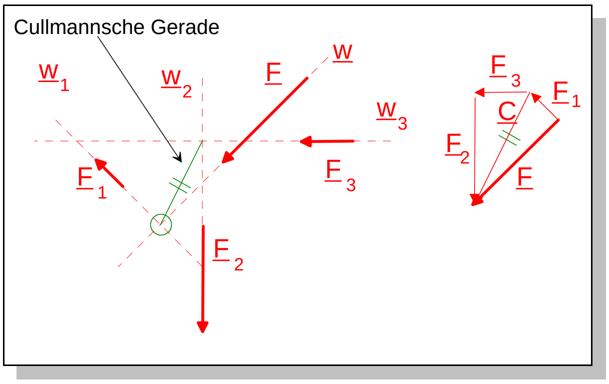


Bild 1.27: Zerlegung einer Kraft in drei nicht zentrale Richtungen

2 Gleichgewicht

2.1 Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene

Will man das ebene Dreieck ABC aus der Position 1 in die Position 3 verbringen, so kann das durch eine Verdrehung um $\Delta\alpha$ (Rotation) um die z- Achse in die Zwischenposition 2 und eine anschließende Verschiebung (Translation) in die x- um Δx und y- Richtung um Δy in die gewünschte Position 3 geschehen. Die Reihenfolge der Transformationsarten - Rotation vor Translation oder Translation vor Rotation - ist nicht gleichgültig.

Translationen werden durch Kräfte und Rotationen durch Momente verursacht.

Die unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers nennt man Freiheitsgrade. Ein ebener Starrer Körper (Scheibe) hat in seiner Ebene zwei Freiheitsgrade der Translation und einen Freiheitsgrad der Rotation.

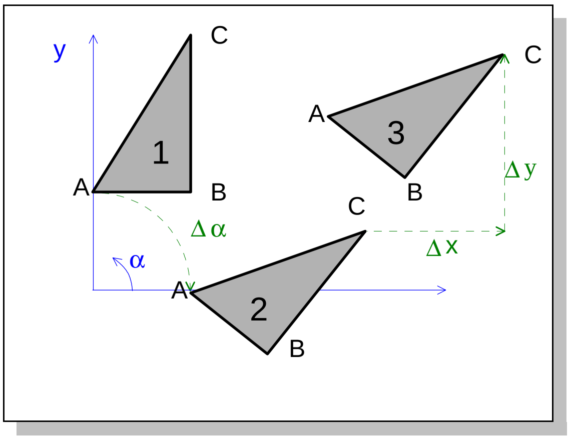


Bild 2.1: Die Freiheitsgrade der Ebene

2.2 Freiheitsgrade eines Körpers im Raum

Ein dreidimensionaler Körper hat im Raum drei Freiheitsgrade der Translation und drei Freiheitsgrade der Rotation. Genauso wie für die allgemeine Translation des Punktes A drei unterschiedliche Verschiebungen Δx, Δy und Δz nötig sind benötigt man für eine allgemeine Rotation auch drei Drehwinkel um x-, y- und z-Achse.

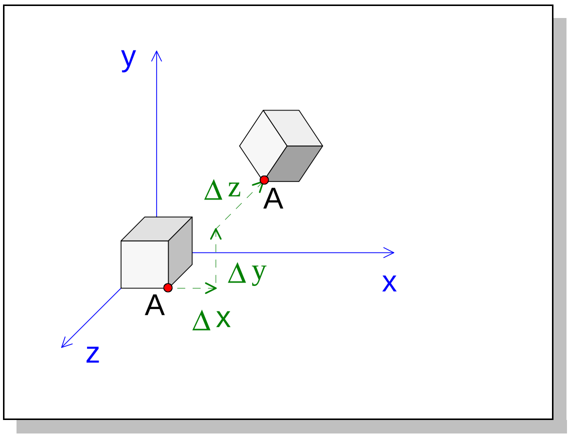


Bild 2.2: Die Freiheitsgrade des Raumes

2.2.1 Auflagerbedingungen

2.2.1.1 Bewegliche Lager

Das bewegliche Lager unterbindet die Translation in die Richtung des Pfeils in Bild 2.2.3. Die Translation quer zur unterbundenen Richtung und eine Rotation ist weiterhin möglich.

Dieses Auflager besitzt eine Festhaltung (Fesselung) und zwei Freiheitsgrade.

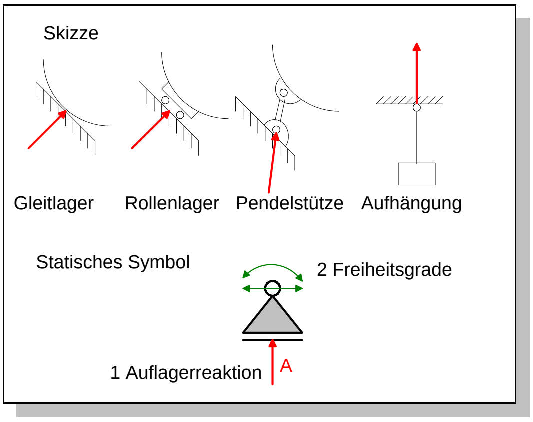


Bild 2.3: Verschiebliches Kipplager

2.2.1.2 Kipplager und Gelenke

Das Gelenk und das Kipplager unterbinden die Translationen in alle Richtungen. Die Rotation ist weiterhin möglich.

Dieses Auflager besitzt zwei Festhaltungen (Fesselungen) und einen Freiheitsgrad der Rotation.

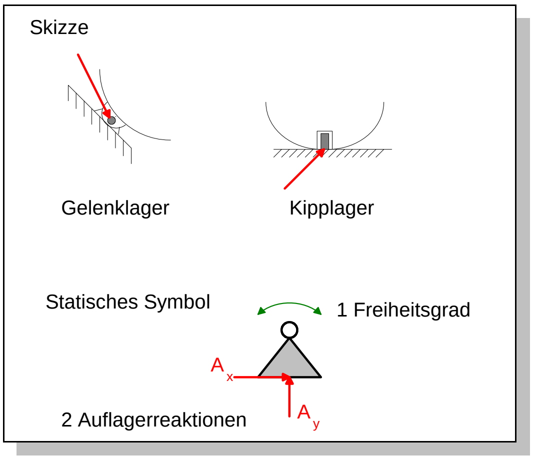


Bild 2.4: Festes Kipplager

2.2.1.3 Führungen und Einspannungen

Bei einer Führung wird ein Freiheitsgrad der Translation und der Freiheitsgrad der Rotation unterbunden. Ein Freiheitsgrad der Translation bleibt erhalten.

Die Einspannung dagegen unterbindet alle Bewegungsmöglichkeiten.

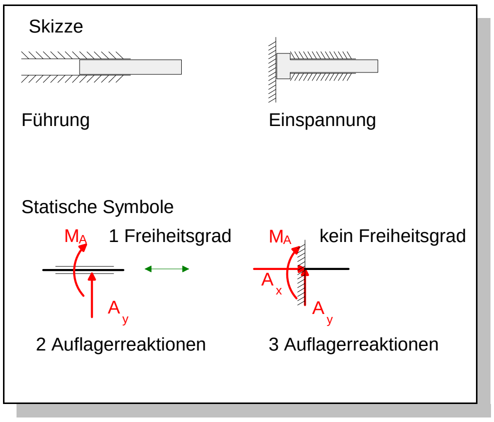


Bild 2.5: Führungen und Einspannungen

2.2.2 Statische Bestimmtheit

2.2.2.1 Regelfälle

Eine starre Scheibe hat drei Freiheitsgrade in der Ebene und benötigt demnach mindestens drei Festhaltungen um unbeweglich gelagert zu sein.

An Zwischengelenken werden zusätzlich zwei Festhaltungen aktiviert. Die Tragwerksteile können sich am Gelenk nicht gegeneinander verschieben wohl aber verdrehen.

Besteht ein Tragwerk aus n Teilen, ist die Anzahl der Unbekannten $3 \cdot n$, die aus a Gleichungen für Auflagerbedingungen und z Gleichungen für Zwischenlagerbedingungen ermittelt werden.

- $a + z = 3 \cdot n \Rightarrow$ statisch bestimmt (brauchbares Tragwerk) Gl. (2.1)
- $a + z > 3 \cdot n \Rightarrow$ statisch unbestimmt (brauchbares Tragwerk, aber nicht elementar berechenbar) Gl. (2.2)
- $a + z < 3 \cdot n \Rightarrow$ statisch überbestimmt (labiles Tragwerk) Gl. (2.3)

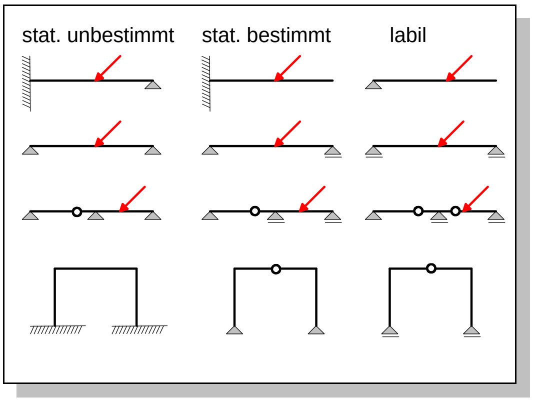


Bild 2.6: Statische Bestimmtheit von Tragwerken

2.2.2.2 Sonderfälle

Wenn die Gleichungen für die Festhaltungen nicht unabhängig voneinander sind, dann sind die Tragwerke, die nach dem Abzählkriterium als statisch bestimmt gelagert gelten, trotzdem labil!

Das ist bei Pendelstützen deren Wirkungslinien sich alle in einem Punkt schneiden oder deren Wirkungslinien alle parallel zueinander verlaufen immer der Fall.

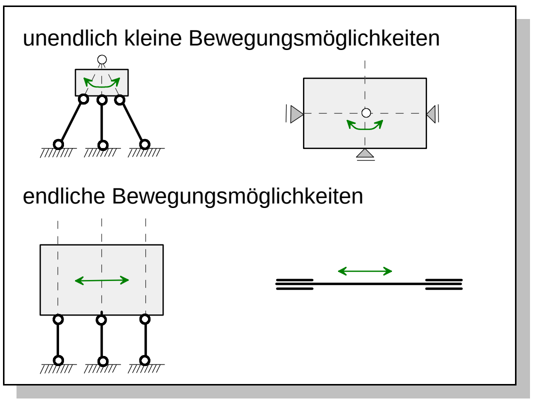


Bild 2.7: Labile Tragwerke

2.2.3 Gleichgewichtsbedingung

Die Kraft $\underline{F}$ greift im Schwerpunkt S der starren Scheibe auf der Wirkungslinie 1 an und hat bezüglich des frei gewählten Drehpunktes A das statische Drehmoment $M_A = -F \cdot a$ und bezüglich des frei gewählten Drehpunktes B das statische Drehmoment $M_B = +F \cdot b$. Der Vektor des Momentes um A zeigt in die Beanspruchungsebene hinein, der um B aus der Ebene heraus.

Setzt man nun eine Kraft $\underline{X}$ an, die der Kraft $\underline{F}$ das Gleichgewicht hält, dann darf die Scheibe sich weder verschieben noch verdrehen. Das heißt, nach der Addition der beiden Kräfte darf keine resultierende Kraft und kein resultierendes Moment über bleiben. Andernfalls käme es zu einer unerwünschten Translation und Rotation. Die Bedingung für das Gleichgewicht bezüglich Verschiebung lautet:

$\underline{X} = -\underline{F}$ oder $\underline{F} + \underline{X} = \underline{0}$

$\underline{M}_A = -\underline{F} \cdot a + \underline{X} \cdot a = \underline{0}$ und $\underline{M}_B = +\underline{F} \cdot b - \underline{X} \cdot b = \underline{0}$.
Das heißt, die Kraft $\underline{X}$ muss auf der Wirkungslinie 1 angreifen.

Bei Kraftsystemen genügt es, wenn die Resultierenden im Gleichgewicht stehen. Man spricht dann von Gleichgewichtsgruppen.

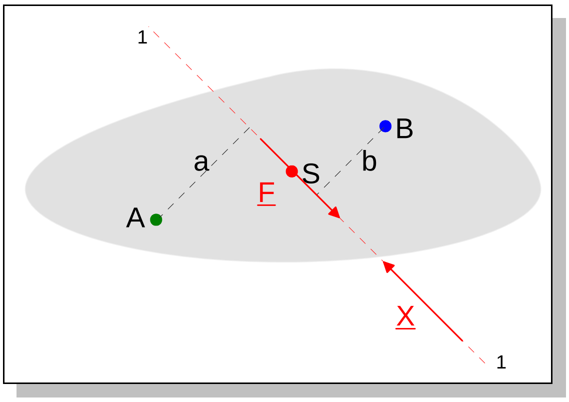


Bild 2.8: Bedingungen für das Gleichgewicht

Die drei folgenden Bedingungen sind ein hinreichendes Kriterium für Gleichgewicht.

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \qquad \boxed{\Sigma F_y = 0} \qquad \text{Gl. (2.4)}$$

$$\boxed{\Sigma M_A = 0} \qquad \text{Gl. (2.5)}$$

Zur Kontrolle kann eine Momentenbedingung um einen anderen Punkt, z.B. $\Sigma M_B = 0$ herangezogen werden.

2.2.3.1 Ermittlung der Auflagerreaktionen

2.2.3.1.1 Rechnerische Lösung am Einfeldbalken

Drei Gleichgewichtsbedingungen liefern die drei unbekannten Auflagerreaktionen A_x, A_y und B.

$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 = -F_{1,y} \cdot a + F_B \cdot L \Rightarrow \qquad F_B = \frac{F_{1,y} \cdot a}{L}$

$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 = +F_{1,y} \cdot b - F_{A,y} \cdot L \Rightarrow \qquad F_{A,y} = \frac{F_{1,y} \cdot b}{L}$

$\rightarrow \Sigma F_x = 0 = +F_{1,x} + F_{A,x} \Rightarrow \qquad F_{A,x} = -F_{1,x}$

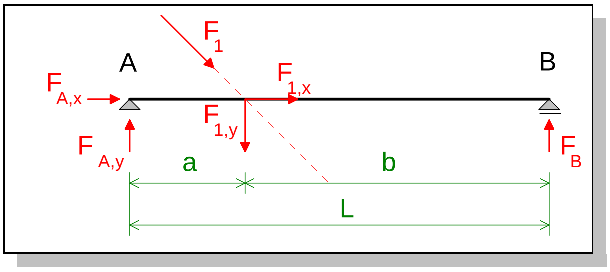


Bild 2.9: Lösung der Auflagerkräfte am Einfeldbalken

$F_{A,x}$ hat ein negatives Vorzeichen. Das heißt $F_{A,x}$ zeigt entgegen der ursprünglich angenommenen Richtung.

Kontrolle:
$\uparrow \Sigma F_y = 0 = -F_{1,y} + F_{A,y} + F_B = -F_{1,y} + \frac{F_{1,y} \cdot b}{L} + \frac{F_{1,y} \cdot a}{L} = -F_{1,y} + F_{1,y} \cdot (\frac{b}{L} + \frac{a}{L}) = 0$

2.2.3.1.2 Zeichnerische Lösung am Einfeldbalken

Aus den äußeren Lasten wird eine Resultierende R bestimmt.

Die Wirkungslinie der Resultierende geht durch den Schnittpunkt C der Wirkungslinien beider Kräfte F_1 und F_2.

Von der Auflagerreaktion F_B ist die Richtung bekannt.

Die Wirkungslinie der Kraft F_A muss in dem Schnittpunkt der Wirkungslinien der Auflagerreaktion F_B und der Resultierenden R , also Punkt D, liegen. Andernfalls bliebe ein statisches Drehmoment über.

Die Verbindung des Punktes D mit dem Auflager A liefert die Wirkungslinie der Auflagerreaktion F_A.

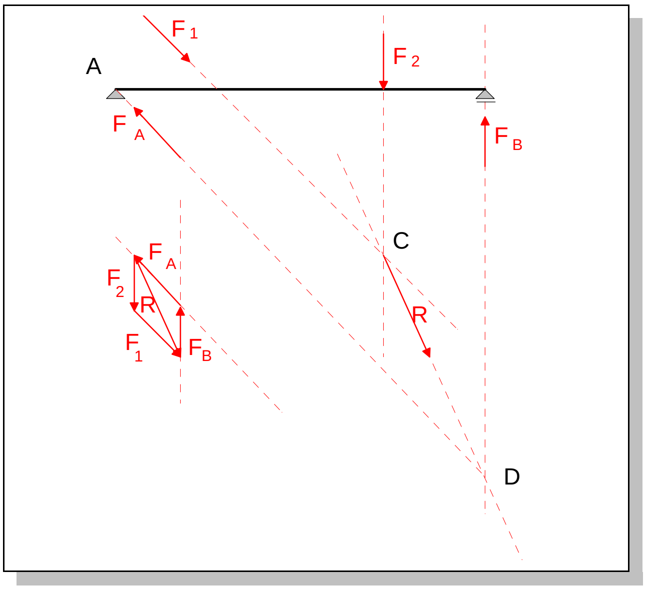


Bild 2.10: Zeichnerische Lösung der Auflagerkräfte am Einfeldbalken

2.2.3.1.3 Rechnerische Lösung am Zweifeldbalken

Das Tragwerk wird am Gelenk in zwei Teile zerlegt und für beide Teile getrennt das Gleichgewicht formuliert.

Man beginnt an der Seite, an der sich die Gelenkkräfte am leichtesten ausrechnen lassen. Beim vorliegenden Fall ist das Balken 1.

Die nun bekannten Gelenkkräfte wirken auf den anderen Teil, hier Balken 2, als äußere Lasten und sind als solche in das Gleichgewicht mit einzubeziehen.

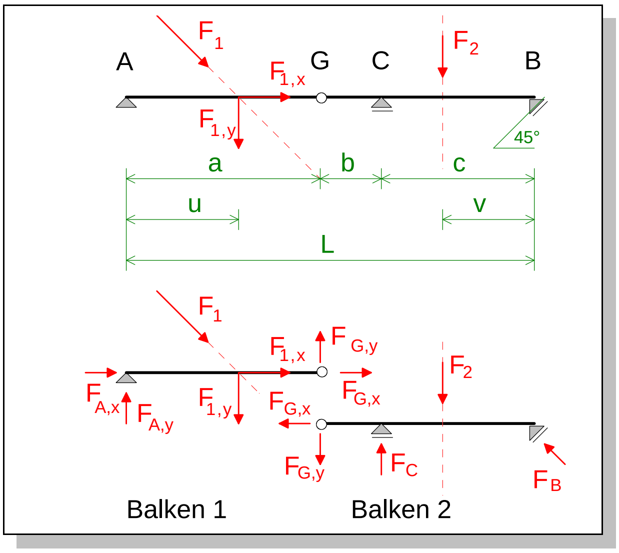


Bild 2.11: Rechnerische Lösung der Auflagerkräfte am Zweifeldbalken

Vertikale Komponenten am Balken 1:

$$\curvearrowleft \Sigma M_A=0=-F_{1,y}\cdot u+F_{G,y}\cdot a \Rightarrow \qquad F_{G,y}=\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_G=0=+F_{1,y}\cdot(a-u)-F_{A,y}\cdot a \Rightarrow \qquad F_{A,y}=\frac{F_{1,y}\cdot(a-u)}{a}$$

Vertikale Komponenten am Balken 2:

Neigung des Auflagers B 45° $\Rightarrow F_{B,x} = F_{B,y}$

$$\curvearrowleft \Sigma M_B=0=+F_2\cdot v-F_C\cdot c+F_{G,y}\cdot(a+b)\Rightarrow \qquad F_C=\frac{F_2\cdot v+\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}\cdot(b+c)}{c}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_C=0=-F_2\cdot(c-v)+F_{G,y}\cdot b+F_{B,y}\cdot c\Rightarrow \qquad F_{B,y}=\frac{F_2\cdot(c-v)-\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}\cdot b}{c}=F_{B,x}$$

Horizontale Komponenten am Balken 2:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 = + F_{B,x} + F_{G,x} \Rightarrow \qquad F_{G,x}=-F_{B,x}=-\frac{F_2\cdot(c-v)-\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}\cdot b}{c}$$

($F_{G,x}$ zeigt wegen des negativen Vorzeichens entgegen der angenommenen Richtung)

Horizontale Komponenten am Balken 1:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 = + F_{A,x} + F_{1,x} + F_{G,x} \Rightarrow \qquad F_{A,x}=-F_{1,x}+\frac{F_2\cdot(c-v)-\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}\cdot b}{c}$$

Kontrolle der Vertikalkräfte:

$$\uparrow \Sigma F_y=0=-F_{1,y}-F_2+F_{A,y}+F_{B,y}+F_C=-F_{1,y}-F_2+\frac{F_{1,y}\cdot(a-u)}{a}+\frac{F_2\cdot(c-v)-\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}\cdot b}{c}+\frac{F_2\cdot v+\frac{F_{1,y}\cdot u}{a}\cdot(b+c)}{c}=$$

$$=-F_{1,y}-F_2+\frac{F_{1,y}\cdot(a-u)}{a}-\frac{F_{1,y}\cdot u\cdot b}{a\cdot c}+\frac{F_{1,y}\cdot u\cdot(b+c)}{a\cdot c}+\frac{F_2\cdot(c-v)}{c}+\frac{F_2\cdot v}{c}=-F_{1,y}-F_2+\frac{F_{1,y}\cdot(a-u)}{a}+\frac{F_{1,y}\cdot(u\cdot b-u\cdot b+u\cdot c)}{a\cdot c}+\frac{F_2\cdot(c-v+v)}{c}=$$

$$=-F_{1,y}-F_2+\frac{F_{1,y}\cdot(a-u)}{a}+\frac{F_{1,y}\cdot u\cdot c}{a\cdot c}+F_2=-F_{1,y}-F_2+\frac{F_{1,y}\cdot(a-u)}{a}+\frac{F_{1,y}\cdot u\cdot c}{a\cdot c}+F_2=-F_{1,y}+F_{1,y}=0$$

2.2.4 Stabilität Starrer Körper

2.2.4.1 Kippmoment

Wird ein Körper K am Punkt B an einer Bewegung in der Auflagefläche A-A gehindert und greift die Kraft F am Körper oberhalb der Auflagefläche am Schwerpunkt S an, dann entsteht ein Kippmoment um den Punkt B. Aus der Ebene A-A ragende Hindernisse oder große Reibung (siehe Abschnitt Reibung) können Auslöser dieser Behinderung sein.

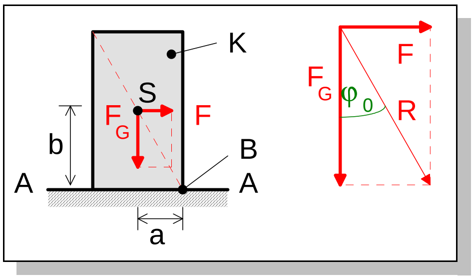


Bild 2.12: Kippmoment

Das maximale Kippmoment, das übertragen werden kann, ergibt sich aus:

$$M_k = -a \cdot F_G. \qquad \text{Gl. (2.6)}$$

Bei $F \rightarrow F_{max}$ trifft die Wirkungslinie der Resultierenden der beiden Kräfte F_G und F_{max} den Punkt B; der Körper ist im labilen Gleichgewicht. Jede noch so kleine weitere Erhöhung der Kraft F lässt den Körper kippen.

Ist die Resultierende innerhalb der Kontaktfläche, so kann der Körper K nicht kippen, er ist stabil. Unter Umständen kann er jedoch gleiten (siehe Abschnitt Reibung).

3 Schwerpunktsberechnung

3.1 Gleichgewichtsbedingung am Schwerpunkt

Die infinitesimal kleine Kraft,
$d\underline{q} = \underline{g} \cdot dm = \underline{g} \cdot \varrho \cdot h \cdot dA,$ Gl. (3.1)
greift an jedem Massenpunkt der starren Scheibe mit der Dicke h in senkrechter Richtung an und hat bezüglich des Schwerpunktes S das statische Drehmoment
$d\underline{M}_s = \underline{r} \times \underline{g} \cdot \varrho \cdot h \cdot dA$. Gl. (2.3.2)

Der Ortsvektor $\underline{r}$ beinhaltet die Hebelarmkomponenten x und y. $\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Summiert man alle diese Momente dM_s auf,
$\underline{M}_s = \int d\underline{M}_s = \int\int \varrho \cdot \underline{r} \times \underline{g} \cdot h \cdot dx \cdot dy,$ Gl. (3.3)
muss das resultierende Moment M_s Null sein, anders ist das Gleichgewicht nicht gegeben.
Die Resultierende aller Kräfte ergibt sich aus
$\underline{G} = \int\int \varrho \cdot \underline{g} \cdot h \cdot dx \cdot dy$. Gl. (3.4)

Ihre Wirkungslinie ist eine Schwerlinie (s_1, s_2, ...). Alle Schwerlinien schneiden sich in einem Schnittpunkt, dem Schwerpunkt.

Wird ein Körper in seinem Schwerpunkt unterstützt, ist er im (labilen) Gleichgewicht.

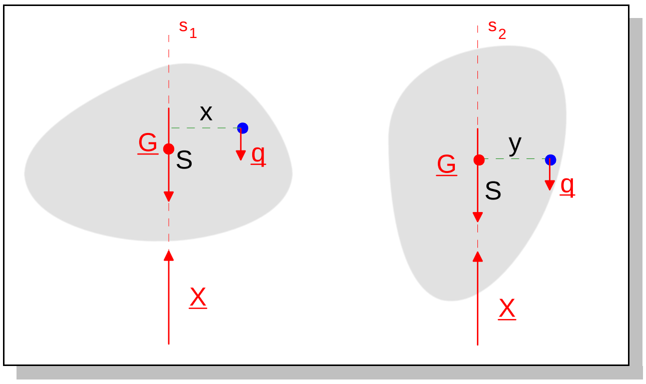


Bild 3.1: Gleichgewichtsbedingung am Schwerpunkt

3.2 Schwerpunkt von Punktmassen

Beide Massen in Bild 3.2 besitzen bezogen auf den Drehpunkt O, dem Ursprung des Koordinatensystems, ein statisches Drehmoment um die z- Achse wie folgt: $M_O = -x_1 \cdot F_{G1} - x_2 \cdot F_{G2}$.

Eine Ersatzkraft F_G im Schwerpunkt muss um die z- Achse das gleiche Moment $M_O = -x_s \cdot F_G = -x_s \cdot (F_{G1} + F_{G2})$ besitzen.

Somit ist der Abstand der Schwerlinie s_1 vom Ursprung $x_s = \frac{x_1 \cdot F_{G1} + x_2 \cdot F_{G2}}{F_G}$. Gl. (3.5)

Stellt man sich nun die Gewichtskräfte nicht in negativer y-Richtung, sondern in negativer z-Richtung vor und betrachtet dagegen die Momente um die y-Achse, so ergibt sich ebenso die Schwerlinie s_1.

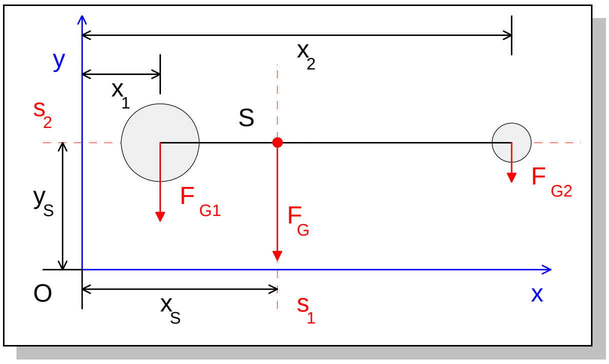


Bild 3.2: Schwerpunkt von ebenen Punktmassen

Betrachtet man nun die Momente um die x-Achse, bei Kraftrichtung senkrecht zur Bildfläche, so ergibt sich die Schwerlinie s_2.

Genauer gesagt handelt es sich eigentlich um Schwerebenen , die senkrecht auf der Bildfläche stehen.

Der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien ergibt den Schwerpunkt S.

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i \cdot F_{Gi}}{\sum F_{Gi}}} \qquad \boxed{y_s = \frac{\sum y_i \cdot F_{Gi}}{\sum F_{Gi}}} \; . \qquad \text{Gl. (3.6 a, b)}$$

Bei räumlichen Punkthaufen verfährt man mit der dritten Raumordinate z wie vorher mit den Hebelarmen x_i

$$\boxed{z_s = \frac{\sum z_i \cdot F_{Gi}}{\sum F_{Gi}}} \; . \qquad \text{Gl. (3.5 c)}$$

Der räumliche Schnittpunkt der drei Schwerebenen x_s = const., y_s = const. und z_s = const. liefert die Schwerpunktskoordinaten.

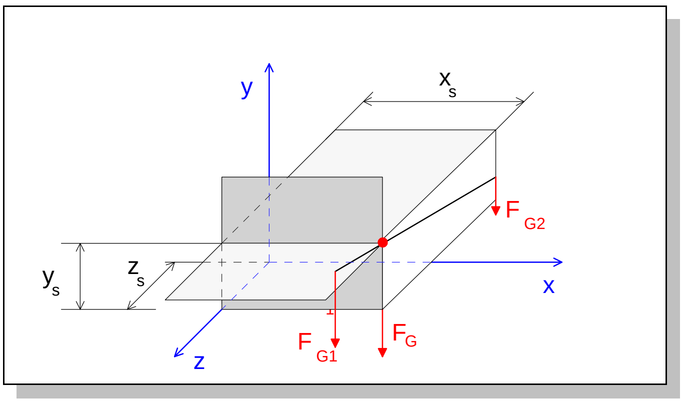
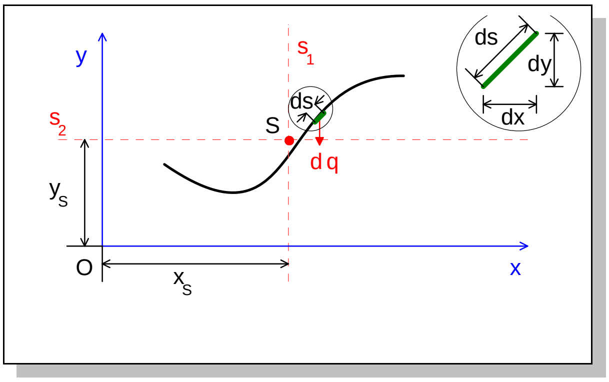


Bild 3.3: Schwerpunkt von räumlichen Punktmassen

3.3 Schwerpunkte von Kurven und Kurvenzügen

3.3.1 Schwerpunkt einer krummen Kurve

Das massenbelegte Bogenstückchen ds mit der Querschnittsfläche A hat die Gewichtskraft dq, skalar formuliert, mit einer Wirkungslinie parallel zur y- Achse,
$dq = dm \cdot g = \varrho \cdot A \cdot g \cdot ds$. Gl. (3.7)



Bezüglich des Koordinatenursprungs O (z-Achse) übt jedes Bogenstück das statische Drehmoment
$dM_O = -\varrho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot ds$ aus. Gl. (3.8)

Die Summe der Stückchen, also das Gesamtmoment, liefert,
$M_O = \int dM_O = \int \varrho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot ds$. Gl. (3.9)

Bild 3.4: Schwerpunkt einer krummen Linie

Die Gesamtgewichtskraft F_G beträgt $F_G = \int \varrho(s) \cdot A(s) \cdot g \cdot ds$. Gl. (3.10)

Daraus errechnet sich der Schwerpunktsabstand x_s zu $x_S = \dfrac{\int \varrho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot ds}{\int \varrho \cdot A \cdot g \cdot ds}$.

Bei unveränderlichen Querschnittsflächen, homogenen Werkstoffen und konstanter Gravitation vereinfachen sich die Formeln wie folgt:

$\boxed{x_S = \dfrac{\int x \cdot ds}{\int ds}}$, $\boxed{y_S = \dfrac{\int y \cdot ds}{\int ds}}$ und $\boxed{z_S = \dfrac{\int z \cdot ds}{\int ds}}$. Gl. (3.11 a, b, c)

Die Integration entlang einer Kurve ist manchmal sehr mühselig. In kartesischen Koordinaten empfiehlt es sich das Bogenstück ds nach dx oder dy zu formulieren. ds lässt sich nach dem Lehrsatz von Pythagoras zu
$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$ bestimmen.

Beispiel: Geradenstück

Die Funktion des Geradenstücks ist
$y = f(x) = \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x - \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u$

Kontrolle: $f(x_u) = \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u - \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u = y_u$

$f(x_o) = \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_o - \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u = y_o$

$f'(x) = \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u}$

Das Bogendifferential ds wird zu
$ds = \sqrt{1+f'^2} \cdot dx = \sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot dx$

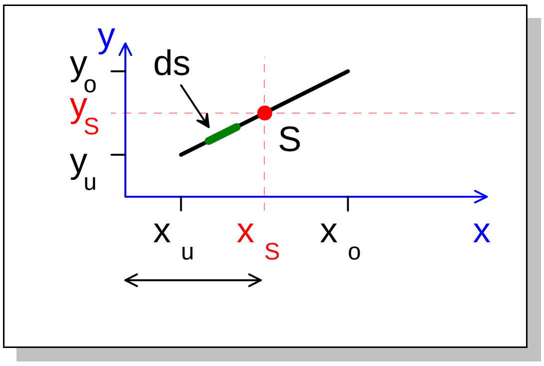


Bild 3.5: Schwerpunkt eines Geradenstücks

Damit wird der Schwerpunkt zu

$$x_s = \frac{\int_{(s)} x \cdot ds}{\int_{(s)} ds} = \frac{\int_{x_u}^{x_o} x \cdot \sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o} \sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot dx} = \frac{\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_u}^{x_0}}{\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot [x]_{x_u}^{x_0}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [x_0{}^2 - x_u{}^2]}{\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot [x_0 - x_u]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot (x_0-x_u)\right] \cdot (x_0+x_u)}{\left[\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2} \cdot (x_0-x_u)\right]} = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + x_u)$$

$x_s = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + x_u)$ und

$$y_s = \frac{\int_{(s)} y \cdot ds}{\int_{(s)} ds} = \frac{\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2}}{\sqrt{1+(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u})^2}} \cdot \frac{\int_{x_u}^{x_o} y \cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o} dx} = \frac{\int_{x_u}^{x_o} \left(\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x - \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u\right) \cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o} dx} = \frac{\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_u}^{x_0} + \left(-\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u\right) \cdot [x]_{x_u}^{x_0}}{[x]_{x_u}^{x_0}} =$$

$$= \frac{\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot \frac{1}{2} \cdot [x_0{}^2 - x_u{}^2] + \left(-\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u\right) \cdot [x_0 - x_u]}{[x_0 - x_u]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot (x_0+x_u)\right] \cdot [x_0 - x_u] + \left(-\frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u\right) \cdot [x_0 - x_u]}{[x_0 - x_u]} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot (x_0 + x_u) - \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot x_u + y_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0-y_u}{x_0-x_u} \cdot (x_0 - x_u) + y_u = \frac{1}{2} \cdot (y_0 - y_u) + y_u =$$

$y_s = \frac{1}{2} \cdot (y_0 + y_u)$

Beispiel: Kreisbogen

Das Problem wird am vorteilhaftesten in Polarkoordinaten mit den nachstehenden Transformationen formuliert.

$$y(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) \qquad x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) \qquad ds = r \cdot d\varphi$$

$$x_S = \frac{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} x \cdot ds}{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} ds} = \frac{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot d\varphi}{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} r \cdot d\varphi} = \frac{r \cdot (\sin(\varphi_o) - \sin(\varphi_u))}{\varphi_o - \varphi_u}$$

$$y_S = \frac{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} y \cdot ds}{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} ds} = \frac{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} r \cdot \sin(\varphi) \cdot r \cdot d\varphi}{\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} r \cdot d\varphi} = \frac{r \cdot (-\cos(\varphi_o) + \cos(\varphi_u))}{\varphi_o - \varphi_u}$$

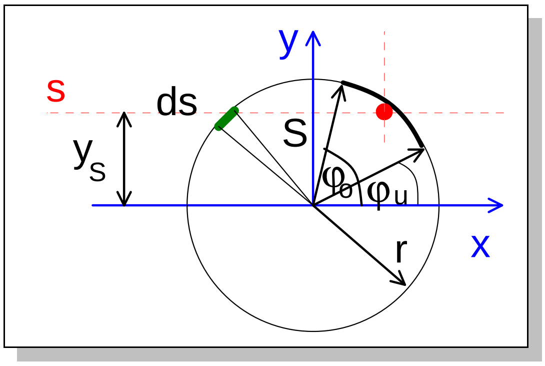


Bild 3.6: Schwerpunkt eines Kreisbogens

3.3.2 Schwerpunkt von zusammengesetzten Kurvenzügen

Wenn der Schwerpunkt aller Teile von Kurvenzügen bekannt ist, dann kann man unter Zuhilfenahme der Teilschwerpunkte S_i den gemeinsamen Schwerpunkt S bestimmen. Es wird für jedes Kurvenstück das Teilmoment aus Schwerpunktsabstand um eine geeignete Achse und Länge berechnet und alle Teilmomente werden zum Gesamtmoment addiert. Das gleiche Gesamtmoment (lineares Linienmoment) erhält man mit der kompletten Länge und dem Abstand des gemeinsamen Schwerpunkts.

Die Summe der Teilmomente der Kurvenstücke um die y-Achse ist

$$M_y = \sum_1^n L_i \cdot x_i$$

Die Summe der Teilmomente der Kurvenstücke um die x-Achse ist

$$M_x = \sum_1^n L_i \cdot y_i$$

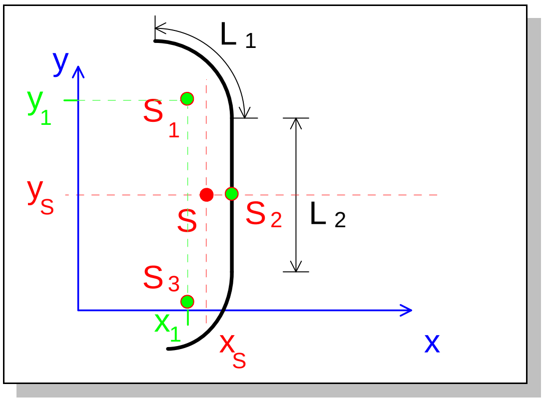


Bild 3.7: Schwerpunkt eines Kurvenzugs

Das Gesamtmoment um die y-Achse aus dem vollständigen Kurvenzug beträgt

$M_y = x_s \cdot \sum_1^n L_i$ und das um die x-Achse aus ist

$$M_x = y_s \cdot \sum_1^n L_i$$

Die Summe der Teilmomente ist identisch mit dem Moment aus dem vollständigen Kurvenzug.

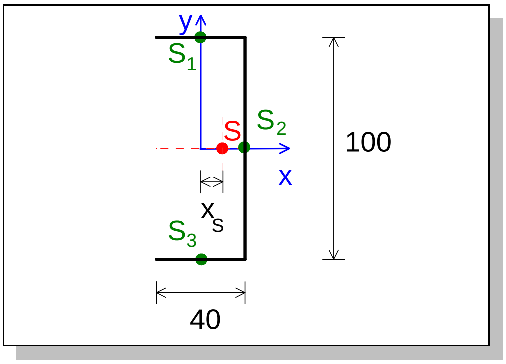
$$M_y = \sum_1^n L_i \cdot x_i = x_s \cdot \sum_1^n L_i$$

Aus dieser Identität lassen sich die Schwerpunktsabstände des kompletten Kurvenzugs wie folgt ermitteln

$\boxed{x_s = \frac{\sum_1^n L_i \cdot x_i}{\sum_1^n L_i}}$ und $\boxed{y_s = \frac{\sum_1^n L_i \cdot y_i}{\sum_1^n L_i}}$ Gl. (3.12 a, b)

Beispiel: Kurvenzug

Gegeben ist das U-Profil; das Koordinatensystem dazu wird geeignet (durch möglichst viele Teilschwerpunkte) dazu gewählt.



Der Schwerpunkt von symmetrischen Querschnitten liegt auf der Symmetrielinie.

In x-Richtung wird der Schwerpunktsabstand aus $x_s = \frac{\sum_1^n L_i \cdot x_i}{\sum_1^n L_i}$

bestimmt.

Bild 3.8: Schwerpunkt eines U-Profils

Mit nachstehendem Rechenschema lässt sich der Schwerpunktsabstand leicht berechnen.

i	L_i	$x_{s,i}$	$y_{s,i}$	$L_i \cdot x_{s,i}$	$L_i \cdot y_{s,i}$
1	40	0	50	0	2.000
2	100	20	0	2.000	0
3	40	0	-50	0	-2.000
Σ	180			2.000	0

$x_s = \frac{2000}{180} = \frac{100}{9} = 11,11$

3.4 Schwerpunkt einer Fläche

Für die Bestimmung des Schwerpunktes ist die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems hilfreich. Bezüglich dieses Koordinatensystems wird das statische Flächenmoment um die y- Achse gemäß

$$S_y = \int_{(A)} x \cdot dA = \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} x \cdot dy \cdot dx \qquad \text{Gl. (2.3.13)}$$

und das um die x- Achse gemäß

$$S_x = \int_{(A)} y \cdot dA = \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} y \cdot dy \cdot dx \qquad \text{Gl. (2.3.14)}$$

berechnet.

Die statischen Flächenmomente werden auch Flächenmomente 1. Ordnung genannt.

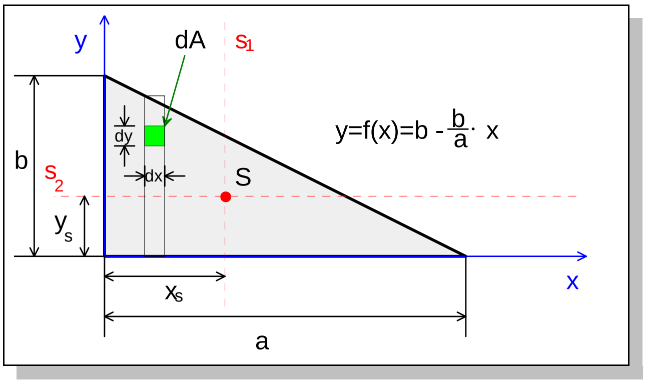


Bild 3.9: Flächenschwerpunkt

Bei dem Doppelintegral $S_y = \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} x \cdot dy \cdot dx$ wird erst die innere Integration $\int_{y_u}^{y_o} x \cdot dy$ nach y durchgeführt. Das ergibt eine Säule von der variablen unteren Grenze y_u zur variablen oberen Grenze y_o mit der Breite dx. Die Variable x ist bei der Integration in y-Richtung als Konstante anzusehen.

In dem vorliegenden Beispiel also: $\int_{y_u)=0}^{y_o=-\frac{b}{a}\cdot x+b} x \cdot dy = x \cdot [y]_0^{-\frac{b}{a}\cdot x+b} = x \cdot (-\frac{b}{a} \cdot x + b) = -\frac{b}{a} \cdot x^2 + b \cdot x.$

Die äußere Integration erstreckt sich über feste Grenzen.

In unserem Beispiel also $S_y = \int_{0}^{a}\int_{y_u}^{y_o} x \cdot dy \cdot dx = \int_0^a (-\frac{b}{a} \cdot x^2 + b \cdot x)dx = \left[-\frac{b}{3\cdot a} \cdot x^3 + \frac{b}{2} \cdot x^2\right]_0^a = \frac{b\cdot a^2}{6}$

Das Doppelintegral $S_x = \int_{(A)} y \cdot dA = \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} y \cdot dy \cdot dx$ liefert $S_y = \frac{b^2\cdot a}{6}$

Die Schwerpunktskoordinaten ergeben sich aus:

$$\boxed{x_s = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} x\cdot dy\cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} dy\cdot dx}} \quad \text{und} \quad \boxed{y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} y\cdot dy\cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} dy\cdot dx}} . \qquad \text{Gl. (3.15 a, b)}$$

In unserem Fall somit $x_s = \frac{\frac{b\cdot a^2}{6}}{\frac{a\cdot b}{2}} = \frac{a}{3}$ und $y_s = \frac{\frac{b^2\cdot a}{6}}{\frac{a\cdot b}{2}} = \frac{b}{3}$

Im Schwerpunkt kann man sich die gesamte Fläche konzentriert vorstellen.

Wenn der Schwerpunkt bekannt ist, folgt umgekehrt für die statischen Momente

$S_x = y_s \cdot A$ und $S_y = x_s \cdot A$.

Bezüglich jeder Achse durch den Schwerpunkt, also bezüglich jeder Schwerlinie ist das statische Moment Null.

Jede (auch jede schiefe) Symmetrielinie ist eine Schwerlinie und somit ein geometrischer Ort des Schwerpunktes.

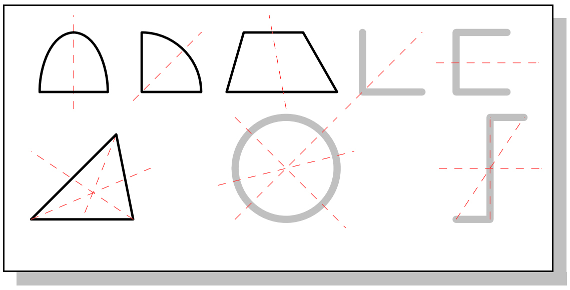


Bild 3.10: Schwerlinien symmetrischer Querschnitte

Der Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen berechnet sich zu:

$$x_S = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$ und $$y_S = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$. Gl. (3.16 a, b)

Dabei sind x_i und y_i die Abstände der Teilflächenschwerpunkte zum gewählten Koordinatensystem. Ein Koordinatensystem wird so gewählt, dass möglichst viele Schwerpunkte der Teilflächen in den Koordinatenachsen liegen und die Hebelarme dann den Wert "0" besitzen. Aussparungen sind als negative Flächen einzusetzen.

Für die praktische Berechnung ist folgendes Schema zu empfehlen:

i	A_i	x_i	$A_i \cdot x_i$	y_i	$A_i \cdot y_i$
1	A_1	x_1	$A_1 \cdot x_1$	y_1	$A_1 \cdot y_1$
2	A_2	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
	ΣA_i		$\Sigma A_i \cdot x_i$		$\Sigma A_i \cdot y_i$
			$x_S = \frac{\sum A_i \cdot x_1}{\sum A_i}$		$x_S = \frac{\sum A_i \cdot y_1}{\sum A_i}$

Tabelle 3.1: Berechnungsschema zur Ermittlung von Flächenschwerpunkten

Beispiel:
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes unten angegebenen Querschnittes.

Der Querschnitt ist symmetrisch, also muss eine Schwerachse auf der Linie y = 0 liegen.

Der Schwerpunkt des grauen Rechtecks liegt auf der Linie z = 0. Bezieht man alle statischen Flächenmomente auf die horizontale Schwerachse des grauen Rechteckes, dann muss nur der Hebelarm des weißen Rechtecks berücksichtigt werden.

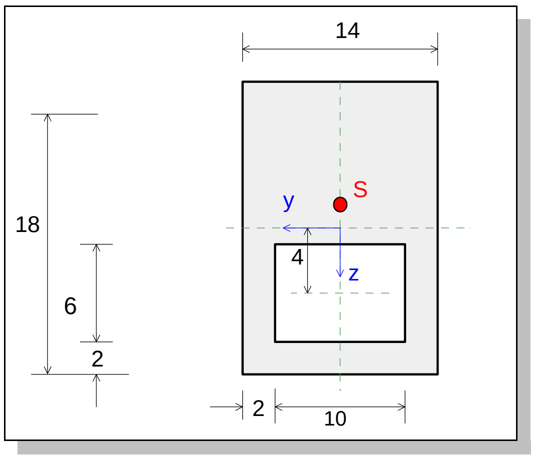


Bild 3.11: Rechteckquerschnitt mit rechteckiger Aussparung

Als Schwerpunktskoordinate ergibt sich dann:

$$z_{s1} = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{-4 \cdot 6 \cdot 10}{14 \cdot 18 - 10 \cdot 6} = -1,25$$

3.5 Schwerpunkt eines Körpers

Das statische Flächenmoment um die y- Achse oder um die z- Achse liefert die Schwerebene x_s = const.

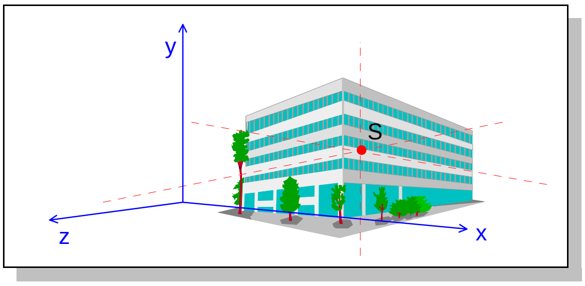


Bild 3.12: Schwerpunkt von Volumen

$$x_S = \frac{\int\limits_{(v)} x \cdot dV}{\int\limits_{(v)} dV} = \frac{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} x \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} dz \cdot dy \cdot dx}$$

. Analog ergeben sich die beiden anderen Ebenen zu:

$$y_S = \frac{\int\limits_{(v)} y \cdot dV}{\int\limits_{(v)} dV} = \frac{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} y \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} dz \cdot dy \cdot dx} \quad \text{und} \quad z_S = \frac{\int\limits_{(v)} z \cdot dV}{\int\limits_{(v)} dV} = \frac{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} z \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} dz \cdot dy \cdot dx} \, . \qquad \text{Gl. (3.17 a, b, c)}$$

Bei zusammengesetzten Körpern wird wie bei zusammengesetzten Flächen verfahren.

$$\boxed{x_S = \frac{\sum x_i \cdot V_i}{\sum V_i}} \quad \boxed{y_S = \frac{\sum y_i \cdot V_i}{\sum V_i}} \text{,und} \quad \boxed{z_S = \frac{\sum z_i \cdot V_i}{\sum V_i}} \quad . \qquad \text{Gl. (3.18 a, b, c)}$$

Dabei sind x_i, y_i und z_i die Abstände der Teilkörperschwerpunkte zum gewählten Koordinatensystem. Ein Koordinatensystem wird so gewählt, dass möglichst viele Schwerpunkte der Teilkörper in den Koordinatenflächen liegen und die Hebelarme dann den Wert "0" besitzen. Hohlräume sind als negative Körper einzusetzen.

Für die praktische Berechnung ist folgendes Schema zu empfehlen:

i	V_i	x_i	$V_i \cdot x_i$	y_i	$V_i \cdot y_i$	z_i	$V_i \cdot z_i$
1	V_1	x_1	$V_1 \cdot x_1$	y_1	$V_1 \cdot y_1$	z_1	$V_1 \cdot z_1$
2	V_2	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
	ΣV_i		$\Sigma V_i \cdot x_i$		$\Sigma V_i \cdot y_i$		$\Sigma V_i \cdot z_i$
			$x_S = \frac{\sum V_i \cdot x_1}{\sum V_i}$		$x_S = \frac{\sum V_i \cdot y_1}{\sum V_i}$		$x_S = \frac{\sum V_i \cdot z_1}{\sum V_i}$

Tabelle 3.2: Berechnungsschema zur Ermittlung von Körperschwerpunkten

3.6 Berechnung der Mantelfläche von Rotationskörpern

1. GULDINSCHE Regel (Satz von Pappus)

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers entspricht der Bogenlänge multipliziert mit der Länge des Weges, den der Schwerpunkt beschreibt.

$A = 2 \cdot \pi \cdot \int x \cdot ds$

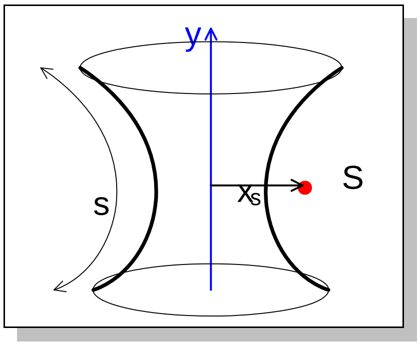


Bild 3.13: Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$\boxed{A = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot s}$$

Gl. (3.19)

3.7 Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

2. GULDINSCHE Regel (Satz von Pappus)

Das Volumen eines Rotationskörpers entspricht der Querschnittsfläche multipliziert mit der Länge des Weges, den der Schwerpunkt beschreibt.

$V = 2 \cdot \pi \cdot \int x \cdot dx \cdot dy$

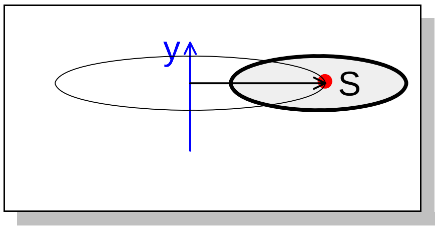


Bild 3.14: Volumen eines Rotationskörpers

$$\boxed{V = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot A}$$

Gl. (3.20)

4 Schnittkräfte

4.1 Gleichgewichtskräfte an allgemeinen Schnittflächen

Die Lasten und Auflagerreaktionen stehen zusammen im Gleichgewicht. Trennt man das Tragwerk mittels eines beliebigen Schnittes, so ist für jedes der beiden Teile das Gleichgewicht nicht mehr gegeben! Nach den Regeln für das Gleichgewicht lässt sich je eine Resultierende R_L am linken und R_R rechten Teil des Tragwerkes finden, die das Gleichgewicht an beiden Teilen herstellt. Die beiden Schnittresultierenden R_L und R_R sind gleich groß und entgegen gerichtet. Bezieht man die Resultierenden auf einen bestimmten Punkt S, dann lassen sich am linken und rechten Schnittufer die so genannten Schnittkräfte - das sind die Komponenten der Resultierenden - als Horizontalkräfte H, Vertikalkräfte V und Momente M angeben.

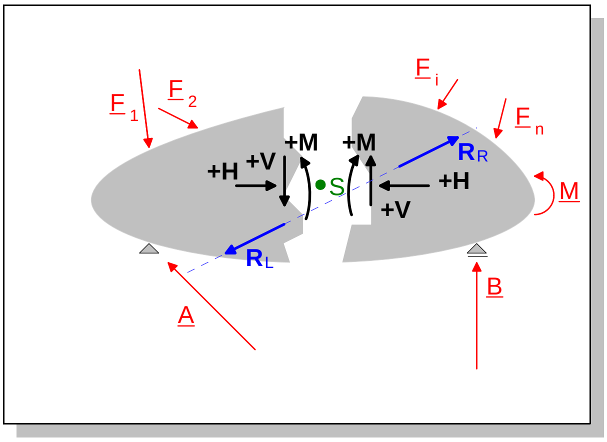


Bild 4.1: Definition der Schnittkräfte

4.2 Schnittkräfte an Stäben und Balken

Die Schnittkräfte an Stäben und Balken werden Normalkraft N, Querkraft Q und Biegemoment M genannt.

Transformation der Schnittkräfte:

$$N = H \cdot \cos(\alpha) - V \cdot \sin(\alpha)$$
$$Q = H \cdot \sin(\alpha) + V \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{Gl. (4.1 a, b)}$$

Das Biegemoment M verändert sich durch ebene Koordinatentransformationen nicht.

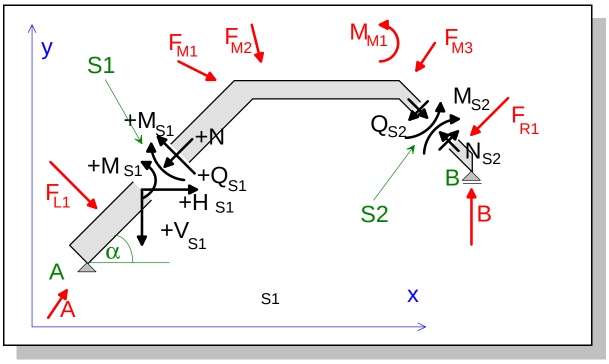


Bild 4.2: Definition der Schnittkräfte an Stabtragwerken

Die Einheiten für H, V, N und Q sind Newton und die Einheit für das Biegemoment M ist Newtonmeter.

Jeder der freigeschnittenen Körper muss für sich im Gleichgewicht sein.

Für den linken Körper beispielsweise gilt, dass alle Kraftkomponenten, also die äußere Kraft F_{L1}, die Auflagerreaktion A und die Schnittkräfte N_{S1} und Q_{S1} am Schnitt S1, in zwei unabhängigen Richtungen sich gegenseitig aufheben. Andernfalls würde das linke Bauteil weggeschoben werden.

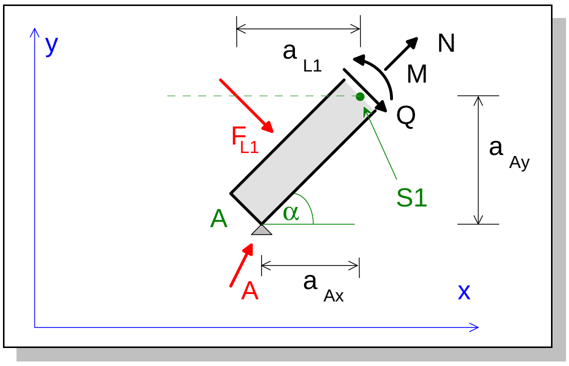


Bild 4.3: Gleichgewicht am freigeschnittenen Teil

$$\sum F_x = 0 = A_x + F_{xL1} + N_x + Q_x$$
$$\sum F_y = 0 = A_y - F_{yL1} + N_y - Q_y$$

Weiter darf für einen beliebig gewählten Drehpunkt aufgrund aller einwirkenden Kräfte kein resultierendes Drehmoment (Biegemoment) überbleiben. Legt man den Drehpunkt für den linken Körper in den Schwerpunkt der Schnittstelle S1, dann leistet weder die Normalkraft N_{S1} noch die Querkraft Q_{S1} einen Beitrag zum Schnittmoment (Biegemoment).

$$\sum M_{S1} = 0 = A_x \cdot a_{Ay} - A_y \cdot a_{Ax} + F_{yL1} \cdot a_{L1} + M$$

Aus den drei Gleichungen lassen sich die drei unbekannten Schnittkräfte N, Q, M bestimmen.

Beispiel: Schnittkräfte des Balkens
Die Gleichlast p_1 in N/m auf dem Balken A-B kann zur weiteren Berechnung als Last auf einem Hilfsbalken C-D aufgefasst werden. Der Hilfsbalken C-D stützt sich links und rechts mit jeweils der halben Resultierenden

$$\frac{R_1}{2} = \frac{p_1 \cdot a_{p1}}{2}$$

auf dem Balken A-B ab.

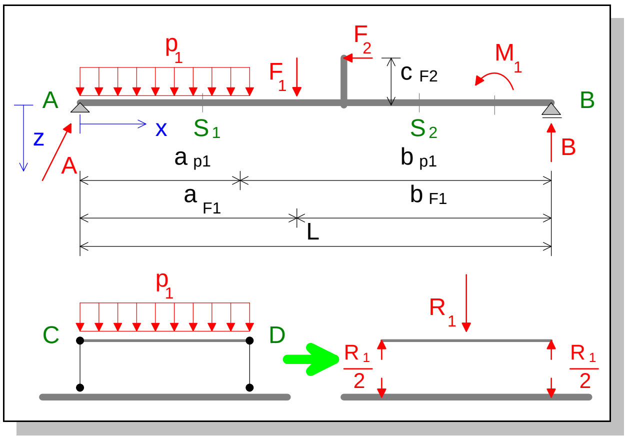


Bild 4.4: Auflagerkräfte

Die Gleichgewichtsbedingung für Kräfte

$$\sum F_z = 0 = -A_z - B + R_1 + F_1$$

$$\sum F_x = 0 = +A_x - F_2$$

und für die Momente

$$\sum M_A = 0 = -\frac{R_1}{2} \cdot a_{p1} - F_1 \cdot a_{F1} + F_2 \cdot c_{F2} + M_1 + B \cdot L$$

$$\sum M_B = 0 = M_1 + F_2 \cdot c_{F2} + F_1 \cdot b_{F1} + \frac{R_1}{2} \cdot \left(b_{p1} + L\right) - A_z \cdot L$$

liefert

$$A_x = F_2$$

$$A_z = \frac{M_1 + F_2 \cdot c_{F2} + F_1 \cdot b_{F1} + \frac{p_1 \cdot a_{p1}}{2} \cdot b_{p1}}{L} + \frac{p_1 \cdot a_{p1}}{2}$$

$$B = \frac{-M_1 - F_2 \cdot c_{F2} + F_1 \cdot a_{F1} + \frac{p_1 \cdot a_{p1}}{2} \cdot a_{p1}}{L}$$

Schnittkräfte am Schnitt S_1

Am linken Teil des Balkens gilt für das Gleichgewicht

$$\sum F_z = 0 = -A_z + p_1 \cdot a_{S1} + \boldsymbol{Q}$$

$$\sum F_x = 0 = A_x + \boldsymbol{N}$$

$$\sum M_{S1} = 0 = -A_z \cdot a_{S1} + p_1 \cdot a_{S1} \cdot \tfrac{a_{S1}}{2} + \boldsymbol{M} \,.$$

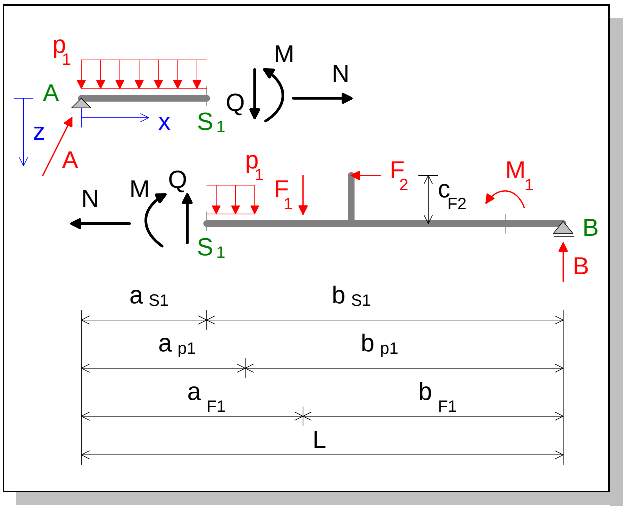


Bild 4.5: Schnitt am Punkt S_1

Daraus berechnen sich die Schnittkräfte N, Q und M zu

$$Q = A_z - p_1 \cdot a_{S1 a_{S1}}$$
$$N = -A_x$$
$$M = A_z \cdot a_{S1} - p_1 \cdot a_{S1} \cdot \tfrac{a_{S1}}{2}$$

$$Q = \tfrac{M_1 + F_2 \cdot c_{F2}}{L} + F_1 \cdot (1 - \tfrac{a_{F1}}{L}) + p_1 \cdot \left(a_{p1} - \tfrac{a_{p1}^2}{2 \cdot L} - a_{S1}\right)$$
$$N = -F_2$$
$$M = \left[\tfrac{M_1 + F_2 \cdot c_{F2}}{L} + F_1 \cdot (1 - \tfrac{a_{F1}}{L}) + p_1 \cdot \left(a_{p1} - \tfrac{a_{p1}^2}{2 \cdot L} - \tfrac{a_{S1}}{2}\right)\right] \cdot a_{S1}$$

Am rechten Teil des Balkens müssen sich die gleichen Schnittgrößen einstellen.

$$\sum F_z = 0 = -\boldsymbol{Q} + p_1 \cdot (a_{p1} - a_{S1}) + F_1 - B$$
$$\sum F_x = 0 = -\boldsymbol{N} - F_2$$
$$\sum M_{S1} = 0 = -\boldsymbol{M} - p_1 \cdot \frac{(a_{p1} - a_{S1})}{2}^2 - F_1 \cdot (a_{F1} - a_{S1}) + F_2 \cdot c_{F2} + M_1 + B \cdot (L - a_{S1})$$

Daraus berechnen sich die Schnittkräfte N, Q und M zu

$$Q = p_1 \cdot (a_{p1} - a_{S1}) + F_1 - B$$
$$N = -F_2$$
$$M = -p_1 \cdot \frac{(a_{p1} - a_{S1})}{2}^2 - F_1 \cdot (a_{F1} - a_{S1}) + F_2 \cdot c_{F2} + M_1 + B \cdot (L - a_{S1})$$

und weiter zu

$$Q = p_1 \cdot \left(a_{p1} - a_{S1} - \tfrac{a_{p1}^2}{2 \cdot L}\right) + \tfrac{M_1 + F_2 \cdot c_{F2}}{L} + F_1 \cdot (1 - \tfrac{a_{F1}}{L})$$
$$N = -F_2$$
$$M = \left[p_1 \cdot \left(a_{p1} - \tfrac{a_{p1}^2}{2 \cdot L} - \tfrac{a_{S1}}{2}\right) + F_1 \cdot (1 - \tfrac{a_{F1}}{L}) + \tfrac{M_1 + F_2 \cdot c_{F2}}{L}\right] \cdot a_{S1}$$

Am linken und rechten Schnittufer der Schnittstelle S_1 sind erwartungsgemäß die Schnittgrößen gleich groß aber entgegengesetzt. Sie bilden eine Gleichgewichtsgruppe.

Schnittkräfte am Schnitt S_2:

Am linken Teil des Balkens gilt für das Gleichgewicht

$$\sum F_z = 0 = -A_z + p_1 \cdot a_{p1} + F_1 + \boldsymbol{Q}$$
$$\sum F_x = 0 = A_x - F_2 + \boldsymbol{N}$$
$$\sum M_{S2} = 0 =$$
$$= -A_z \cdot a_{S2} + p_1 \cdot a_{p1} \cdot \left(a_{S1} - \tfrac{a_{p1}}{2}\right) + $$
$$+ F_1 \cdot (a_{S1} - a_{F1}) + F_2 \cdot c_{F2} + \boldsymbol{M}\,.$$

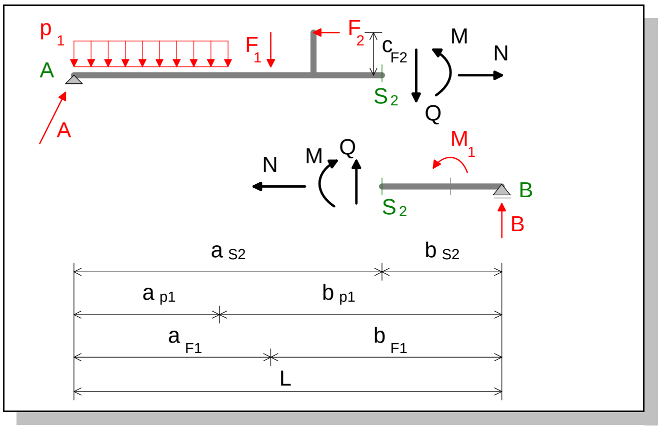


Bild 4.6: Schnitt am Punkt S_2

Daraus berechnen sich die Schnittkräfte N, Q und M zu

$$Q = \boldsymbol{A}_z - p_1 \cdot a_{p1} - F_1$$
$$N = F_2 - A_x$$
$$M = A_z \cdot a_{S2} - p_1 \cdot a_{p1} \cdot \left(a_{S2} - \tfrac{a_{p1}}{2}\right) - F_1 \cdot (a_{S2} - a_{F1}) - F_2 \cdot c_{F2}$$

und weiter zu

$$Q = \tfrac{1}{L} \cdot \left(M_1 + F_2 \cdot c_{F2} - F_1 \cdot a_{F1} - \tfrac{1}{2} \cdot p_1 \cdot a_{p1}^2\right)$$
$$N = 0$$
$$M = M_1 \cdot \tfrac{a_{S2}}{L} \cdot \left(-F_2 \cdot c_{F2} + F_1 \cdot a_{F1} + p_1 \cdot \tfrac{a_{p1}^2}{2}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{a_{S2}}{L}\right)$$

Am rechten Teil des Balkens müssen sich die gleichen Schnittgrößen einstellen.

$$\sum F_z = 0 = -\boldsymbol{Q} - B$$
$$\sum F_x = 0 = -\boldsymbol{N}$$
$$\sum M = 0 = -\boldsymbol{M} + M_1 + B \cdot (L - a_{S2})$$

Daraus berechnen sich die Schnittkräfte N, Q und M zu

$$Q = -B$$
$$N = 0$$
$$M = M_1 + B \cdot (L - a_{S2})$$

und weiter zu

$$Q = \tfrac{1}{L} \cdot \left(M_1 + F_2 \cdot c_{F2} - F_1 \cdot a_{F1} - \tfrac{p_1 \cdot a_{p1}}{2} \cdot a_{p1}\right)$$
$$N = 0$$
$$M = M_1 \cdot \tfrac{a_{S2}}{L} + \left(-F_2 \cdot c_{F2} + F_1 \cdot a_{F1} + \tfrac{p_1 \cdot a_{p1}}{2} \cdot a_{p1}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{a_{S2}}{L}\right)$$

Am linken und rechten Schnittufer der Schnittstelle S_2 sind ebenso die Schnittgrößen gleich groß aber entgegengesetzt. Sie bilden wieder eine Gleichgewichtsgruppe.

4.3 Schnittkraftverläufe am Druck- und Zugstab

Der Druck- und Zugstab wird nur in seiner Achse belastet. Die Belastung kann entweder eine konzentrierte Einzellast F sein, die an einer beliebigen Stelle des Stabes angreift oder verteilte Massenkräfte aufgrund von Gravitation p_1 oder Zentrifugalbeschleunigung p_2.

In der Praxis trifft man Stäbe in Form von Stützen, Säulen, Streben, Fachwerken und Seilen (Zugstäbe) an.

Bei Stäben gibt es nur Normalkräfte N als Schnittkräfte. Druckkräfte werden als negative Normalkräfte bezeichnet Zugkräfte als positive Normalkräfte.

4.3.1 Funktion der Normalkraft

$$\sum F_x = 0 = -N + p(\xi)\cdot d\xi + N + dN$$

$$\frac{dN}{d\xi} = -p(\xi)$$

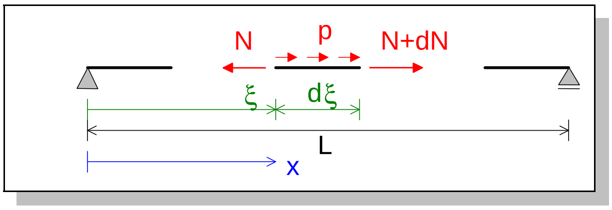


Bild 4.7: Gleichgewicht am Stabelement

$$\boxed{N(x) = \int_0^x -p(\xi)\cdot d\xi + N_0}$$

Gl. (4.2)

4.3.2 Lösungen für Standardfälle

Einzellast F_1 (Druck) am Stabende:

$$N(x) = \int_0^x 0\cdot d\xi + N_0 = -F_1$$

$$\boxed{N(x) = -F_1}$$

Gl. (4.3)

An den Stellen, an denen eine Einzelkraft angreift, springt der Normalkraftverlauf um den Betrag der Einzelkraft. Handelt es sich um eine Druckkraft, dann ist der Sprung in die negative Richtung, bei einer Zugkraft in die positive Richtung.

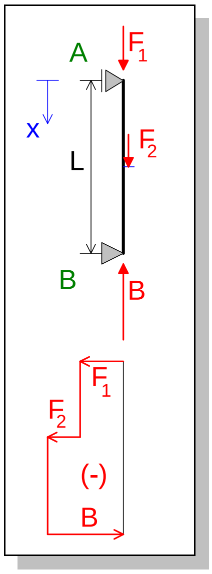
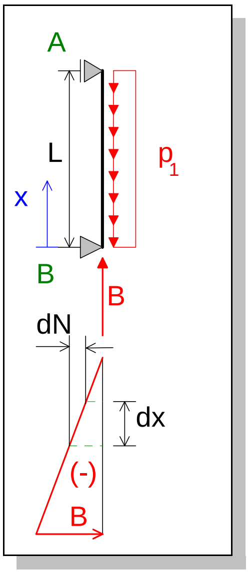


Bild 4.8: Normalkraftverlauf verursacht durch Einzellasten

Eigengewicht p (Druckstab, prismatisch):

$p(\xi) = -\rho \cdot g \cdot A$

$N(x) = \int_0^x \rho \cdot g \cdot A \cdot d\xi + N_0$



Randbedingung N(x) = 0 am freien Ende, also bei x = L

$N(L) = 0 = \rho \cdot g \cdot A \cdot x \mid_0^L + N_0 \Rightarrow N_0 = -\rho \cdot g \cdot A \cdot L$

$$\boxed{N(x) = \rho \cdot g \cdot A \cdot x - \rho \cdot g \cdot A \cdot L}$$

Gl. (4.3)

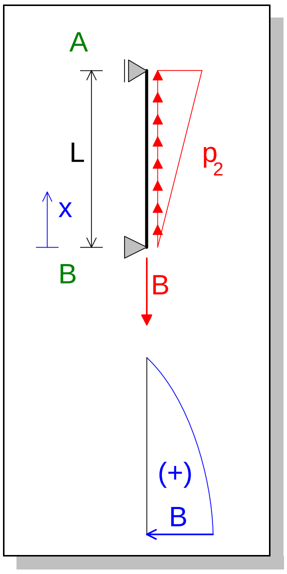
Prismatisch heißt ein Stab, wenn sein Querschnitt sich nicht verändert. Gleichlasten, also konstante Linienlasten, verursachen linear veränderliche Normalkraftverläufe. Bei großen Gleichlasten erhält man eine steile Normalkraftline.

Bild 4.9: Normalkraftverlauf verursacht durch Eigengewicht

Zentrifugalkraft p (Zugstab, prismatisch):

$p(\xi) = \xi \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot A$

$N(x) = \int_0^x -\rho \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \xi \cdot d\xi + N_0$



Randbedingung N(x) = 0 am freien Ende, bei x = L

$N(L) = 0 = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot A \cdot x^2}{2} \mid_0^L + N_0 \Rightarrow N_0 = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot A \cdot L^2}{2}$

$$\boxed{N(x) = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot A \cdot x^2}{2} + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot A \cdot L^2}{2}}$$

Gl. (4.5)

Linear veränderliche Linienlasten, wie sie bei prismatischen Stäben von Fliehkräften hervorgerufen werden, haben einen parabolischen Verlauf der Normalkraft zufolge. Dort, wo die Belastung verschwindet, hat die Normalkraft eine zur x-Achse parallele Tangente. Dort, wo die Belastung am größten ist, wird die Tangente der Normalkraftlinie am steilsten.

Bild 4.10: Normalkraftverlauf verursacht durch Zentrifugalkräfte

4.3.1.1 Zusammenfassung

An den Stellen, an denen Einzellasten wirken, tritt ein Normalkraftsprung auf. An unbelasteten freien Enden muss die Normalkraft verschwinden. Am Auflager ist die Normalkraft gleich der Auflagerreaktion. Bei Stäben unter konstanter Gleichlast (Eigengewicht prismatischer Stäbe) hat die Normalkraft einen linearen Verlauf. Zentrifugalkräfte führen zu einer quadratischen Funktion für die Normalkraft.

4.4 Schnittkraftverlauf am Biegebalken

4.4.1 Gerader Balken

4.4.1.1 Gleichgewicht am Balken

Ein Balken kann mit einzelnen Einwirkungen (Kräfte oder Momente) oder verteilten Einwirkungen belastet sein. Die verteilte Einwirkung p(x) wird als Lastfunktion über der x-Achse angegeben.

Die Belastung kann sowohl in z-Richtung (Gravitation), als auch in y-Richtung (Wind) wirken.

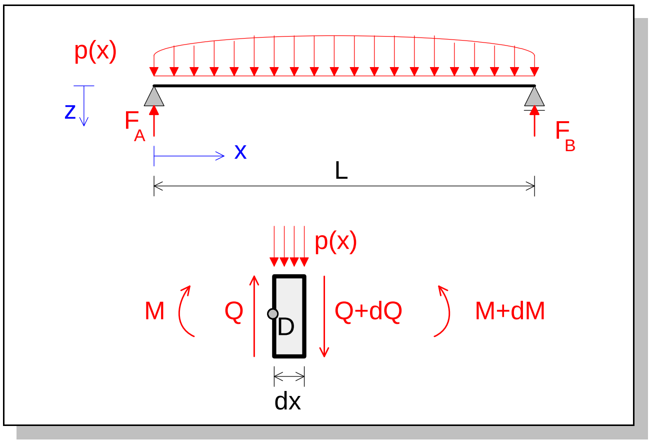


Bild 4.11: Gleichgewicht am Balkenelement

Das Gleichgewicht der Kräfte in vertikaler Richtung bedingt:

$$\downarrow \sum F_z = 0 = -Q(x) + p(x) \cdot dx + Q(x) + dQ$$

$$\boxed{\frac{dQ(x)}{dx} = -p(x)} \qquad \text{Gl. (4.6)}$$

Das Momentengleichgewicht um den Punkt D bedingt:

$$\curvearrowleft \sum M_D = 0 = -M(x) - p(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + M(x) + dM - Q(x) \cdot dx - dQ \cdot dx$$

Die beiden Summanden $dQ \cdot dx$ und $p(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}$ sind klein II. Ordnung und können vernachlässigt werden.

$$dM = Q(x) \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)} \qquad \text{Gl. (4.7)}$$

$$\boxed{\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{Q(x)}{dx} = -p(x)} \qquad \text{Gl. (4.8)}$$

Beispiel: Gleichlast
Gegeben: Statisches System unter Gleichlast
Gesucht: Querkraft Q(x) und Biegemoment M(x)

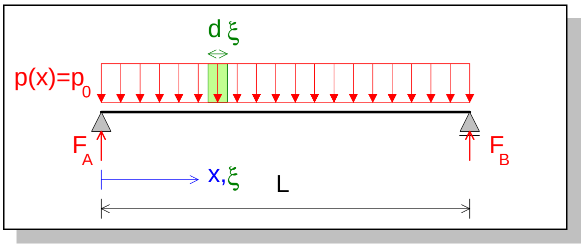


Bild 4.12: Statisches System

Lösung:

$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{Q(x)}{dx} = -p(x)$

Auflagerreaktionen:

Die Symmetrie der Struktur und der Belastung verlangt, dass $F_A = F_B$ ist.

$F_A = p_0 \cdot \frac{L}{2}$

Querkraft:

Die Funktion Q(x) kann mittels direkter Integration als Anfangswertproblem ermittelt werden.

$Q(x) = F_A - \int_0^x p(\xi) \cdot d\xi$

$Q(x) = F_A - p \cdot x$.

Positive Querkräfte werden entgegen der positiven z- Achse nach oben gezeichnet.

Bei Einfeldträgern entsprechen die Querkräfte an den Rändern den Auflagerreaktionen F_A und F_B oder an den Stellen, wo Einzelkräfte (Auflagerkräfte) eingeleitet werden, macht die Querkraft einen Sprung in Höhe des Betrages der wirkenden Kraft. Der Sprung erfolgt stets in Richtung der Kraft, wenn man dem Balken in positiver x- Richtung folgt.

Wirkt die Gleichlast p_0 nach unten, so nimmt die Querkraft linear ab, wenn man dem Balken wieder in positiver x- Richtung folgt.

Bei symmetrischen Belastungen und symmetrischem Tragwerk ist die Querkraft in der Symmetrieachse immer Null.

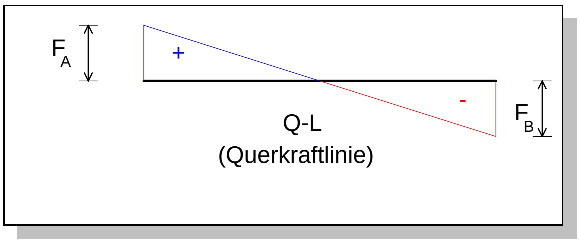


Bild 4.13: Querkraftlinie

Biegemoment:

Die Lösung der DGL (Differentialgleichung) als unbestimmtes Integral ergibt

$M(x) = \int Q(x) \cdot dx$

$M(x) = F_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} + C$

$M(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$M(x) = \frac{p}{2} \cdot x \cdot (L - x)$

Maximalwert ist in Feldmitte und beträgt

$M_{\max} = M(x = \frac{L}{2}) = \frac{p \cdot L^2}{8}$

An den Stellen, wo die Querkraft verschwindet, besitzt die Momentenlinie Extremwerte.

Bei symmetrischer Belastung und symmetrischem Tragwerk hat das Biegemoment in der Symmetrieachse immer maximale oder minimale Werte.

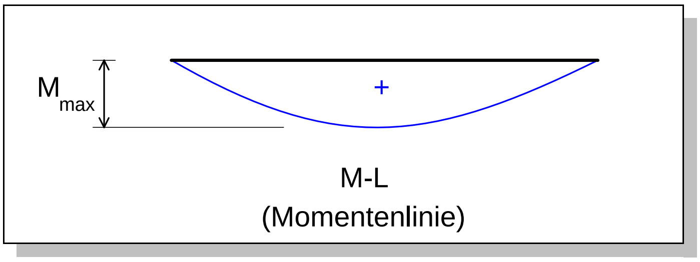
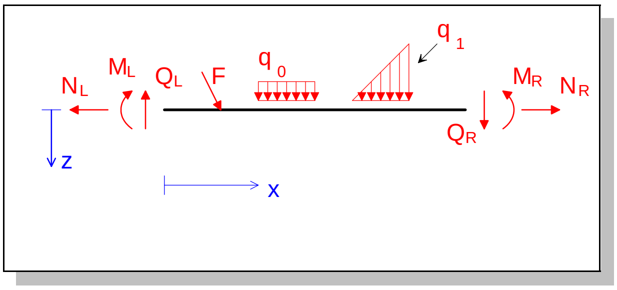


Bild 4.14: Biegemomentenlinie

4.4.1.2 Schnittkraftverläufe

An einem freigeschnittenen Balkenstück wirken an den Rändern die Schnittkräfte N, Q und M und im Inneren die äußere Lasten. F ist eine (konzentrierte) Einzellast in N, q_0 ist eine gleichförmige, konstante Linienlast (Gleichlast) in N/m und q_1 ist der Spitzenwert einer dreiecksförmigen Linienlast (Dreieckslast) auch in N/m. Die Schnittkräfte am linken (Index L) und rechten (Index R) Rand halten den äußeren Lasten das Gleichgewicht. Im Folgenden werden die Auswirkungen der einzelnen Lasttypen auf den Verlauf der Schnittkraftlinien detailliert untersucht:

Bild 4.15: Belastungen und Schnittkräfte am Balkenabschnitt



Belastungsloser Balkenabschnitt:

In einem unbelasteten Balkenabschnitt bleiben die Normalkraft N und die Querkraft Q konstant. Sie verändern sich nicht.

$$N(x) = N_L = N_R$$

$$Q(x) = Q_L = Q_R$$

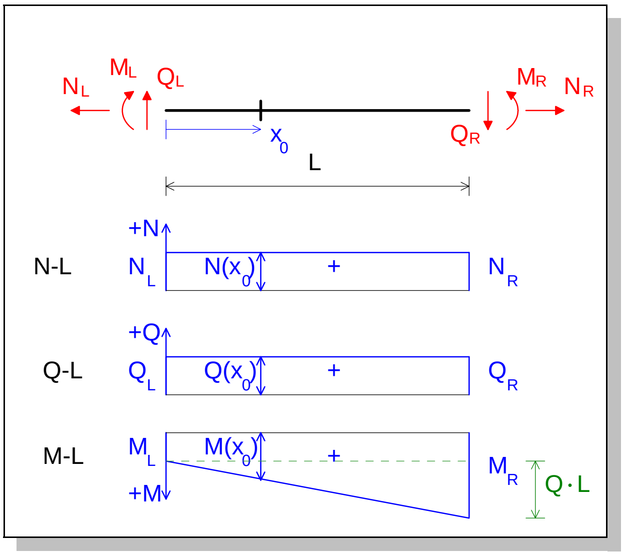
Das Biegemoment M dagegen verändert sich linear. Der Zuwachs des Biegemomentes ΔM an der Stelle x = L ist genau so groß wie die Fläche, A = Q · L, unter der Querkraftlinie Q-L. Ist die Querkraft positiv, dann ist der Zuwachs auch positiv. Ist die Querkraft negativ, dann ist der „Zuwachs" negativ.

$$M(x) = M_L + Q \cdot x$$

$$M_R = M_L + Q \cdot L$$

Die Steigung der Momentenlinie M-L entspricht der Querkraft.

Bild 4.16: Balkenabschnitt ohne Lasten



Einzellast innerhalb des Balkenabschnitts

In einem Balkenabschnitt, der mit einer Kraft F belastet wird erfahren die Normalkraft N und die Querkraft Q sprunghafte Veränderungen. Für jede Schnittstelle links der Last gilt

$$N(x) = N_L \mid 0 < x < x_0$$

$$Q(x) = Q_L \mid 0 < x < x_0$$

und für jede Schnittstelle rechts der Last gilt

$$N(x) = N_L - F_x = N_R \mid x_0 < x < L$$

$$Q(x) = Q_L - F_y = Q_R \mid x_0 < x < L$$

An der Schnittstelle der Wirkungslinie der Kraft F mit der Balkenachse x_0 verursacht die Kraftkomponente in x-Richtung F_x eine sprunghafte Abnahme der Normalkraft. Wirkt die Komponente dagegen entgegen der positiven x- Richtung, dann wächst die Normalkraft wegen des zweimaligen negativen Vorzeichens an.

An der selben Stelle verursacht die zum Balken senkrecht stehende Kraftkomponente F_z eine sprunghafte Abnahme der Querkraft. Zeigt diese Kraftkomponete entgegen der positiven z- Achse, dann wächst die Querkraft sprunghaft an.

Das Biegemoment M verändert sich wieder linear, jetzt aber in jedem Teilbereich anders. Es gelten die vorher besprochenen Regeln über Flächen und Neigung für jedes Teilgebiet. Der Zuwachs des Biegemomentes ΔM an der Stelle x = L ist genau so groß wie die gesamte Fläche unter der Querkraftlinie Q-L. Der Zuwachs des Biegemomentes von x = 0 bis $x = x_0$ beträgt $Q_L \cdot x_0$. Ist die Querkraft positiv, dann ist der Zuwachs auch positiv. Ist die Querkraft negativ, dann ist der „Zuwachs" negativ.

Für jede Schnittstelle links der Last gilt

$$M(x) = M_L + Q_L \cdot x \mid 0 < x < x_0$$

und für jede Schnittstelle rechts der Last gilt

$$M(x) = M_L + Q_L \cdot x_0 + Q_R \cdot (x - x_0) \mid x_0 < x < L$$

oder unter Berücksichtigung des Zuwachses

$$M(x) = M_L + Q_L \cdot x - F_z \cdot x \mid x_0 < x < L$$

$$M_{x_0} = M_L + Q_L \cdot x_0$$

$$M_R = M_{x_0} + Q_R \cdot (L - x_0)$$

$$M_R = M_L + Q_L \cdot x_0 + Q_R \cdot (L - x_0)$$

$$M_R = M_L + Q_L \cdot L - F_z \cdot (L - x_0)$$

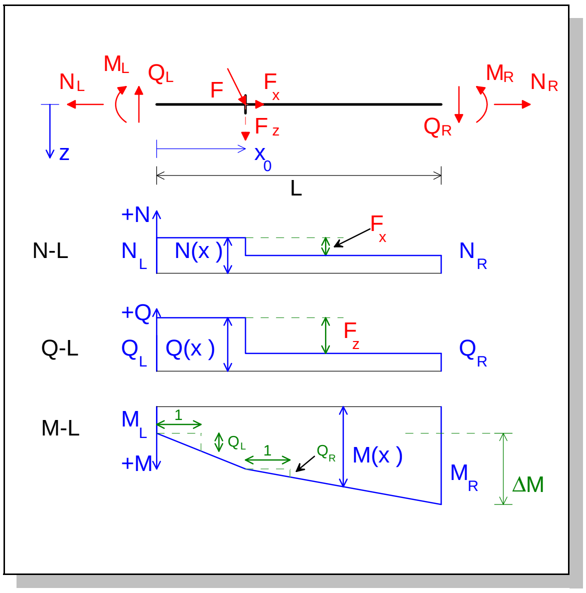


Bild 4.17: Balkenabschnitt mit Einzellast

Die bereichsweise Steigung der Momentenlinie M-L entspricht der jeweiligen Querkraft. An einem Angriffspunkt einer Einzellast hat die Momentenlinie einen Knick. Wenn ein Balken ausschließlich durch Einzelkräfte belastet wird, ist die Momentenlinie ein Polygon.

Nullstellen der Querkraft führen zu extremen Momenten.

Die maximalen und minimalen Werte errechnen sich nach den vorher angegebenen Regeln.

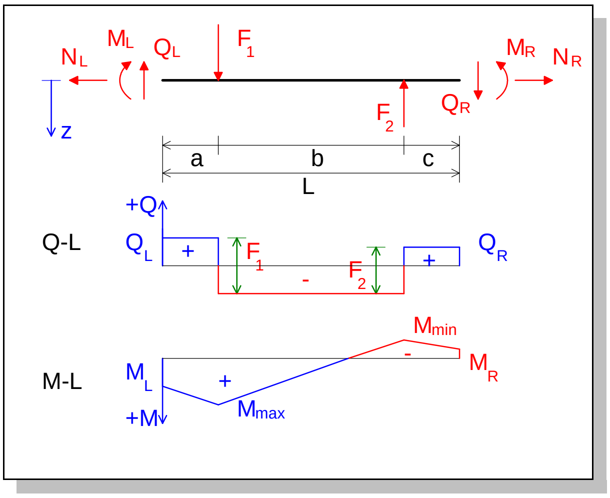


Bild 4.18: Balkenabschnitt mit Einzellast und Vorzeichenwechsel der Querkraft

Einzelmoment innerhalb eines Balkenabschnitts:

In einem mit einem Einzelmoment M_1 belasteten Balkenabschnitt bleiben die Normalkraft N und die Querkraft Q konstant. Sie verändern sich nicht.

$$N(x) = N_L = N_R$$

$$Q(x) = Q_L = Q_R$$

Das Biegemoment M dagegen verändert sich linear, bis auf die Stelle, wo das Moment angreift. Dort verändert sich die Momentenlinie sprunghaft um den Betrag des angreifenden Lastmomentes M_1. Ist das Moment positiv, dann ist der Sprung auch in positiver Richtung. Ist das Moment negativ, dann ist der Sprung in negativer Richtung. Der Zuwachs des Biegemomentes ΔM an der Stelle x = L ist $Q \cdot L + M_1$.

$$M(x) = M_L + Q \cdot x \mid x < x_0$$

$$M(x) = M_L + Q \cdot x + M_1 \mid x_0 \le x$$

$$M_R = M_L + Q \cdot L + M_1$$

Die Steigung der Momentenlinie M-L entspricht der Querkraft.

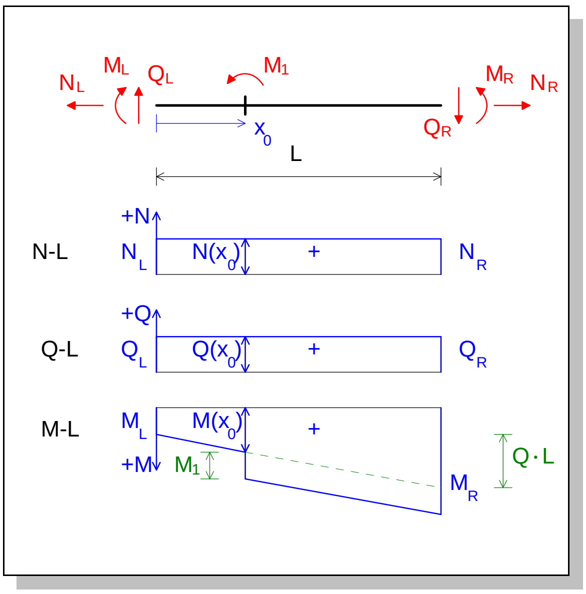


Bild 4.19: Balkenelement mit Einzelmoment

Gleichlast über einen Balkenabschnitts:

Eine Gleichlast (Rechtecklast) p [N/m] mit den Komponenten p_x und p_z in einem Balkenabschnitt hat eine Resultierende R_x in x- Richtung von $R_x = p_x \cdot L$ und eine Resultierende R_z in z- Richtung von $R_z = p_z \cdot L$.

Die Normalkraft N und die Querkraft Q verlaufen eine linear. Die Differenz der Schnittkräfte an den Rändern entsprechen den Resultierenden.

$N_L - N_R = R_x = p_x \cdot L$

$Q_L - Q_R = R_z = p_z \cdot L$

Die Funktionen N(x) und Q(x) errechnen sich aus

$N(x) = N_L - p_x \cdot x = N_R + p_x \cdot (L-x)$

$Q(x) = Q_L - p_z \cdot x = Q_R + p_z \cdot (L-x)$

Der Funktionswert der Kurven N(x) und Q(x) ergibt sich aus der Differenz des linken Randwertes und der überstrichenen Lastfläche, also der Teilresultierenden $p_x \cdot x$ und $p_z \cdot x$. Die Neigungen der Kurven sind $-p_x$ und $-p_z$.

Bei Belastungen in negativen Koordinatenrichtungen sind die negativen Zahlenwerte in die Gleichungen einzusetzen und es ist formal mit den negativen Größen weiter zu rechnen.

Das Biegemoment M verändert sich quadratisch. Es gelten die vorher besprochenen Regeln über Flächen und Neigung für jedes Teilgebiet. Der Zuwachs des Biegemomentes ΔM an der Stelle x = L ist genau so groß wie die gesamte Fläche unter der Querkraftlinie Q-L. Der Zuwachs des Biegemomentes von x = 0 bis $x = x_0$ beträgt $0{,}5 \cdot [Q_L + Q(x_0)] \cdot x_0$. Ist die Querkraft positiv, dann ist der Zuwachs auch positiv. Ist die Querkraft negativ, dann ist der „Zuwachs” negativ.

Für jede Schnittstelle x gilt:

$$M(x) = M_L + \frac{Q_L + Q(x)}{2} \cdot x = M_R - \frac{Q(x) + Q_R}{2} \cdot (L-x)$$

$$M(x) = M_L + Q_L \cdot x - \frac{p_z \cdot x^2}{2} = M_R - Q_R \cdot (L-x) + \frac{p_z \cdot (L-x)^2}{2}$$

Für den rechten Rand ergibt sich demnach:

$$M_R = M_L + Q_L \cdot L - \frac{p_z \cdot L^2}{2}$$

Die Steigung der Momentenlinie M-L an einer Stelle x entspricht der jeweiligen Querkraft an der selben Stelle. In der Mitte des Balkenabschnittes verläuft die Tangente an die Momentenlinie parallel zu der geradlinigen Verbindung der beiden Momente M_L und M_R. Der „Durchhang” d der Momentenlinie in der Mitte beträgt

$$d = \frac{R_z \cdot L}{8} = \frac{q \cdot L^2}{8}.$$

Der Schnittpunkt der Endtangenten befindet dich im Abstand d unter der Momentenlinie in Abschnittsmitte.

Am Beginn einer Gleichlast hat die Momentenlinie einen stetigen Verlauf aber unterschiedliche Krümmungen.

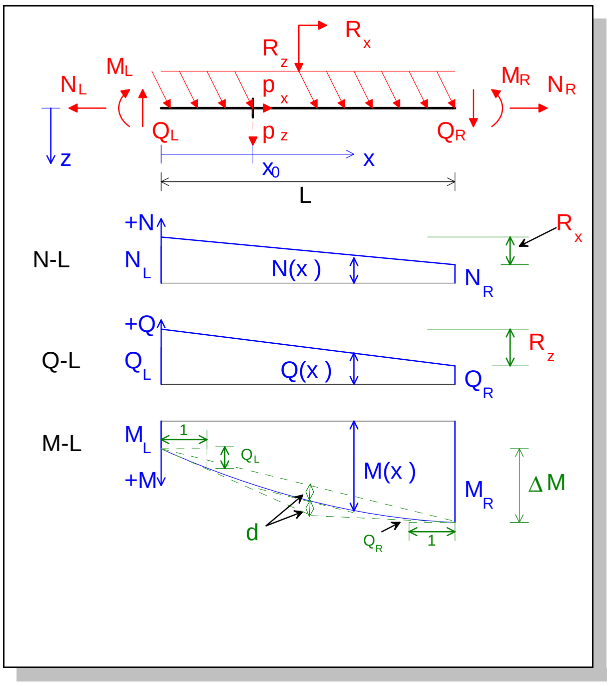
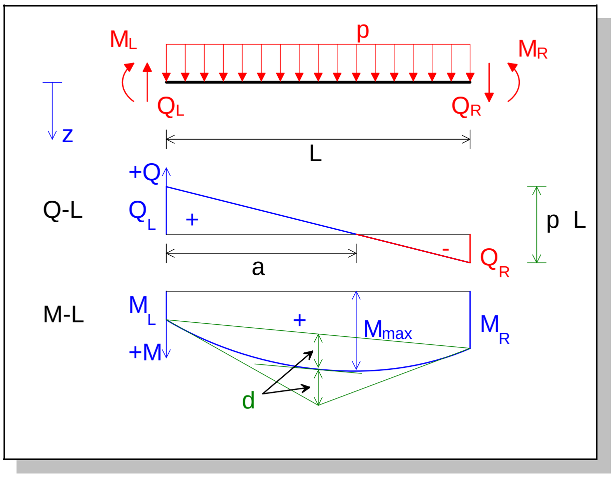


Bild 4.20: Balkenabschnitt mit schräger Gleichlast

Nullstellen der Querkraft führen zu extremen Momenten.



Eine Querkraftnullstelle entsteht immer dann, wenn für die positive Querkraft am linken Rand und positiver Belastungskomponente p_z $R_z > Q_L$ oder für die negative Querkraft am linken Rand und negativer Belastungskomponente p_z $Q_L > R_z$ gilt. Der extreme Wert für M(x) errechnet sich nach den vorher angegebenen Regeln zu

$$M_{extr} = M_L + \frac{Q_L \cdot a}{2} = M_L + \frac{Q_L}{2 \cdot p}$$

Bild 4.21: Balkenabschnitt mit Gleichlast und Vorzeichenwechsel der Querkraft

Trapezlast über einen Balkenabschnitt - steigendes Dreieck:

Zweckmäßiger Weise substituiert man hier die absolute Koordinate x durch die normierte Koordinate $\xi = x/L$.

$0 \leq \xi \leq 1$

Die Trapezlast $p_z(x)$ [N/m] hat zwei Teilresultierende

$R_R = p_L \cdot L$ für den Rechteckteil und eine Resultierende $R_D = 0{,}5 \cdot (p_R - p_L) \cdot L$ für den Dreieckteil. Zusammen bilden sie die Resultierende R, die in der Schwerlinie s wirkt.

Auf die Behandlung der Normalkraft N wird verzichtet, weil sie wie die Querkraft zu berechnen ist.

Die Querkraft Q verläuft quadratisch und bei steigender Dreieckslast mit stets zunehmender Neigung. Bei Kräften in positiver z- Richtung ist die Querkraft eine streng monoton abnehmende Funktion. Die Differenz der Schnittkräfte an den Rändern entsprechen den Resultierenden.

$Q_L - Q_R = R_R + R_D$

Die Funktion Q(x) errechnet sich aus

$Q(x) = Q_L - p_R \cdot x - 0{,}5 \cdot (p_R - p_L) \cdot x^2/L$

$Q(\xi) = Q_L - R_R \cdot \xi - R_D \cdot \xi^2$

Bei Belastungen in negativen Koordinatenrichtungen sind die negativen Zahlenwerte in die Gleichungen einzusetzen und es ist formal mit den negativen Größen weiter zu rechnen.

Der „Durchhang" ist $R_D/4$. Im doppelten Durchhang schneiden sich die Endtangenten. Weitere Tangenten lassen sich durch fortgesetzte Halbierung der bestehenden Tangenten ermitteln.

Das Biegemoment M verändert sich kubisch. Es gelten die vorher besprochenen Regeln über Flächen und Neigung für jedes Teilgebiet. Der Zuwachs des Biegemomentes ΔM an der Stelle x = L ist genau so groß wie die gesamte Fläche unter der Querkraftlinie Q-L. Ist die Querkraft positiv, dann ist der Zuwachs auch positiv. Ist die Querkraft negativ, dann ist der „Zuwachs" negativ.

Für jede Schnittstelle x gilt:

$$M(x) = M_L + Q_L \cdot x - \frac{p_L \cdot x^2}{2} - \frac{(p_R - p_L) \cdot x^3}{L \cdot 6}$$

$$M(\xi) = M_L + \left(Q_L \cdot \xi - \frac{R_R}{2} \cdot \xi^2 - \frac{R_D}{3} \cdot \xi^3\right) \cdot L$$

Für den rechten Rand ergibt sich mithin:

$$M_R = M_L + \left(Q_L - \frac{R_R}{2} - \frac{R_D}{3}\right) \cdot L$$

Die Steigung der Momentenlinie M-L an einer Stelle x entspricht der jeweiligen Querkraft an der selben Stelle. Der „Durchhang" d der Momentenlinie in Feldmitte beträgt

$$d = \frac{(R_R + R_D) \cdot L}{8} = \frac{(p_R + p_L)}{16} \cdot L^2.$$

Der Schnittpunkt der Endtangenten findet sich auf der Wirkungslinie der Gesamtresultierenden R.

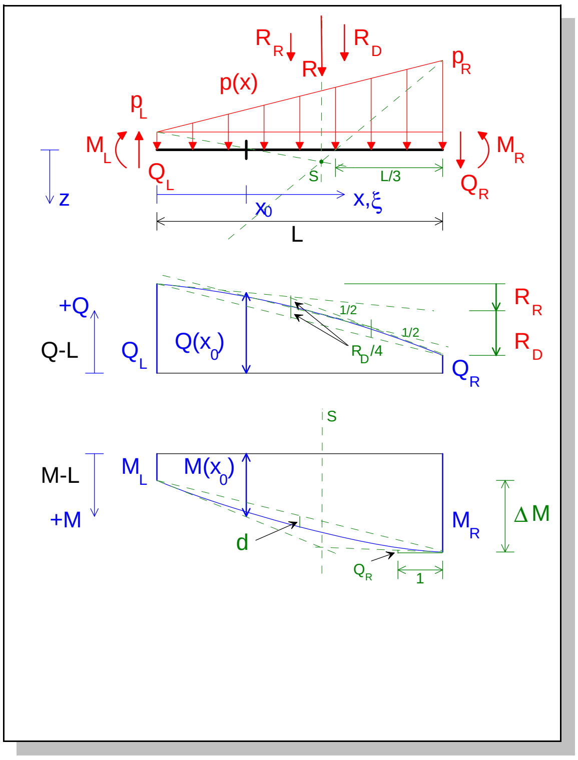


Bild 4. Balkenabschnitt mit linear steigender Last

Trapezlast über einen Balkenabschnitt - fallendes Dreieck:

Um die Gleichen Formeln benutzen zu können, lässt man die Abszisse wieder in Richtung des steigenden Dreieckes zeigen. Die Koordinatentransformation ist dann

$x = L - \bar{x}$ und für die normierte x-Koordinate gilt nach wie vor $0 \le \bar{\xi} \le 1$.

Die Trapezlast wird wieder in zwei Teilresultierende

R_R für den Rechteckteil und eine Resultierende R_D für den Dreieckteil zusammengefasst, die wieder gemeinsam die Resultierende R bilden. Wie gehabt wirkt diese in der Schwerlinie s.

Die Querkraft Q verläuft quadratisch und bei fallender Dreieckslast mit stets abnehmender Neigung.

Die Funktion Q(x) errechnet sich aus

$Q(\bar{x}) = Q_R + p_R \cdot \bar{x} + 0{,}5 \cdot (p_R - p_L) \cdot \bar{x}^2/L$

$Q(\bar{\xi}) = Q_R + R_R \cdot \bar{\xi} + R_D \cdot \bar{\xi}^2$

Der „Durchhang" ist auch hier $R_D/4$. Im doppelten Durchhang schneiden sich die Endtangenten.

Für jede Schnittstelle$\bar{x}$ gilt:

$$M(\bar{x}) = M_R - Q_R \cdot \bar{x} - \frac{p_R \cdot \bar{x}^2}{2} - \frac{(p_L - p_R) \cdot \bar{x}^3}{L \cdot 6}$$

$$M\left(\bar{\xi}\right) = M_L - \left(Q_L \cdot \bar{\xi} + \frac{R_R}{2} \cdot \bar{\xi}^2 + \frac{R_D}{3} \cdot \bar{\xi}^3\right) \cdot L$$

Für den linken Rand ergibt sich mithin:

$$M_L = M_R - \left(Q_L + \tfrac{R_R}{2} + \tfrac{R_D}{3}\right) \cdot L$$

Der „Durchhang" d der Momentenlinie in Feldmitte ist unabhängig von der Dreiecksform und beträgt wiederum

$$d = \tfrac{(R_R+R_D)\cdot L}{8} = \tfrac{(p_R+p_L)}{16} \cdot L^2.$$

Der Schnittpunkt der Endtangenten findet sich auch hier auf der Wirkungslinie der Gesamtresultierenden R.

Die Querkraftfläche besteht aus einem linearen und einem quadratischen Beitrag. Der quadratische Beitrag wird bei einem von links nach rechts steigenden Dreieck addiert, bei einem fallenden Dreieck subtrahiert.

$$\Delta M = \tfrac{1}{2} \cdot (Q_L + Q_R) \cdot L \pm \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{R_D}{4} \cdot L = \tfrac{L}{2} \cdot \left(Q_L + Q_R \pm \tfrac{R_D}{3}\right)$$

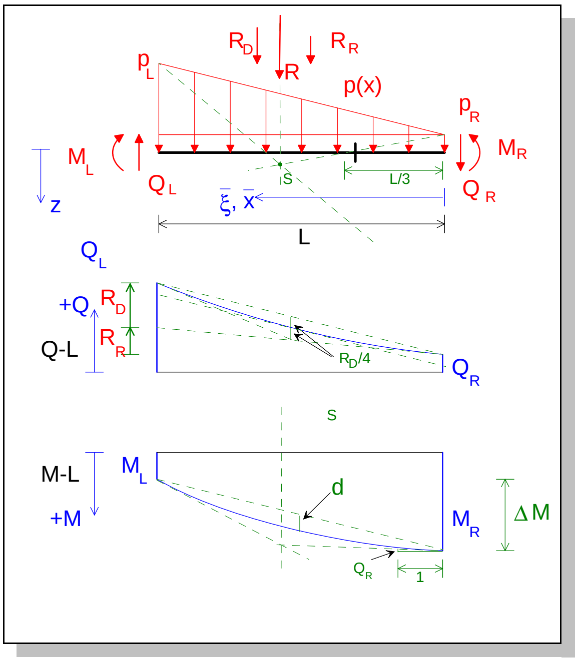


Bild 4. **Balkenabschnitt mit linear steigender Last**

5 Fachwerke

5.1 Ebene Fachwerke

5.1.1 Einleitung

Fachwerkträger findet man im Maschinenbau bei Kranen und im Bauingenieurwesen bei Stahlbrücken und Dachkonstruktionen. Kennzeichnend für Fachwerkträger ist das geringe Eigengewicht in Bezug zur Tragfähigkeit. Der technische Vorteil wird durch einen wirtschaftlichen Nachteil (größerer Herstellungsaufwand) erkauft.

5.1.2 Bezeichnungen und Tragprinzip

Die Konstruktionselemente von Fachwerken nennt man Stäbe. Für die Stäbe trifft man folgende Annahmen:

- Alle Stäbe werden nur durch Normalkräfte beansprucht. Es tritt keine Biegung in den Stäben auf.
- Ein Stab kann aus mehreren Profilen zusammengesetzt sein.
- Die Stabachse liegt im Schwerpunkt des Stabquerschnitts, bei mehrgliedrigen Stäben im Schwerpunkt des gesamten Querschnitts.
- Die Schnittpunkte der Stabachsen nennt man (Fachwerks-) Knoten.
- Die Stäbe sind in den Knoten gelenkig angeschlossen, andernfalls spricht man von einem biegesteifen Fachwerk, das hier nicht behandelt wird.
- Alle Lasten greifen ausschließlich in den Knoten an.
- Mit der Stabkraft S_i bezeichnet man die Normalkraft im Stab mit der Nummer i.
- Positive Stabkräfte sind - in Analogie zu den Normalkräften - Zugkräfte, negative Stabkräfte sind Druckkräfte.

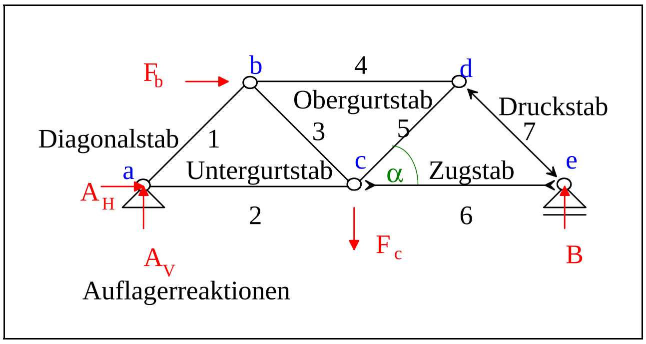


Bild 5.1: Bezeichnungen am Fachwerk

5.1.3 Statische Bestimmtheit

Folgendes notwendiges Kriterium gibt Auskunft über die statische Bestimmtheit des Systems:

$S + A > 2 \cdot K$ statisch unbestimmt
$S + A = 2 \cdot K$ statisch bestimmt (z. B. 7+3 = 2 · 5 in Bild 5.2)
$S + A < 2 \cdot K$ labil Gl. (5.1 a, b, c)

S := Anzahl der Stäbe
A := Anzahl der Auflagerreaktionen
K := Anzahl der Knoten

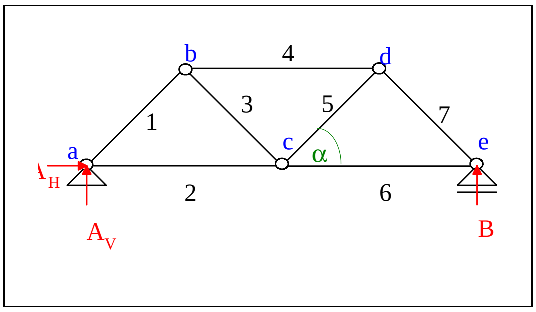


Bild 5.2: Statisches System eines Fachwerks

Man unterscheidet auch zwischen einer äußeren statischen Bestimmtheit, die sich nach den bekannten Regeln für Tragwerke errechnet (vergl. Abschnitt 2.2)

$A + Z = 3 \cdot n$ (3 + 0 = 3 · 1 in Bild 2.6.2 oder 4 + 2 = 3 · 2 in Bild 5.3)

Z := Zwischenreaktionen (Gelenke)
n := Teilfachwerke

und einer inneren statischen Bestimmtheit, die sich gemäß

$S = 2 \cdot K - A$ (7 = 2 · 5-3 in Bild 2.6.2) berechnet. Gl. (2.6.2)

Die Formel $S + 3 = 2 \cdot K$, die in dieser oder ähnlicher Form immer wieder verwendet wird. ist falsch!!! Der Fehler ist sofort zu erkennen, wenn A größer als drei ist (vergl. Bild 5.3).

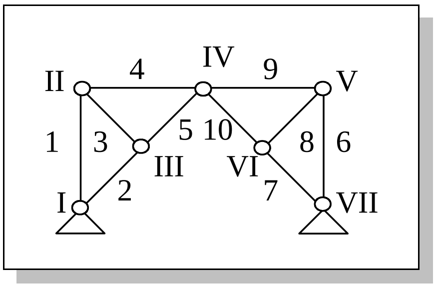


Bild 5.3: Statisch bestimmtes Fachwerk

5.1.4 Abbrechbare Fachwerke

Das Bildungsgesetz für abbrechbare Fachwerke (einfache Fachwerke) ist folgendermaßen:

An den beiden Enden eines vorhandenen Stabes schließt man je einen neuen Stab derart an, dass diese sich in einem gemeinsamen Knoten treffen.

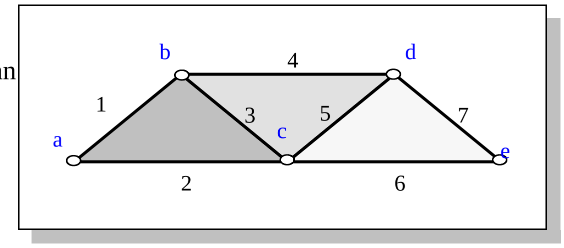


Bild 5.4: Abbrechbares Fachwerk

Die Stabkräfte dieser Fachwerke lassen sich elementar knotenweise berechnen, weil an mindestens einem Knoten nur zwei Stäbe anschließen.

5.1.5 Nicht abbrechbare Fachwerke

Nicht abbrechbare Fachwerke (komplizierte Fachwerke) bestehen häufig aus mehreren Fachwerkscheiben, die miteinander verbunden sind. Das an jedem Knoten mehr als zwei Stäbe anschließen, ist das Fachwerk nicht elementar berechenbar. Zur Berechnung muss vorher ein geeigneter Schnitt geführt werden.

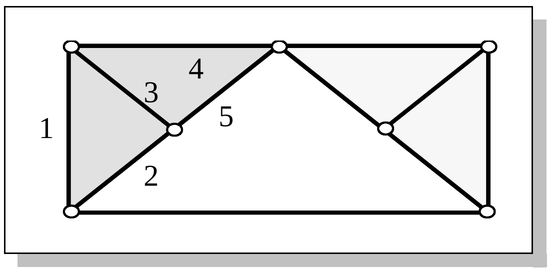


Bild 5.5: Nicht abbrechbares Fachwerk

5.1.6 Nullstäbe

Stäbe, deren Schnittkraft $S_i = 0$ ist, so genannte Nullstäbe, erkennt man an nachstehenden Bedingungen:

I. Treffen sich in einem Knoten nur zwei nichtparallele Stäbe und greifen keine äußeren Lasten an, dann sind beide Nullstäbe.

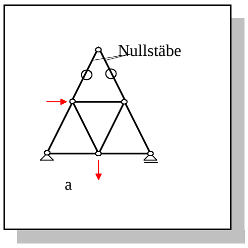


Bild 5.6: Nullstabkriterium a

II. Treffen sich in einem unbelasteten Knoten drei Stäbe, von denen zwei parallel sind, dann ist der dritte Stab ein Nullstab. Wenn oben der mittlere Stab als Nullstab entfällt, können die beiden äußeren oben nach Kriterium a auch entfernt werden

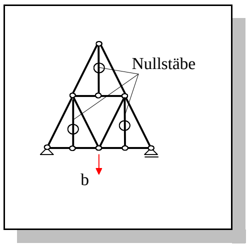


Bild 5.7: Nullstabkriterium b

III. Treffen sich in einem Knoten zwei nichtparallele Stäbe und greift eine äußere Kraft in Richtung eines Stabes an, dann ist der andere Stab ein Nullstab.

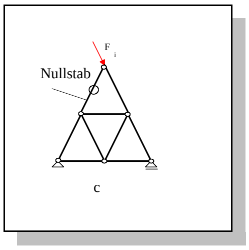


Bild 5.8: Nullstabkriterium c

5.1.7 Berechnung nach dem Knotenpunktsverfahren

Jeder aus einem Fachwerk herausgeschnittener Knoten befindet sich mit den freigelegten Schnittgrößen (Auflagerreaktionen oder Stabkräfte) im Gleichgewicht. Die Summe aller Horizontalkräfte und die Summe aller Vertikalkräfte ist Null.

$\Sigma V = 0 \qquad A_V + \sin(\alpha) \cdot S_1 \qquad = 0$

$\Sigma H = 0 \qquad A_H + \cos(\alpha) \cdot S_1 + S_2 \qquad = 0$

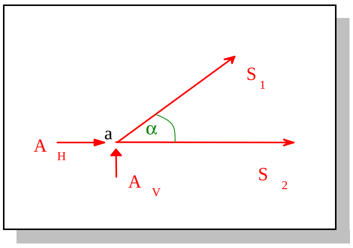


Bild 5.9: Gleichgewicht am Knoten a

Stabkräfte werden als Zugkräfte positiv definiert. Ergibt sich aus der Berechnung ein negativer Wert, dann wird der Stab auf Druck beansprucht.

Die Gleichgewichtsbedingungen führen zu einem linearen Gleichungssystem.

Beispiel: Statisch bestimmtes ebenes Fachwerks nach dem Knotenpunktsverfahren

Knoten	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	A_H	A_V	B	F_i		
a											
ΣH	0	1	0	0,7	0	1	0	0	0		0
ΣV	1	0	0	0,7	0	0	1	0	0		0
b											
ΣH	0	0	1	0	0	0	0	0	0	=	0
ΣV	-1	0	0	0	0	0	0	0	-10		0
c											
ΣH	0	0	-1	-0,7	0	0	0	0	0		0
ΣV	0	0	0	-0,7	-1	0	0	0	0		0
d											
ΣH	0	-1	0	0	0	0	0	0	0		0
ΣV	0	0	0	0	1	0	0	1	0		0

Das Gleichgewicht an den Knoten führt zu den Kräften:

$\Sigma H_b \Rightarrow$ Stab 3 = 0 kN
$\Sigma V_b \Rightarrow$ Stab 1 = -10 kN
$\Sigma H_c \Rightarrow$ Stab 4 = 0 kN
$\Sigma V_c \Rightarrow$ Stab 5 = 0 kN
$\Sigma H_d \Rightarrow$ Stab 2 = 0 kN
$\Sigma V_d \Rightarrow$ F_B = 0 kN
$\Sigma H_a \Rightarrow$ F_{AH} = 0 kN
$\Sigma V_a \Rightarrow$ F_{AV} = 10 kN

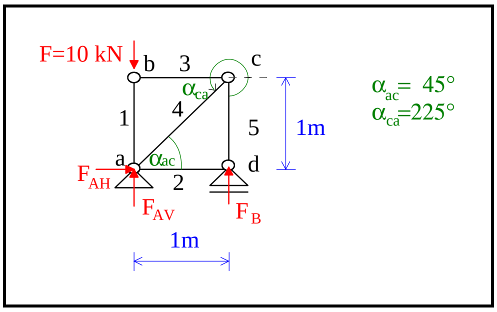


Bild 5.10: Ebenes Fachwerk

Hätte man die Nullstabkriterien angewandt, käme man schneller zu diesem Ergebnis (versuchen Sie ‘s!).

In abbrechbaren Fachwerken lassen sich die Gleichungen unabhängig voneinander lösen, wenn die Auflagerreaktionen bekannt sind.

Bei nicht abbrechbaren Fachwerken erhält man ein lineares Gleichungssystem in der Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{AH} \\ F_{Av} \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{aH} \\ F_{aV} \\ F_{bH} \\ F_{bV} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$\underline{A} \cdot \underline{S} = \underline{F}, \qquad \text{Gl. (5.3)}$$

das mit dem GAUSSschen Algorithmus gelöst werden kann.

5.1.8 RITTERsches Schnittverfahren

Schneidet man das Fachwerk durch höchstens drei Stäbe, von denen sich nicht mehr als zwei in einem Knoten treffen, in zwei unabhängige Teile, so wird dieser Schnitt als RITTERscher Schnitt bezeichnet.

$\Sigma M_{c\,=\,0}$ liefert S_4

$\Sigma M_d = 0$ liefert S_6

$\Sigma M_b = 0$ oder
$\Sigma H = 0$ oder
$\Sigma V = 0$ liefert S_5

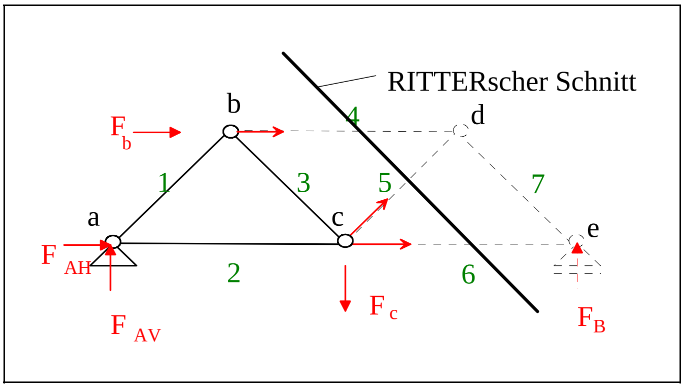


Bild 5.10: RITTERscher Schnitt

5.1.9 CREMONA-Plan

Beim CREMONA-Plan handelt es sich um ein graphisches Verfahren. Wenn man die Reihenfolge der Kräfte, die an einem Knoten angreifen, in einem festen Umlaufsinn (z. B. in mathematisch positivem Sinn, F_{AH}, F_{AV}, S_2, S_1) aufzeichnet, dann lassen sich alle Kraftecken in einem einfachen Gesamtschema - dem CREMONA-Plan - darstellen.

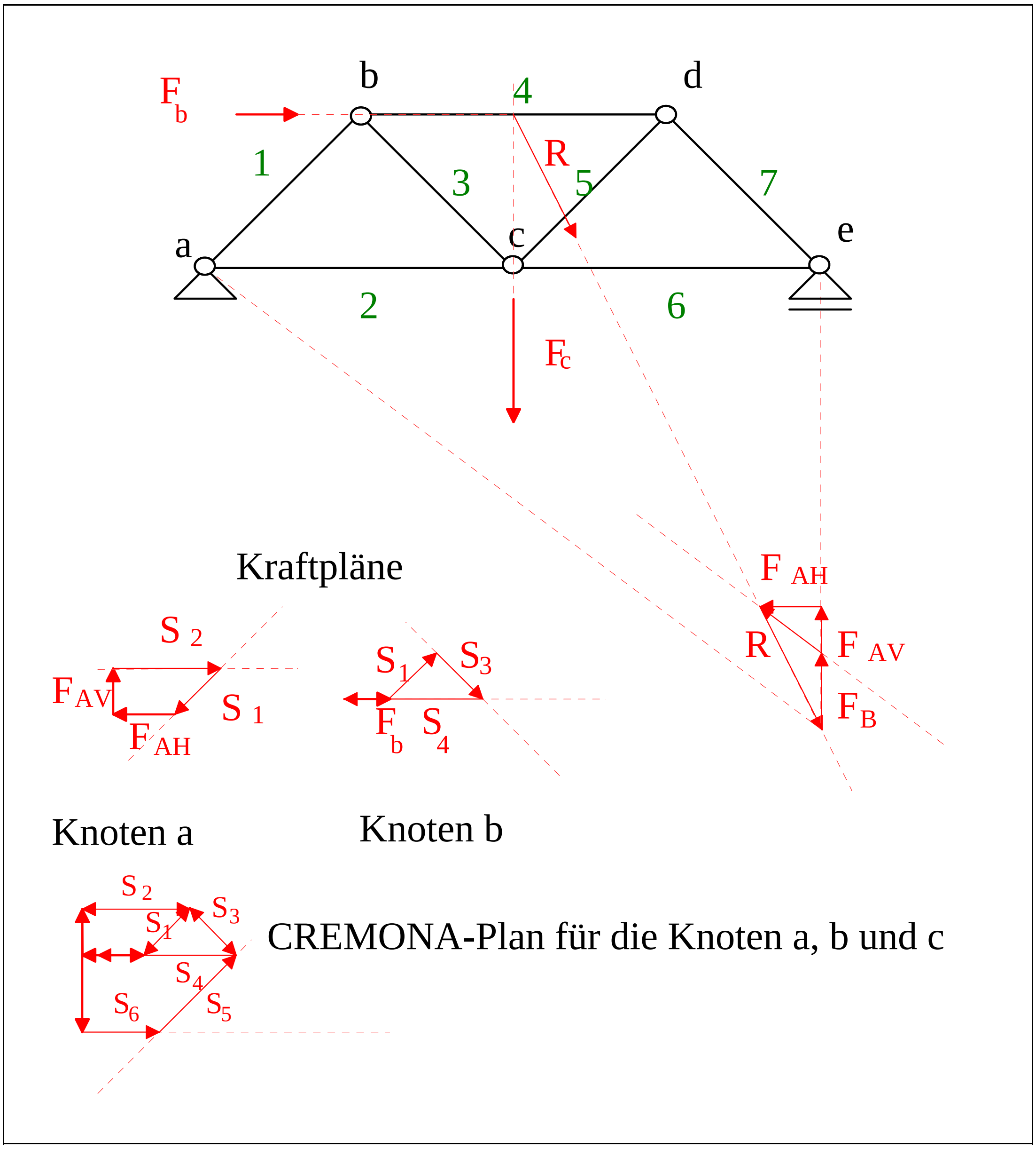
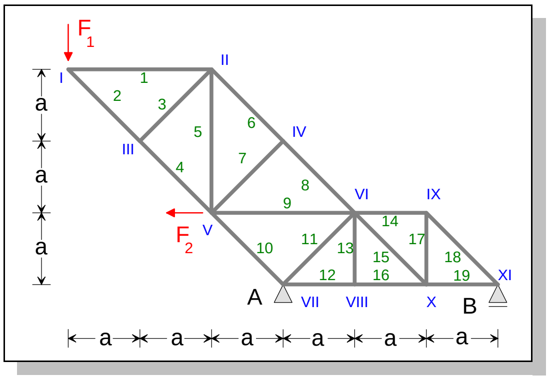


Bild 5.11: CREMONA-Plan

Beispiel: Abbrechbares Fachwerk
Für das skizziere Fachwerk mit den Einzellasten F_1 = 20 kN und F_2 = 20 kN sowie den Abschnittslängen a = 2 m sind folgendes zu bestimmen:

- Fachwerktyp
- die äußere und innere statische Bestimmtheit
- die Auflagerkräfte
- Nullstäbe
- Schnittkraft im Stab 8
- mögliche Startknoten zur Berechnung



Lösung:
Es handelt sich um ein ebenes abbrechbares Fachwerk.

Den drei unabhängigen Freiheitsgaden der Ebene (zwei Translationen und eine Rotation) stehen drei unabhängige Fesslungen gegenüber. Das Fachwerk ist statisch bestimmt gelagert. Die Anzahl der Stäbe ist zweimal der Anzahl der Knoten - 3. Das ebene Fachwerk ist innerlich statisch bestimmt.

Auflagerkraft F_A:

$$\Sigma M_B = 0 = F_1 \cdot 6 \cdot a + F_2 \cdot a - F_{A,V} \cdot 3 \cdot a$$

$$F_{A,V} = 20kN \cdot \frac{7}{3} = 46,66kN$$

$$\Sigma H = 0 = +F_2 + F_{A,H}$$

$$F_{A,H} = -20kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{A,V}^2 + F_{A,H}^2} = \sqrt{46,66^2 + 20^2}\ kN = 50,77kN$$

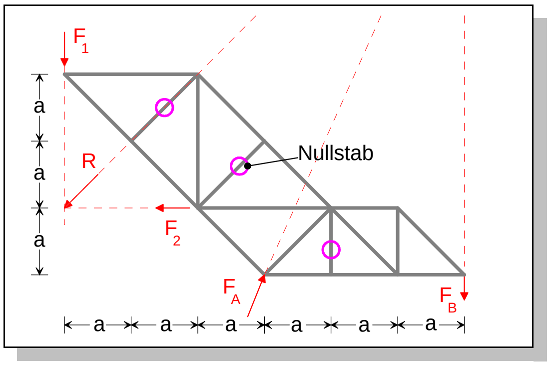
Die Auflagerkraft F_A ist eine Druckkraft

Auflagerkraft F_B:

$$\Sigma M_A = 0 = F_1 \cdot 3 \cdot a + F_2 \cdot a + F_B \cdot 3 \cdot a$$

$$F_B = -20kN \cdot \frac{4}{3} = -26,66kN$$

Die Auflagerkraft F_B ist eine Zugkraft und zeigt nach unten



Kontrolle:

$$\Sigma F_V = 0 = -F_1 + F_{A,V} + F_B = -20kN + 46,66kN - 26,66kN = 0kN$$

Nullstäbe siehe Skizze.

RITTERscher Schnitt durch den Knoten V

$$\Sigma M_V = +F_1 \cdot 2 \cdot a - S_8 \cdot \sqrt{2} \cdot a$$

$$S_8 = 20kN \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = +28,28kN \text{ (Zugstab)}$$

Die Berechnung kann an den Knoten I oder XI begonnen werden.

6 Dünnwandige Rotationsschalen

6.1 Geometrische Zusammenhänge

Die allgemeinste regelmäßige Rotationsschale ist die Torusschale. Aus der Torusschale lassen sich alle technisch wichtigen Schalenformen wie Kugel oder Zylinder ableiten. Aus dem Grund werden die benötigten Formeln erst für den Torus hergeleitet.

Die räumlichen Toruskoordinaten werden durch die drei unabhängigen orthogonalen Richtungen φ, ψ, r aufgespannt (Bild 2.9.1). Der Radius R ist konstant und stellt keine unabhängige Koordinate dar.

Wenn der Radius r konstant zu $r = r_o$ gehalten wird, dann entsteht eine Fläche, die wie ein aufgeblasener Schwimmreifen aussieht. Aus den Koordinatendifferentialen lassen sich Bogenlängen auf dieser Fläche in die zwei übrigen Koordinatenrichtungen errechnen.

Die Bogenlänge auf einem Breitengrad bestimmt sich zu $ds_{\psi\psi} = (R + r_o \cdot \sin(\psi)) \cdot d\varphi$ Gl (6.1a)
und die auf einem Längengrad zu $ds_{\varphi\varphi} = r_o \cdot d\psi$ Gl (6.1b)

Die Torusfläche ist doppelt gekrümmt. Für jeden Punkt dieser Fläche lassen sich zwei Krümmungen, die extremal werden, angeben. Diese Krümmungen, die senkrecht aufeinander stehen, nennt man Hauptkrümmungen. Die Kehrwerte sind die Hauptkrümmungsradien.

Am leichtesten lässt sich der kleinere Hauptkrümmungsradius in Richtung des Längengrades zu
$r_2 = r_o$ Gl (6.2b)
angeben.

Der größere Hauptkrümmungsradius zeigt in Richtung des Breitenkreises und beträgt
$r_1 = r_o + \frac{R}{\sin(\psi)}$. Gl (6.2a)

Die beiden Winkelöffnungen beziehen sich auf die Hauptkrümmungsrichtungen.

In Richtung des Breitenkreises öffnet sich der Winkel ϕ gemäß
$d\phi = \frac{ds_{\psi\psi}}{r_1}$.

Unter Zuhilfenahme von Gl (6.1a) ergibt sich
$d\phi = \sin(\psi) \cdot d\varphi$. Gl (6.3a)

Der Winkel in die zweite Hauptrichtung verändert sich nicht.
$d\psi = d\psi$. Gl (6.3b)

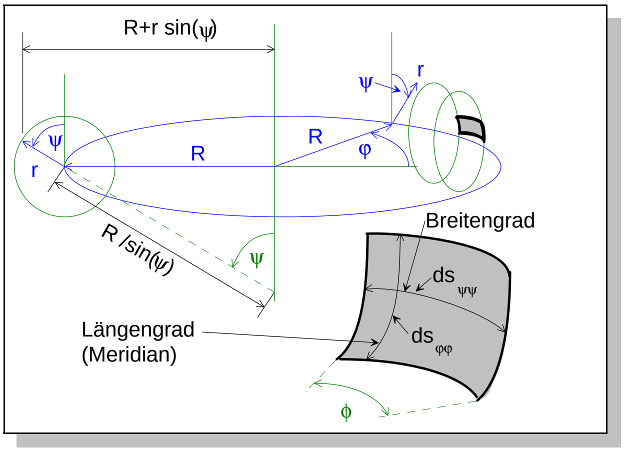


Bild 6.1: Schalengeometrie

6.2 Gleichgewicht am Flächenelement in Normalenrichtung

An dem Flächenelement $ds_{\varphi\varphi} \cdot ds_{\psi\psi}$ greift eine aus dem inneren Überdruck p resultierende Druckkraft dF in der Mitte des Elements und Schnittkräfte n an allen vier Rändern an. Diese Schnittkräfte $n_{\varphi\varphi}$ und $n_{\psi\psi}$ sind Linienlasten in N/mm verteilt über die jeweiligen Schnittränder. Dividiert man die Schnittkräfte durch die konstante Schalendicke h, erhält man die Membranspannungen σ. Die Membranspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ und $\sigma_{\psi\psi}$ sind Normalspannungen und weil keine Schubspannungskomponenten vorhanden sind, sind sie zugleich die Hauptspannungen σ_1 und σ_2.

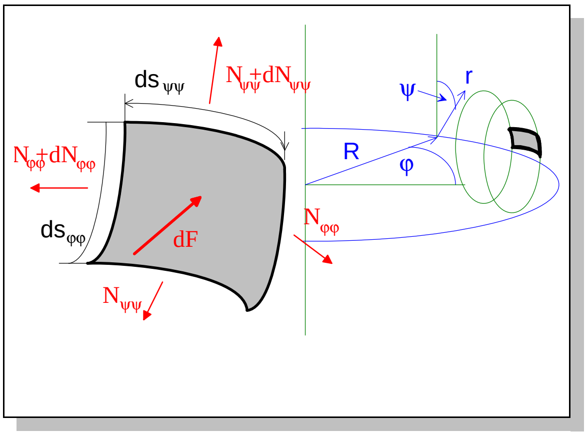


Bild 6.2: Bezeichnungen der angreifenden Kräfte

$$n_{\varphi\varphi} = \frac{N_{\varphi\varphi}}{ds_{\varphi\varphi}} = \frac{N_{\varphi\varphi}}{r \cdot d\psi}$$

$$n_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} \cdot h$$

$$n_{\psi\psi} = \frac{N_{\psi\psi}}{ds_{\psi\psi}} = \frac{N_{\psi\psi}}{(R + r \cdot \sin(\psi)) \cdot d\varphi}$$

$$n_{\psi\psi} = \sigma_{\psi\psi} \cdot h$$

Die Druckkraft dF ergibt sich als Produkt von Fläche und innerem Überdruck.

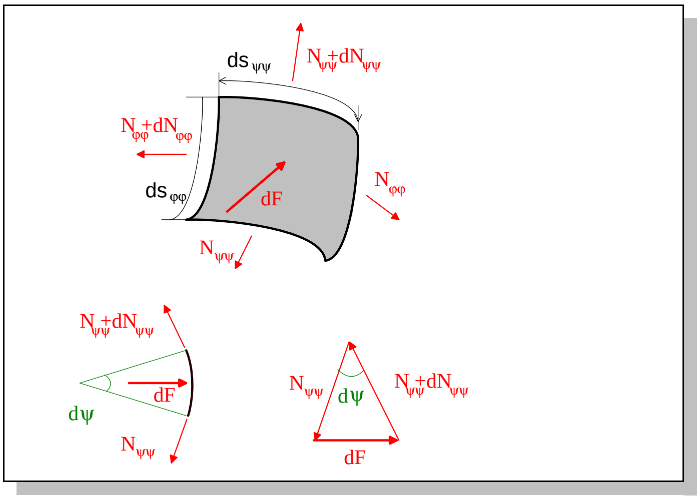


Bild 6.3: Gleichgewicht am Schalenelement in Normalenrichtung

$$dF = p \cdot ds_{\varphi\varphi} \cdot ds_{\psi\psi}$$

Am Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Flächennormalen sind die Resultierende Druckkraft dF und die Komponenten der Schnittkräfte in Richtung der Flächennormalen beteiligt.

$$dF - (N_{\varphi\varphi} + dN_{\varphi\varphi}) \cdot \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - N_{\varphi\varphi} \cdot \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) -$$

$$-(N_{\psi\psi} + dN_{\psi\psi}) \cdot \sin\left(\frac{d\psi}{2}\right) - N_{\psi\psi} \cdot \sin\left(\frac{d\psi}{2}\right) = 0$$

Die Rotationssymmetrie bedingt $dN_{\varphi\varphi} = 0$

$\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \approx \frac{d\phi}{2}$

$dN_{\psi\psi} \cdot d\psi \to 0$

(klein 2. Ordnung)

$$p \cdot ds_{\varphi\varphi} \cdot ds_{\psi\psi} - n_{\varphi\varphi} \cdot ds_{\varphi\varphi} \cdot d\phi - n_{\psi\psi} \cdot ds_{\psi\psi} \cdot d\psi = 0$$

$$\begin{aligned} & p \cdot r \cdot d\psi \cdot (R + r \cdot \sin(\psi)) \cdot d\varphi - \\ & - n_{\varphi\varphi} \cdot r \cdot d\psi \cdot \sin(\psi) \cdot d\varphi - \\ & - n_{\psi\psi} \cdot (R + r \cdot \sin(\psi)) \cdot d\varphi \cdot d\psi = 0 \end{aligned}$$

$$p = \frac{n_{\varphi\varphi} \cdot \sin(\psi)}{(R + r \cdot \sin(\psi))} + \frac{n_{\psi\psi}}{r}$$

$$p = \frac{n_{\varphi\varphi}}{\frac{R}{\sin(\psi)} + r} + \frac{n_{\psi\psi}}{r}$$

$$\boxed{p = \frac{n_{\varphi\varphi}}{r_1} + \frac{n_{\psi\psi}}{r_2}}$$

$n_{\varphi\varphi}$: Schnittkraft in Richtung Breitenkreis in N/m

$n_{\psi\psi}$: Schnittkraft in Richtung Meridian in N/m

r_1: Krümmungsradius des Breitenkreises

r_2: Krümmungsradius des Meridians

6.3 Schnittkräfte an typischen Rotationskörpern

6.3.1 Torusschale

Das Gleichgewicht zwischen der Schnittkraft in Meridianrichtung und dem Innendruck wird komponentenweise betrachtet.

Der resultierende senkrechte Druck auf den gedachten Kreisring des Wasserkörpers entspricht der senkrechten Komponente der umlaufenden Schnittkraft $n_{\psi\psi}$

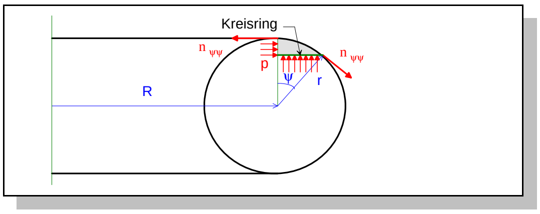


Bild 6.4: Gleichgewicht an der Torusschale

$$p \cdot \pi \cdot \left[(R + r \cdot \sin(\psi))^2 - R^2\right] = 2 \cdot \pi \cdot (R + r \cdot \sin(\psi)) \cdot n_{\psi\psi} \cdot \sin(\psi)$$

$$p \cdot [2 \cdot R \cdot r \cdot \sin(\psi) + r^2 \cdot \sin^2(\psi)] = 2 \cdot n_{\psi\psi} \cdot [R \cdot \sin(\psi) + r \cdot \sin^2(\psi)]$$

$$\boxed{n_{\psi\psi} = \frac{p \cdot r \cdot [2 \cdot R + r \cdot \sin(\psi)]}{2 \cdot [R + r \cdot \sin(\psi)]}}$$

Die Schnittkraft in Breitenkreisrichtung ergibt sich aus

$$p = \frac{n_{\varphi\varphi}}{r_1} + \frac{n_{\psi\psi}}{r_2} \qquad p = \frac{n_{\varphi\varphi} \cdot \sin(\psi)}{(R + r \cdot \sin(\psi))} + \frac{n_{\psi\psi}}{r}$$

$$p = \frac{n_{\varphi\varphi} \cdot \sin(\psi)}{(R + r \cdot \sin(\psi))} + \frac{p \cdot [2 \cdot R + r \cdot \sin(\psi)]}{2 \cdot [R + r \cdot \sin(\psi)]}$$

$$p \cdot 2 \cdot [R + r \cdot \sin(\psi)] = 2 \cdot n_{\varphi\varphi} \cdot \sin(\psi) + p \cdot [2 \cdot R + r \cdot \sin(\psi)]$$

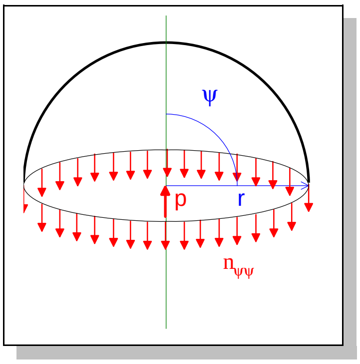
$$\boxed{n_{\varphi\varphi} = \frac{p \cdot r}{2}}$$

Kontrolle: Gleichgewicht am Meridianschnitt

$$p \cdot r^2 \cdot \pi = n_{\varphi\varphi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \qquad n_{\varphi\varphi} = \frac{p \cdot r}{2}$$

6.3.2 Kugelschale

$n_{\psi\psi} = \frac{p \cdot r \cdot [2 \cdot R + r \cdot \sin(\psi)]}{2 \cdot [R + r \cdot \sin(\psi)]}$ (aus Torus), R = 0



Schnittkraft in Meridianrichtung

Bild 6.5: Schnittkräfte an der Kugelschale

$$\boxed{n_{\psi\psi} = \frac{p \cdot r}{2}}$$

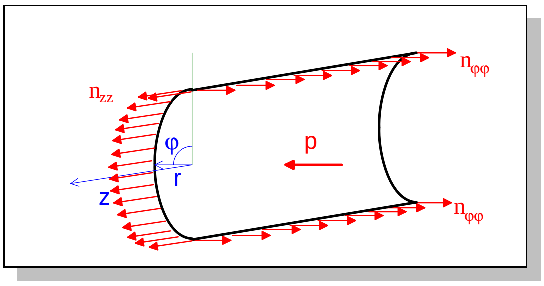
Kontrolle: Gleichgewicht am Äquator

$p \cdot r^2 \cdot \pi = n_{\psi\psi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$ $\qquad$ $n_{\psi\psi} = \frac{p \cdot r}{2}$

Schnittkraft in Breitenkreisrichtung

$$\boxed{n_{\varphi\varphi} = \frac{p \cdot r}{2}}$$

6.3.3 Zylinderschale



$n_{\psi\psi} = \frac{p \cdot r \cdot [2 \cdot R + r \cdot \sin(\psi)]}{2 \cdot [R + r \cdot \sin(\psi)]}$ (aus Torus), R $\rightarrow \infty$

Schnittkraft in Umfangsrichtung

Bild 6.6: Schnittkräfte an der Zylinderschale

$$\boxed{n_{\varphi\varphi} = p \cdot r}$$

Schnittkraft in axialer Richtung

$$\boxed{n_{zz} = \frac{p \cdot r}{2}}$$

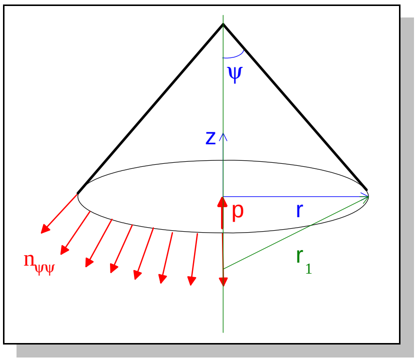
Kontrolle: Gleichgewicht an der Halbschale

$p \cdot 2 \cdot r = n_{\varphi\varphi} \cdot 2$ $\qquad$ $n_{\psi\psi} = p \cdot r$

6.3.4 Kegelschale

Schnittkraft in Richtung der Mantellinie

Σ der Vertikalkräfte = 0



$$p \cdot r^2 \cdot \pi = n_{\psi\psi} \cdot \cos(\psi) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

Bild 6.7: Kegelschale

$$\boxed{n_{\psi\psi} = \frac{p \cdot r}{2 \cdot \cos(\psi)}}$$

Schnittkraft in Umfangsrichtung

$$r_1 = \frac{r}{\cos(\psi)} \qquad \frac{n_{\varphi\varphi}}{r_1} = p$$

$$\boxed{n_{\varphi\varphi} = \frac{p \cdot r}{\cos(\psi)}}$$

6.3.5 Aufgaben

1. Aufgabe:

Berechnen Sie die Schnittkräfte für ein Rohr d_a = 51 mm, s = 10 mm bei einem Innendruck von 200 bar nach der Theorie der dünnwandigen rotationssymmetrischen Schalen.

2. Aufgabe:

Bestimmen Sie die Schnittkräfte in einem Rohrbogen. Der Rohraußendurchmesser d_a ist 51 mm, und die Wanddicke s beträgt 4 mm. Der Krümmungsradius sei 500 mm, der innere Überdruck 10 bar. Die Wanddicke s kann für die Berechnung näherungsweise konstant angenommen werden. Wie ändert sich die Schnittkräfte, wenn der Druck auf 100 bar anwächst?

7 Reibung

7.1 Haftreibung

Wenn Körper relativ zueinander in Ruhe sind und ein gegenseitiger Anpressdruck vorhanden ist, dann können parallel zur Berührungsfläche Reibungskräfte F_R übertragen werden. Die maximal übertragbare Reibungskraft wächst proportional zur Anpresskraft F_G.

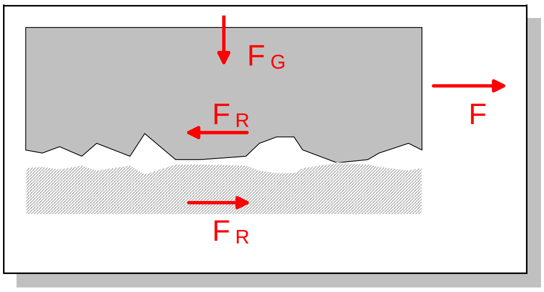


Bild 7.1: Haftreibung zwischen zwei starren Körpern

$$F_{R\,\max} = \mu_0 \cdot F_G$$

Den Proportionalitätsfaktor μ_0 nennt man Haftzahl, Haftreibungskoeffizient oder Reibungsbeiwert der Ruhe. Solange eine angreifende Kraft F kleiner ist als $F_{R\,max}$ findet keine Relativbewegung zwischen den beiden Körpern statt.

Überschreitet die Kraft F die maximale Reibungskraft $F_{R\,max}$, wird der Verbund der beiden Körper aufgebrochen und die beiden Kontaktflächen gleiten aufeinander.

Haftreibungskoeffizienten μ_0:
- Metall - Metall 0,2
- Metall - Holz 0,5
- Metall - Eis 0,03

7.1.1 Reibungskegel, Reibungskeil

Solange aber die Ersatzkraft R, resultierend aus F_G und F_1, nicht den Reibungskegel (3D) oder Reibungskeil (2D) mit dem halben Öffnungswinkel ρ_0 ($\mu_0 = \tan(\rho_0)$)nicht überschreitet, wird auch die Haftreibung nicht überschritten und der Körper bleibt liegen. Sobald die Resultierende R außerhalb der Reibungskegels fällt, wird der Körper in Richtung F_1 mit der antreibenden Kraft F_1 - F_R beschleunigt.

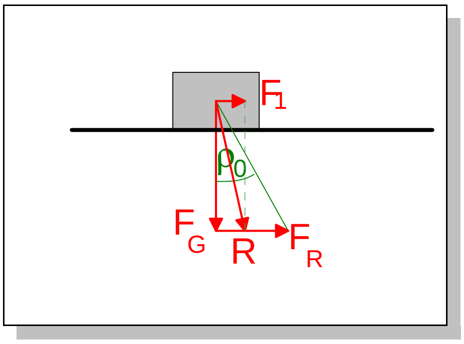


Bild 7.2: Reibungskeil

Bei schiefen Ebenen erzeugt die Normalkraft F_N den Anpressdruck, der senkrecht zu der Ebene A-A wirkt. Die Normalkraft F_N ist eine Komponente, die Hangabtriebskraft F_H die andere Komponente, in welche die Gewichtskraft F_G zerlegt wird. Überschreitet die Hangabtriebskraft F_H

$$F_H = F_G \cdot \sin(\varphi_0)$$

die Haftreibungskraft F_R

$$F_R = \mu_0 \cdot F_N = \mu_0 \cdot F_G \cdot \cos(\varphi_0)$$

beginnt der Körper zu gleiten. Im Grenzfall gilt

$$F_H = F_R$$

$$F_G \cdot \sin(\varphi_0) = \tan(\varphi_0) \cdot F_G \cdot \cos(\varphi_0) = F_G \cdot \sin(\varphi_0)$$

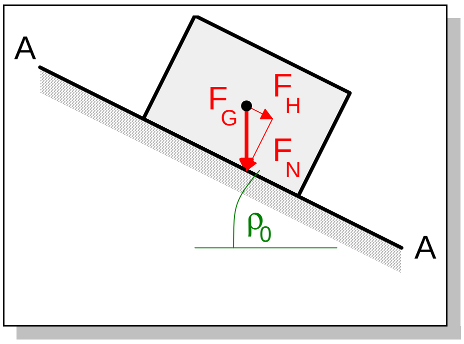


Bild 7.3: Praktische Bestimmung des Reibungswinkels

7.1.2 Selbsthemmung

Unter Selbsthemmung versteht man das statische Gleichgewicht unter Berücksichtigung von Reibungskräften. Für die dargestellte Leiter gilt im Gleichgewichtsfall:

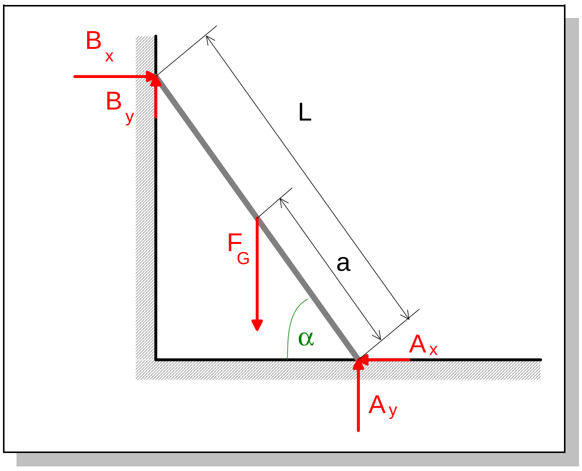


Bild 7.4: Selbsthemmung am Beispiel einer Leiter

$$\sum F_x = 0 = A_x - B_x$$

$$\sum F_x = 0 = A_y + B_y - F_G$$

$$\sum M_A = 0 = B_x \cdot L \cdot \sin(\alpha) + B_y \cdot L \cdot \cos(\alpha) - F_G \cdot a \cdot \cos(\alpha)$$

Reibungskräfte $A_x \le \mu_{0A} \cdot A_y$ und $B_y \le \mu_{0B} \cdot B_x$

$$A_x - B_x = \mu_{0A} \cdot A_y - B_x = 0$$

$$A_y + B_y - F_G = A_y + \mu_{0B} \cdot B_x - F_G = 0 \mid \cdot \tfrac{1}{\mu_{0B}}$$

$$\frac{A_y}{\mu_{0B}} + B_x = \frac{F_G}{\mu_{0B}}$$

$$A_y = \frac{F_G}{1+\mu_{0A}\cdot\mu_{0B}} \qquad B_x = \frac{\mu_{0A}\cdot F_G}{1+\mu_{0A}\cdot\mu_{0B}}$$

(statisches Gleichgewicht im Grenzfall, dass die Reibung voll ausgenutzt wird)

$$B_y = \frac{-B_x \cdot L \cdot \sin(\alpha) + F_G \cdot a \cdot \cos(\alpha)}{L \cdot \cos(\alpha)} \le \mu_{0B} \cdot B_x$$

$$-\tan(\alpha) + \frac{F_G}{B_x} \cdot \frac{a}{L} \le \mu_{0B}$$

$$\tan(\alpha) \le \frac{1+\mu_{0A}\cdot\mu_{0B}}{\mu_{0A}} \cdot \frac{a}{L} - \mu_{0B}$$

$$\tan(\alpha) \le \frac{1}{\mu_{0A}} \cdot \frac{a}{L} + \frac{a-L}{L} \cdot \mu_{0B}$$

Außerhalb des dunkel markierten Bereiches ist kein Gleichgewicht für die Lage der Kraft F_G möglich

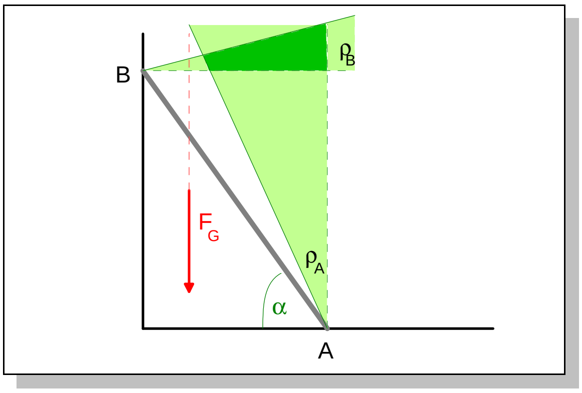


Bild 7.5: Mögliche Gleichgewichtslagen der Leiter

7.2 Gleitreibung (COULOMBsche Reibung)

Im Gegensatz zur Haftreibung, wird bei der Gleitreibung Energie umgewandelt. Der Gleitreibungskoeffizient μ ist geringer als der Haftreibungskoeffizient μ_0.

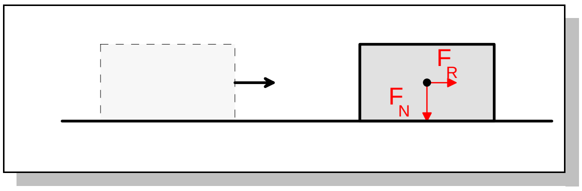


Bild 7.6: Gleitreibung

$$\boxed{F_R = \mu \cdot F_N}$$

7.2.1 Hangabtrieb

An einem Körper auf einer reibungsbehafteten schiefen Ebene treten folgende Kräfte auf :

$$\Sigma F_x = 0 = -F \cdot \cos(\beta) + F_G \cdot \sin(\varphi) \pm F_R$$

$$\Sigma F_y = 0 = -F \cdot \sin(\beta) - F_G \cdot \cos(\varphi) + F_N$$

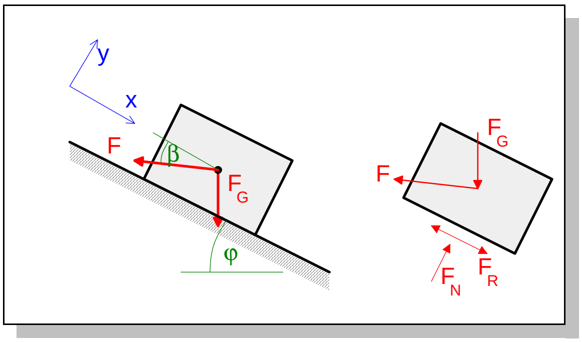


Bild 7.7: Kräfte am Körper auf einer schiefen Ebene mit Reibung

$$F_N = F \cdot \sin(\beta) + F_G \cdot \cos(\varphi)$$

$$\pm F_R = \pm\mu \cdot F_N = \pm \tan(\varrho) \cdot F_N$$

$$\pm F_R = \pm \tan(\varrho) \cdot (F \cdot \sin(\beta) + F_G \cdot \cos(\varphi))$$

$$0 = -F \cdot \cos(\beta) + F_G \cdot \sin(\varphi) \pm \tan(\varrho) \cdot (F \cdot \sin(\beta) + F_G \cdot \cos(\varphi))$$

$$F \cdot (\cos(\beta) \mp \tan(\varrho) \cdot \sin(\beta)) = F_G \cdot (\sin(\varphi) \pm \tan(\varrho) \cdot \cos(\varphi))$$

$$\boxed{F = F_G \cdot \frac{\sin(\varphi) \pm \tan(\varrho) \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\beta) \mp \tan(\varrho) \cdot \sin(\beta)} = F_G \cdot \frac{\sin(\varphi) \pm \mu \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\beta) \mp \mu \cdot \sin(\beta)}}$$

Die oberen Vorzeichen gelten für die Aufwärtsbewegung, die unteren Vorzeichen für die Abwärtsbewegung.

Sonderfälle:
Kraft F ist parallel zur Ebene, also β = 0

$$F = F_G \cdot (\sin(\varphi) \pm \tan(\varrho) \cdot \cos(\varphi)) = F_G \cdot (\sin(\varphi) \pm \mu \cdot \cos(\varphi))$$

Kraft F ist parallel zur Ebene, also β = 0 und φ sehr klein

$$F = F_G \cdot \tan(\varphi \pm \varrho)$$

Kraft F wirkt horizontal, also φ = β

$$F = F_G \cdot \frac{\sin(\beta) \pm \tan(\varrho) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\beta) \mp \tan(\varrho) \cdot \sin(\beta)} = F_G \cdot \frac{\sin(\beta) \pm \mu \cdot \cos(\beta)}{\cos(\beta) \mp \mu \cdot \sin(\beta)}$$

$$F = F_G \cdot \frac{\tan(\beta) \pm \tan(\varrho)}{1 \mp \tan(\varrho) \cdot \tan(\beta)} = F_G \cdot \tan(\beta \pm \varrho)$$

In dem Fall, in dem die Kraft F negativ ist, reicht der Hangabtrieb zum Gleiten nicht aus. Es liegt dann ein Fall von Selbsthemmung vor.

7.2.2 Keil

Die Fragestellung bei diesem Problem ist: Welche Kraft F benötigt man um den Block mit der Gewichtskraft F_G anzuheben?

Separiert man die beiden Körper A und B, lassen sich zwei zentrale Kraftsysteme formulieren. Im Kraftsystem, das am Körper B wirkt errechnet man mit der gegebenen Kraft F_G die beiden Reibungskräfte F_{RB} und F_{RAB}, am Körper A danach mit der inmittels bekannten Kraft F_{RAB} Reibungskraft F_{RB} und die gesuchte Kraft F.

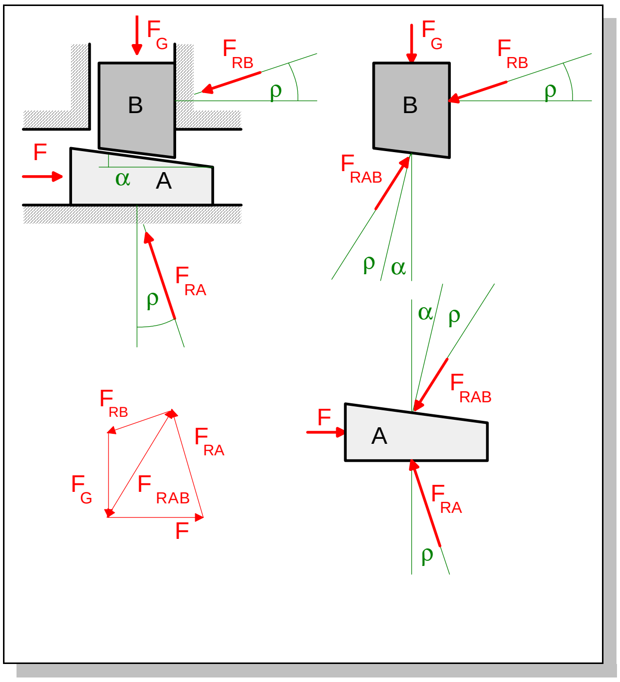


Bild 7.8: Kräfte am Keil mit Reibung

7.2.3 Schraube

Die Fragestellung bei diesem Problem ist: Welche Anpresskraft F wird mit der Schraube ausgeübt, wenn sie mit dem Moment $M = F_M \cdot a$ angezogen wird?

Bei der Drehbewegung gleitet das Rechteckgewinde den Hang mit dem Neigungswinkel α empor. Die benötigte Schubkraft F_S ist

$$F_S = F \cdot \tan(\alpha \pm \rho).$$

Oder umgekehrt

$$F = F_S \cdot \cot(\alpha \pm \rho).$$

Ersetzt man den Hebelarm r von F_S durch a der Kraft F_M erhält man

$$F = F_M \cdot \tfrac{a}{r} \cdot \cot(\alpha \pm \rho).$$

(+: anziehen, -: lösen)

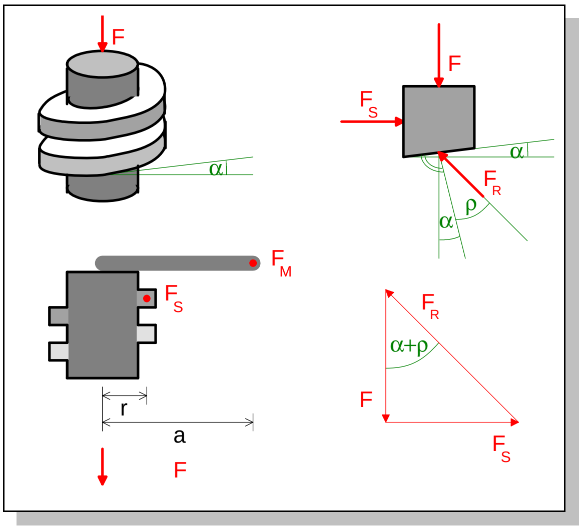


Bild 7.9: Kräfte an der Schraube mit Reibung

7.2.4 Seilreibung

Zwischen dem Seil (Riemen, usw.) und der kreisrunden Rolle der Breite b wirkt der Anpressdruck

$$\sigma_{xx} = \frac{dF_N}{b \cdot r \cdot d\varphi}.$$

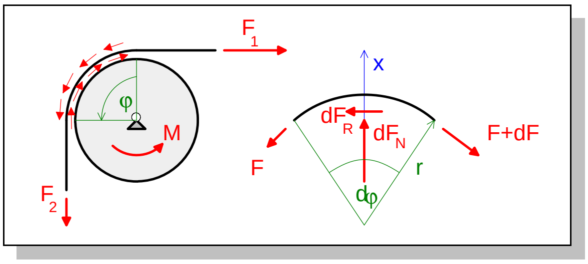


Bild 7.10: Kräfte am umgelenkten Seil mit Reibung

Dieser bewirkt eine maximale Schubspannung σ_{xy} von

$$\sigma_{xy} = \mu_0 \cdot \sigma_{xx} = \mu_0 \cdot \frac{dF_N}{b \cdot r \cdot d\varphi}$$

und die maximale resultierende Reibkraft dF_R

$$dF_R = \sigma_{xy} \cdot b \cdot r \cdot d\varphi = \mu_0 \cdot dF_N.$$

Das Gleichgewicht in x- Richtung führt zu

$$dF_N = F \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + (F + dF) \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}.\right)$$

Wenn man die Näherung sin(φ) = φ, die für kleine Winkel zutreffend ist, einführt und dF · dφ als klein zweiter Ordnung ansieht, ergibt sich Folgendes

$$dF_N = F \cdot d\varphi.$$

Das Gleichgewicht in Umfangsrichtung verlangt

$$F + dF_R = F + dF$$

$$dF_R = dF$$

$$\mu_0 \cdot dF_N = dF$$

$$\mu_0 \cdot F \cdot d\varphi = dF,$$

mit der Lösung

$$\mu_0 \cdot \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi = \int_{F_2}^{F_1} \frac{dF}{F},$$

$$\mu_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = \ln(F_1) - \ln(F_2),$$

also

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = e^{\mu_0 \cdot \alpha}}$$

α entspricht dem Öffnungswinkel zwischen φ_1 und φ_2.

7.3 Rollreibung

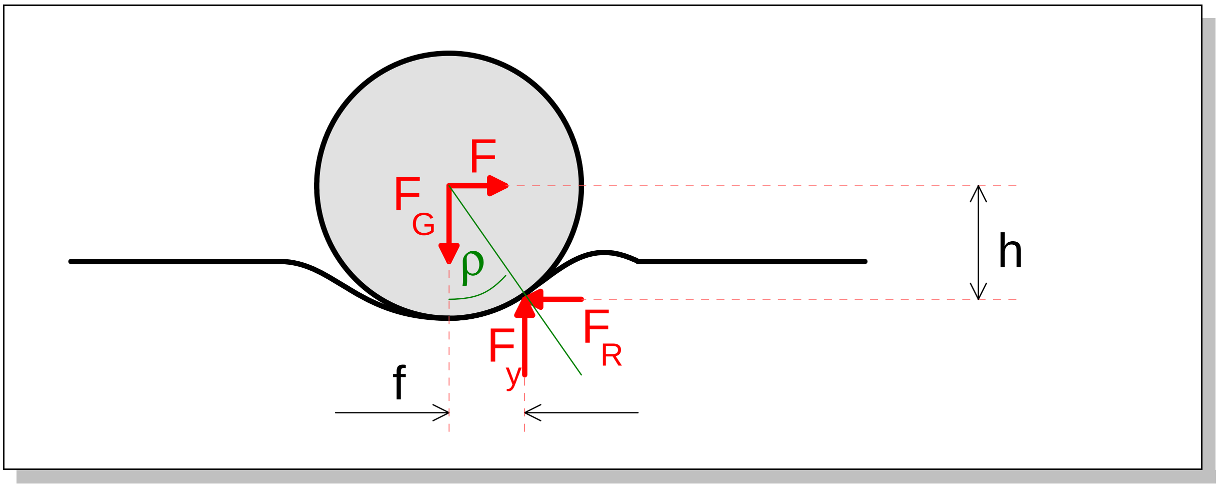


Bild 7.11: Kräfte bei der Rollreibung

Die Rollreibung ist wesentlich geringer als die Gleitreibung. Sie ist als Kontaktproblem zwischen zwei elastischen (plastischen) Körpern zu betrachten.

Die Verformung des Untergrundes bewirkt, dass sich der Angriffspunkt der Auflagerreaktion um den Betrag f in Bewegungsrichtung verschiebt. Das antreibende Moment $F \cdot h$ muss das rückstellende Moment $F_G \cdot f$ überwinden.

Der Hebelarm des Rollwiderstandes f hängt von der Steifigkeit der Rolle (Kugel) und der Unterlage ab. Harte Werkstoffe besitzen geringe Rollwiderstände.

Bei Kugellagern erreicht man Werte von $\tan(\rho) = 0{,}002$.

$$F_R = \mu_R \cdot F_G$$

7.4 Reibung in Schüttgütern

Wenn Schüttgüter, wie beispielsweise trockener Sand, zu einem Kegel aufgeschüttet werden, dann stellt sich ein Winkel der inneren Reibung φ ein. Bei Sand und Kies beträgt dieser Winkel 30° - 35°. Rundkörniger Sand bildet flachere (30°) Kegel Schotter steilere (40°) Kegel aus. In bindigen Böden (Ton, Lehm, Mergel, ...) sind die Winkel wegen der Kohäsion steiler.

Ab einer gewissen Tiefe sind Gräben für Versorgungsleitungen beim Ausschachten zu sichern (Arbeitsschutz- und Unfallverhütungsvorschriften). Die Kräfte auf den Grabenverbau lassen sich wie folgt abschätzen.

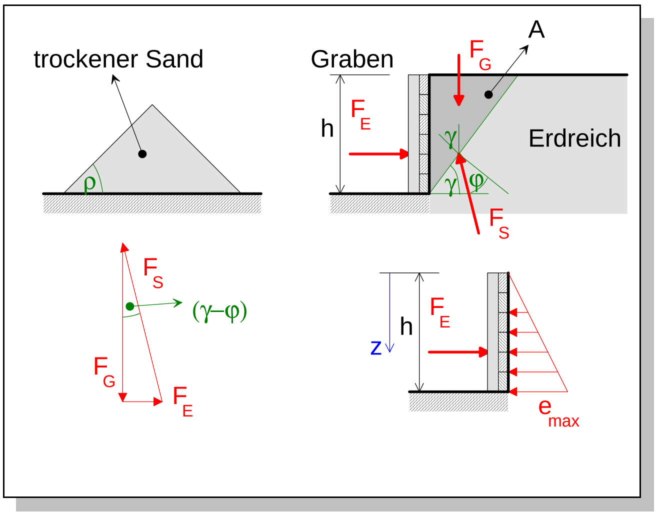


Bild 7.12: Kräfte bei der Reibung in Schüttgütern

Der Gleitkeil A mit der Grabenlänge b, der unter dem Winkel γ auf den Verbau drückt hat das Gewicht

$$F_G = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot \cot(\gamma) \cdot b \cdot \rho \cdot g \qquad (g \approx 10\ \text{m/s}^2)$$

Böden besitzen eine Dichte ρ von etwa ρ = 2 t/m³.

Die Erddruckkraft F_E ist in Abhängigkeit des Gleitwinkels γ

$$F_E = F_G \cdot \tan(\gamma-\varphi) = \tfrac{1}{2} \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \cot(\gamma) \cdot \tan(\gamma-\varphi)$$

Variiert man den möglichen Gleitwinkel γ, so stellt sich bei einem gewissen Winkel eine größtmögliche Erddruckkraft F_E ein. Die Bedingung für den Extremwert ist

$$\frac{dF_E(\gamma)}{d\gamma} = 0 = \tfrac{1}{2} \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \left[\frac{\cot(\gamma)}{\cos^2(\gamma-\varphi)} - \frac{\tan(\gamma-\varphi)}{\sin^2(\gamma)}\right]$$

$$\frac{\cot(\gamma)}{\cos^2(\gamma-\varphi)} = \frac{\tan(\gamma-\varphi)}{\sin^2(\gamma)}$$

$$\sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) = \sin(\gamma-\varphi) \cdot \cos(\gamma-\varphi)$$

$$\sin(2 \cdot \gamma) = \sin(2 \cdot (\gamma-\varphi))$$

$$2 \cdot \gamma = 180^o - 2 \cdot (\gamma-\varphi) \quad \gamma = 45^o + \tfrac{\varphi}{2}.$$

Somit wird die maximale Erddruckkraft $F_{E,max}$ zu

$$F_{E,\max} = \tfrac{1}{2} \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \tan^2\left(45^o - \tfrac{\varphi}{2}\right)$$

Der Erddruck e nimmt wie der hydrostatische Druck p mit zunehmender Tiefe zu. Bei Annahme einer linearen Verteilung erhält man den Erddruck e aus $F_{E,max}$ zu

$$F_{E,\max} = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot e_{\max}$$

$$e_{\max} = h \cdot \rho \cdot g \cdot \tan^2\left(45^o - \tfrac{\varphi}{2}\right)$$

e ist der Erddruck in N/m².

$$e(z) = z \cdot \rho \cdot g \cdot \tan^2\left(45^o - \frac{\varphi}{2}\right)$$

8 Literatur

Autor	Titel	Verlag	Schwierigkeitsgrad		
			Univ	FH	FS
Schnell, Gross, Hauger	Technische Mechanik, 1 Statik	Springer Verlag	x	x	
Schnell, Gross, Ehlers, Wriggers	Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik, 1 Statik	Springer Verlag	x	x	
O. Bruhns, T. Lehmann	Elemente der Mechanik I, Einführung, Statik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft	x		
O. Bruhns, T. Lehmann	Aufgabensammlung Technische Mechanik 1	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft	x		
B. Assmann	Technische Mechanik, Band 1: Statik	Oldenbourg Wissenschaftsverlag		x	
M. Mayr	Technische Mechanik	Carl Hanser Verlag		x	
H. G. Hahn	Technische Mechanik	Carl Hanser Verlag	x		
A. Böge	Technische Mechanik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft			x
A. Böge	Aufgabensammlung Technische Mechanik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft			x
A. Böge	Lösungen zur Aufgabensammlung Technische Mechanik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft			x
A. Böge	Formeln und Tabellen zur Technische Mechanik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft			x
J. Berger	Technische Mechanik für Ingenieure, Band 1: Statik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft		x	
H. H. Gloistehn	Lehr- und Übungsbuch der Technischen Mechanik Band 1: Statik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft		x	
K. Wohlhart	Statik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft	x	x	
K. Wohlhart	Dynamik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft	x	x	
Holzmann, Meyer, Schumpich	Technische Mechanik, Teil 1 Statik	B. G. Teubner Verlagsgesellschaft	x	x	
Sayir, Dual, Kaufmann	Ingenieurmechanik 1	B. G. Teubner Verlagsgesellschaft	x		
Magnus, Müller-Slany	Grundlagen der Technischen Mechanik	B. G. Teubner Verlagsgesellschaft	x		
J. Winkler, H. Aurich	Taschenbuch der Technischen Mechanik	Carl Hanser Verlag	x	x	
M. Richard M. Sander	Technische Mechanik Statik	Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft		x	