TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 2013
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, C. Mehl, G. Penn-Karras
Assistenten: R. Kehl, A. Kolleck
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=8182

Abgabe: 10.06-14.06.2013

8. Übung Analysis II für Ingenieure

(Potentiale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

(i) Gegeben sei die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 e^{y-z} + y(x+z)^2.$$

Berechnen Sie das Vektorfeld ∇u und anschließend ein Potential von ∇u.

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{\omega}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2(y-z) \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Vektorfeld $\operatorname{rot}(\vec{\omega})$ und anschließend ein Vektorpotential von $\operatorname{rot}(\vec{\omega})$.

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^x y^3 \\ 2e^x y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein globales Potential besitzt. Bestimmen Sie anschließend alle Potentiale von $\vec{v}$.

3. Aufgabe

(i) Seien $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ und

$$\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} z^2 + \sin(x) \\ (x+y)^{\frac{2}{3}} \\ g(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Wie muss die Funktion g gewählt werden, damit $\vec{v}$ ein Vektorpotential besitzt?

(ii) Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Vektorpotential $\vec{u}$. Zeigen Sie, dass dann für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auch die Abbildung $\vec{u} + \nabla f$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist. *Hinweis:* Damit wird also gezeigt, dass Vektorpotentiale nicht bis auf eine Konstante eindeutig sind!

4. Aufgabe

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(i) Untersuchen Sie die Matrix auf Definitheit.

(ii) Bestimmen Sie die quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $q(x, y, z) = (x, y, z)M(x, y, z)^T$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Bestimmen Sie ∇q, Δq, $\nabla(\Delta q)$, $\operatorname{rot}(\nabla q)$ und $\operatorname{div}(\nabla q)$.

(iv) Bestimmen Sie die Hessematrix $q''(x, y, z)$ von q und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Matrix M.

(v) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von q.

(vi) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von q in einem Entwicklungspunkt (x_0, y_0, z_0).

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Vektorfelder ein Potential bzw. ein Vektorpotential besitzen.

(i) $\vec{v}_1\colon \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z|<1\} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(z)-y^2 \\ -2xy+z^2 \\ -x\sin(z)+2yz \end{pmatrix}$,

(ii) $\vec{v}_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -2(x-y)z^2+2xy \\ -2(x-y)z^2 \\ -2zy-2y \end{pmatrix}$,

(iii) $\vec{v}_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2xe^{y-z} \\ x^2e^{y-z} \\ xyz \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon M \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2} \\ 0 \\ \frac{-2xz}{(x^2+z^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge M nicht konvex ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $\vec{v}$ dennoch ein Potential auf M besitzt, indem Sie alle Potentiale von $\vec{v}$ berechnen.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Für welche Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y+e^z \\ f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

ein Potential? Geben Sie für den Fall $f(x,y,z) = (y+1)e^z + \sin(z)$ ein Potential an.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} e^{z-y} \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential besitzt und bestimmen Sie anschließend eins.
Hinweis: Bei der Bestimmung dieses Vektorpotentials dürfen Sie annehmen, dass ein Vektorpotential mit konstanter dritter Komponente existiert.

Gesamtpunktzahl: 20