

## Транспортная задача

Условие ТЗ удобно задавать в виде таблицы:

	$B_1$	...	$B_j$	...	$B_n$	$\bar{a}$
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	...	$c_{1j}$ $x_{1j}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
...	...	...	...	...	...	...
$A_i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	...	$c_{ij}$ $x_{ij}$	...	$c_{in}$ $x_{in}$	$a_i$
...	...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	...	$c_{mj}$ $x_{mj}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
$\bar{b}$	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	

### 1. Построение первого плана ТЗ

Для построения первого плана необходимо подобрать значения переменных  $x_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , такие, что сумма этих значений в каждой строке равна числу, записанному в данной строке в последнем столбце, а сумма этих значений в каждом столбце равна числу, записанному в данном столбце в последней строке.

Принцип, лежащий в основе построения опорного плана перевозок, состоит в следующем: выбранная для заполнения клетка таблицы «загружается» максимально. При этом из дальнейшего рассмотрения временно исключается либо поставщик, исчерпавший свой запас, либо потребитель, удовлетворивший свои потребности, но только один из них. Такой подход обеспечивает заполнение в таблице ровно  $(m+n-1)$  клеток, поэтому существующие методы построения первого плана ТЗ отличаются друг от друга только правилом выбора клеток для заполнения.

#### 2.1. Метод северо-западного угла

ПРИМЕР. Пусть дана следующая ТЗ:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	100
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	50	50	40	60	

В этой таблице надо заполнить ровно  $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$  клеток, причём сумма перевозок по строке должна быть равна запасам соответствующего поставщика, а по столбцу – потребностям соответствующего потребителя.

Выбираем для заполнения клетку в 1-й строке и в 1-м столбце. Запасы поставщика равны 100, а потребности потребителя равны 50. Поэтому максимальная перевозка – 50. Запасы поставщика в результате равны 50, а потребитель удовлетворил свои потребности, поэтому остальные клетки 1-го столбца в дальнейшем запрещены для заполнения.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	50
	50				
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	X	50	40	60	

Заполняем клетку (1,2). Сложилась ситуация, когда запасы поставщика равны потребностям потребителя. Максимальная поставка (50) одновременно исчерпает запасы поставщика и удовлетворит потребности потребителя. Одновременный запрет на дальнейшее заполнение и 1-й строки и 2-го столбца приведёт к тому, что заполненных клеток будет меньше, чем 6. Поэтому «вычеркнем» 2-й столбец, а 1-ю строку оставим, но с нулевыми запасами.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3 50	7 50	1	8	0
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	X	X	40	60	

Заполняем клетку (1,3). Т.к. запасы 1-го поставщика уже равны 0, то и перевозка нулевая. «Вычёркиваем» 1-ю строку. Потребности 3-го потребителя не уменьшились

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3 50	7 50	1 0	8	X
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	X	X	40	60	

Заполняем крайнюю «северо-западную» клетку (2,3). Запасы – 20, потребности – 40, значит поставка – 20. Запасы исчерпаны, строка «вычёркивается», потребности уменьшились до 20.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	X
	50	50	0		
$A_2$	4	7	12	2	X
			20		
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	X	X	20	60	

Остались две клетки, крайняя «западная» – (3,3), её и заполняем. Запасы – 80, потребности – 20, значит поставка – 20. Потребности удовлетворены, столбец «вычёркивается», запасов осталось 60.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	X
	50	50	0		
$A_2$	4	7	12	2	X
			20		
$A_3$	1	4	8	3	60
			20		
$\bar{b}$	X	X	X	60	

Заполняем последнюю клетку (3,4). Запасы равны потребностям и определяют перевозку. Первый план получен.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	X
	50	50	0		
$A_2$	4	7	12	2	X
			20		
$A_3$	1	4	8	3	X
			20	60	
$\bar{b}$	X	X	X	X	

Суммарная стоимость перевозок по этому плану:

$$F(X) = 50 \cdot 3 + 50 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 20 \cdot 12 + 20 \cdot 8 + 60 \cdot 3 = 1080.$$

## 2.2. Метод минимального тарифа

ПРИМЕР. Найдём новым методом первый план для той же ТЗ:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	100
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	50	50	40	60	

В таблице две клетки с минимальным тарифом – (3,1) и (1,3). Они равноправны, выберем первую из них. Заполнение клетки и «вычёркивание» столбцов и строк осуществляется так же, как и в предыдущем методе.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	100
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	30
	50				
$\bar{b}$	X	50	40	60	

Минимален тариф в клетке (1,3):

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	60
			40		
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	30
	50				
$\bar{b}$	X	50	X	60	

Заполняем клетку (2,4), где тариф 2:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	60
			40		
$A_2$	4	7	12	2	X
				20	
$A_3$	1	4	8	3	30
	50				
$\bar{b}$	X	50	X	40	

Заполняем клетку (3,4), где тариф 3.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	60
			40		
$A_2$	4	7	12	2	X
				20	
$A_3$	1	4	8	3	X
	50			30	
$\bar{b}$	X	50	X	10	

Заполняем клетку (1,2), где тариф 7:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	10
		50	40		
$A_2$	4	7	12	2	X
				20	
$A_3$	1	4	8	3	X
	50			30	
$\bar{b}$	X	X	X	10	

И, наконец, последнюю клетку (1,4):

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	X
		50	40	10	
$A_2$	4	7	12	2	X
				20	
$A_3$	1	4	8	3	X
	50			30	
$\bar{b}$	X	X	X	X	

Первый план получен. Суммарная стоимость перевозок по этому плану:

$$F(X) = 50 \cdot 7 + 40 \cdot 1 + 10 \cdot 8 + 20 \cdot 2 + 50 \cdot 1 + 30 \cdot 3 = 650.$$

### 2.3. Метод Фогеля

ПРИМЕР. Для всё той же ТЗ построим первый план методом Фогеля:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	3	7	1	8	100
$A_2$	4	7	12	2	20
$A_3$	1	4	8	3	80
$\bar{b}$	50	50	40	60	

Разности между двумя наименьшими тарифами в каждой строке:  $3-1=2$ ,  $4-2=2$ ,  $3-1=2$ ; и каждом столбце:  $3-1=2$ ,  $7-4=3$ ,  $8-1=7$ ,  $3-2=1$ .

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$	
$A_1$	3	7	1	8	100	2
$A_2$	4	7	12	2	20	2
$A_3$	1	4	8	3	80	2
$\bar{b}$	50	50	40	60		
	2	3	<u>7</u>	1		

Максимальным среди полученных чисел является число 7, соответствующее 3-му столбцу, поэтому заполняем клетку с минимальным тарифом в 3-ем столбце, т.е. (1,3). И снова считаем разности наименьших



тарифов.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$		
$A_1$	3	7	1	8	60	2	<u>4</u>
			40				
$A_2$	4	7	12	2	20	2	2
$A_3$	1	4	8	3	80	2	2
$\bar{b}$	50	50	X	60			
	2	3	<u>7</u>	1			
	2	3	–	1			

Теперь заполняется клетка с минимальным тарифом в 1-ой строке, а именно (1,1), и т.д.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$			
$A_1$	3	7	1	8	10	2	<u>4</u>	1
	50		40					
$A_2$	4	7	12	2	20	2	2	<u>5</u>
$A_3$	1	4	8	3	80	2	2	1
$\bar{b}$	X	50	X	60				
	2	3	<u>7</u>	1				
	2	3	–	1				
	–	3	–	1				

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$					
$A_1$	3	7	1	8	10	2	<u>4</u>	1	1	
	50		40							
$A_2$	4	7	12	2	X	2	2	<u>5</u>	-	
				20						
$A_3$	1	4	8	3	80	2	2	1	1	
$\bar{b}$	X	50	X	40						
	2	3	<u>7</u>	1						
	2	3	-	1						
	-	3	-	1						
	-	3	-	<u>5</u>						

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$					
$A_1$	3	7	1	8	10	2	<u>4</u>	1	1	0
	50		40							
$A_2$	4	7	12	2	X	2	2	<u>5</u>	-	-
				20						
$A_3$	1	4	8	3	40	2	2	1	1	0
				40						
$\bar{b}$	X	50	X	X						
	2	3	<u>7</u>	1						
	2	3	-	1						
	-	3	-	1						
	-	3	-	<u>5</u>						
	-	<u>3</u>	-	-						

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$						
$A_1$	3 50	7	1 40	8	10	2	<u>4</u>	1	1	0	0
$A_2$	4	7	12	2 20	X	2	2	<u>5</u>	-	-	-
$A_3$	1	4 40	8	3 40	X	2	2	1	1	0	-
$\bar{b}$	X	10	X	X							
	2	3	<u>7</u>	1							
	2	3	-	1							
	-	3	-	1							
	-	3	-	<u>5</u>							
	-	<u>3</u>	-	-							
	-	0	-	-							

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$						
$A_1$	3 50	7 10	1 40	8	X	2	<u>4</u>	1	1	0	0
$A_2$	4	7	12	2 20	X	2	2	<u>5</u>	-	-	-
$A_3$	1	4 40	8	3 40	X	2	2	1	1	0	-
$\bar{b}$	X	X	X	X							
	2	3	<u>7</u>	1							
	2	3	-	1							
	-	3	-	1							
	-	3	-	<u>5</u>							
	-	<u>3</u>	-	-							
	-	0	-	-							

Первый план получен. Суммарная стоимость перевозок по этому плану:

$$F(X) = 50 \cdot 3 + 10 \cdot 7 + 40 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 3 = 580.$$

### 3. Метод потенциалов

ПРИМЕР. Найдём оптимальный план перевозок для ТЗ из предыдущего пункта 5.2. Причём, в качестве исходного возьмём первый план, полученный методом минимального тарифа:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	7	1	8
		50	40	10
$A_2$	4	7	12	2
				20
$A_3$	1	4	8	3
	50			30

Суммарная стоимость перевозок:  $F(X) = 650$ .

Составим уравнения для потенциалов:

$$\alpha_1 + \beta_2 = 7, \quad \alpha_2 + \beta_4 = 2,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1, \quad \alpha_3 + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_4 = 8, \quad \alpha_3 + \beta_4 = 3.$$

Положим  $\alpha_1 = 0$ , и найдём из уравнений остальные потенциалы:

$$\alpha_2 = -6, \quad \beta_2 = 7,$$

$$\alpha_3 = -5, \quad \beta_3 = 1,$$

$$\beta_1 = 6, \quad \beta_4 = 8.$$

Вычислим коэффициенты  $\gamma_{pq}$ :

$$\gamma_{11} = 3 - 0 - 6 = -3, \quad \gamma_{23} = 12 + 6 - 1 = 17,$$

$$\gamma_{21} = 4 + 6 - 6 = 4, \quad \gamma_{32} = 4 + 5 - 7 = 2,$$

$$\gamma_{22} = 7 + 6 - 7 = 6, \quad \gamma_{33} = 8 + 5 - 1 = 12.$$

$\gamma_{11} = -3 < 0$ . Переменную  $x_{11}$  введём в базис:  $x_{11} = \rho$ ,  $\rho > 0$ , и построим цикл пересчёта:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	7	1	8
	$\rho$	50	40	$10-\rho$
$A_2$	4	7	12	2
				20
$A_3$	1	4	8	3
	$50-\rho$			$30+\rho$

$\rho = 10$ , стоимость перевозок уменьшилась:

$$F(X) = 650 - 3 \cdot 10 = 620,$$

ПЛАН ИЗМЕНИЛСЯ:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	7	1	8
	10	50	40	
$A_2$	4	7	12	2
				20
$A_3$	1	4	8	3
	40			40

Выполняем ещё одну итерацию метода потенциалов.

Составим уравнения для потенциалов:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 3 \quad \alpha_2 + \beta_4 = 2$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 7 \quad \alpha_3 + \beta_1 = 1$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1 \quad \alpha_3 + \beta_4 = 3$$

Положим  $\alpha_1 = 0$ , и найдём из уравнений остальные потенциалы:

$$\alpha_2 = -3, \quad \beta_2 = 7,$$

$$\alpha_3 = -2, \quad \beta_3 = 1,$$

$$\beta_1 = 3, \quad \beta_4 = 5.$$

Вычислим коэффициенты  $\gamma_{pq}$ :

$$\begin{aligned}\gamma_{14} &= 8 - 0 - 5 = 3, & \gamma_{23} &= 12 + 3 - 1 = 14, \\ \gamma_{21} &= 4 + 3 - 3 = 4, & \gamma_{32} &= 4 + 2 - 7 = -1, \\ \gamma_{22} &= 7 + 3 - 7 = 3, & \gamma_{33} &= 8 + 2 - 1 = 9.\end{aligned}$$

$\gamma_{32} = -1 < 0$ . Переменную  $x_{32}$  введём в базис:  $x_{32} = \rho$ ,  $\rho > 0$ , и построим цикл пересчёта:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	7	1	8
	$10 + \rho$	$50 - \rho$	40	
$A_2$	4	7	12	2
				20
$A_3$	1	4	8	3
	$40 - \rho$	$\rho$		40

$\rho = 40$ , стоимость перевозок уменьшилась:

$$F(X) = 620 - 1 \cdot 40 = 580,$$

план изменился:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	7	1	8
	50	10	40	
$A_2$	4	7	12	2
				20
$A_3$	1	4	8	3
		40		40

Выполняем следующую итерацию метода потенциалов.

Составим уравнения для потенциалов:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 3 & \alpha_2 + \beta_4 &= 2 \\ \alpha_1 + \beta_2 &= 7 & \alpha_3 + \beta_2 &= 4 \\ \alpha_1 + \beta_3 &= 1 & \alpha_3 + \beta_4 &= 3 \end{aligned}$$

Положим  $\alpha_1 = 0$ , и найдём из уравнений остальные потенциалы:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -4, & \beta_2 &= 7, \\ \alpha_3 &= -3, & \beta_3 &= 1, \\ \beta_1 &= 3, & \beta_4 &= 6. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты  $\gamma_{pq}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{14} &= 8 - 0 - 6 = 2, & \gamma_{23} &= 12 + 4 - 1 = 15, \\ \gamma_{21} &= 4 + 4 - 3 = 5, & \gamma_{31} &= 1 + 3 - 3 = 1, \\ \gamma_{22} &= 7 + 4 - 7 = 4, & \gamma_{33} &= 8 + 3 - 1 = 10. \end{aligned}$$

Среди коэффициентов  $\gamma_{pq}$  нет отрицательных, значит, последний полученный план перевозок оптимален, задача решена. (Отметим, что метод Фогеля для этой задачи, определяя первый опорный план, получил сразу план оптимальный.)

## 4. Открытые транспортные задачи

### 4.1. Задача на избыток

ПРИМЕР. Пусть дана следующая ТЗ:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	21	34	62	41	52
$A_2$	32	73	26	76	6
$A_3$	15	38	9	18	72
$\bar{b}$	13	10	10	62	

Сумма запасов поставщиков:  $52+6+72=130$ . Сумма потребностей потребителей:  $13+10+10+62=95$ . Суммарные запасы больше суммарных

потребностей на 35. Введем в рассмотрение фиктивного потребителя  $B_5$ , потребность в грузе которого  $b_5 = 35$ . Получим вспомогательную ТЗ:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$\bar{a}$
$A_1$	21	34	62	41	0	52
$A_2$	32	73	26	76	0	6
$A_3$	15	38	9	18	0	72
$\bar{b}$	13	10	10	62	35	

Вспомогательная задача сбалансирована, для неё можно построить первый опорный план одним из предложенных методов (пп.2.1–2.3), а затем найти оптимальный план методом потенциалов:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$\bar{a}$
$A_1$	21	34	62	41	0	
	13	10			29	52
$A_2$	32	73	26	76	0	
					6	6
$A_3$	15	38	9	18	0	
	0		10	62		72
$\bar{b}$	13	10	10	62	35	

Минимальная стоимость перевозки груза:  $F(X) = 1819$ .

#### 4.2. Задача на недостаток

ПРИМЕР. Пусть дана следующая ТЗ:



	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	48	53	13	36	17
$A_2$	20	30	28	0	55
$A_3$	7	4	73	58	54
$\bar{b}$	56	10	43	71	

Сумма запасов поставщиков:  $17+55+54=126$ . Сумма потребностей потребителей:  $56+10+43+71=180$ . Суммарные запасы меньше суммарных потребностей на 54. Введем в рассмотрение фиктивного поставщика  $A_4$ , запасы которого  $a_4 = 54$ . Получим вспомогательную ТЗ:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	48	53	13	36	17
$A_2$	20	30	28	0	55
$A_3$	7	4	73	58	54
$A_4$	0	0	0	0	54
$\bar{b}$	56	10	43	71	

Вспомогательная задача сбалансирована, для неё можно построить первый опорный план одним из предложенных методов (пп.2.1–2.3), а затем найти оптимальный план методом потенциалов:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\bar{a}$
$A_1$	48	53	13	36	
			17		17
$A_2$	20	30	28	0	
				55	55
$A_3$	7	4	73	58	
	44	10			54
$A_4$	0	0	0	0	
	12		26	16	54
$\bar{b}$	56	10	43	71	

Минимальная стоимость перевозки груза:  $F(X) = 569$ .