Ana I WS 17/18 13.11.17 VIII/1

Bsp. vom letzten Mal: rekursive Folge $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

1. Schritt: (x_n) konvergent nach Monotoniekriterium

2. Schritt: $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$

a ausrechnen $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

$\rightarrow\ a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \rightsquigarrow a = \sqrt{2}$

Bsp.: $x_0 = 3$ $x_{n+1} = 4 - x_n$

1. Schritt weglassen.

2. Schritt $a = 4 - a \Rightarrow a = 2$ $\cancel{\lim_{n\to\infty} x_n = 2}$ ☺

Das ist falsch! $x_0 = 3$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ $x_3 = 1$ … divergent!

---

konvergent beschränkt monoton

letztes Mal: ① konvergent $\Rightarrow$ beschränkt. nicht umgekehrt

② beschränkt $\wedge$ monoton $\Rightarrow$ konvergent. nicht umgekehrt

Monotoniekriterium.

Bsp. $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

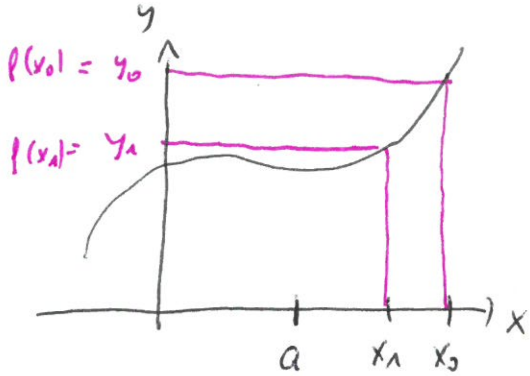
nicht monoton!

Grenzwerte von Funktionen

Idee: Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Funktion $f(x)$

neue Folge $y_n = f(x_n) \xrightarrow{?} b$



Definition $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, hat in a den Grenzwert b, in Zeichen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

wenn gilt ① Für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ii) $x_n \in D$ iii) $x_n \neq a$

gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

② Es gibt mind. eine Folge mit den Eigenschaften i) – iii)

Bemerkungen ① In der Definition darf $a \in D$ oder $a \notin D$ gelten

② auch für $a = \infty$, $a = -\infty$, $b = \infty$, $b = -\infty$

Bsp ① $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Denn für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 2\cdot 2 = 4$$

② $f(x) = \dfrac{1+2x}{3+4x}$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{1+2x}{3+4x} = \frac{1+2\cdot 5}{3+4\cdot 5} = \frac{11}{23}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x}{3+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+2\right)}{\cancel{x}\left(\frac{3}{x}+4\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Def. (Einseitige Grenzwerte)

f hat in a den rechtsseitigen Grenzwert b, in Formel $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = b$ oder

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, wenn gilt

① Für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ii) $x_n \in D$ iii) $x_n > a$

gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

② Es gibt mind. eine Folge mit den Eigenschaften i) – iii)

Analog linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = b$ oder $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

mit iii) $x_n < a$.

Wenn gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, dann gilt auch $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = b$

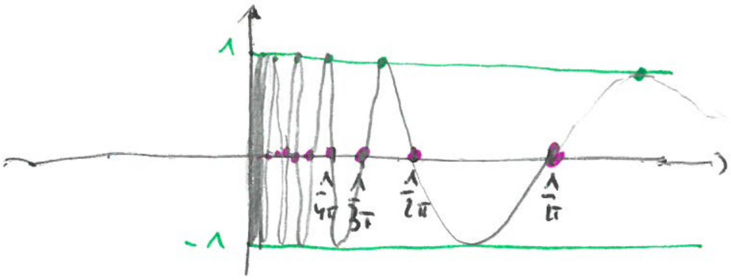
Wenn $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ existieren und gleich sind,

dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$.

Bsp: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} f(x) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \uparrow 0} f(x) &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{-x} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \text{ existiert nicht.}$$

Bsp: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \searrow 0} f(x)$



$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = n\pi \iff x = \frac{1}{n\pi} \qquad n \in \mathbb{Z}$

Vermutung: $\lim_{x\searrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ex. nicht.

Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $\qquad f(x_n) = f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) = \sin(n\pi) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$

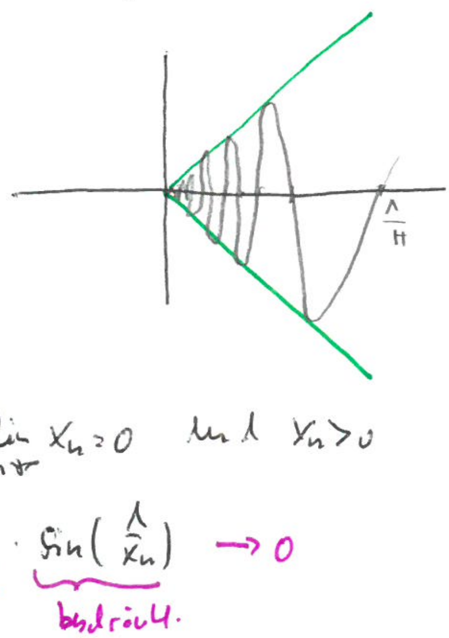
$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

Folge $\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ $\quad$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$f(\tilde{x}_n) = 1$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 & \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0 & \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 1 \end{array}\right\} \lim_{x\searrow 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

Bsp. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Vermutung: $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$

Denn sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $x_n > 0$

Dann gilt $\quad f(x_n) = \underbrace{x_n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{\text{beschränkt.}} \to 0$

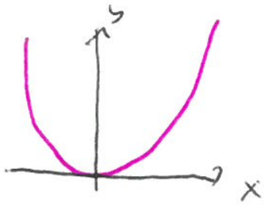
Denn $-x_n \le x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \le x_n$

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, wenn gilt

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

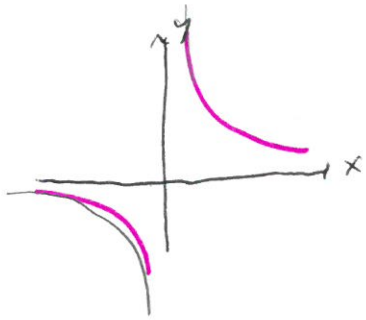
f heißt stetig, wenn f für alle $a \in D$ stetig ist.



Bsp: (1) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Denn es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a)$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.



Ist f stetig? Ja!!!!

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 13 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \neq 13 = f(0)$$ unstetig in $x = 0$

(4) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 13 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

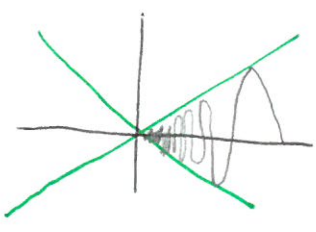
f(x) ist unstetig in $x = 0$ weil $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert.

(5) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 13 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

f(x) ist unstetig in $x = 0$ weil $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 13 = f(0)$

(6) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

f(x) ist stetig in $x = 0$ weil $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

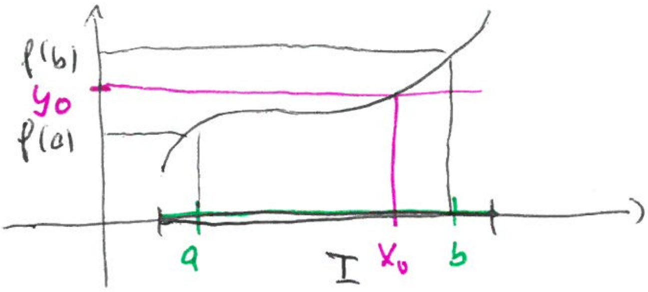


Satz: Summen, Produkte, Quotienten, Hintereinanderausführung stetiger Funktionen sind stetig im ganzen Def.-Bereich.

Bsp.
$$f(x) = \frac{\tan\left(e^{\sqrt{x}} + x^2\right)}{\sin(x+x^2) - x^3}$$
ist stetig im ganzen Def. Bereich.

Sätze über stetige Funktionen.

Zwischenwertsatz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in I$.

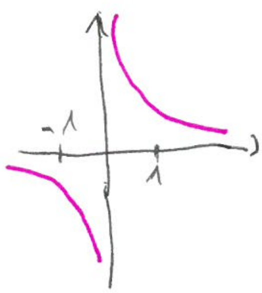


Sei y_0 eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein x_0 zwischen a und b mit $f(x_0) = y_0$

Spezialfall: Sei $f(a) < 0 < f(b)$. Dann hat f zwischen a und b eine Nullstelle.

Was ist hier falsch?

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig. $f(-1) = -1$ $f(1) = 1$



$\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow}$ ~~es gibt ein x_0 mit $f(x_0) = 0$~~

-1 und 1 liegen in keinem gemeinsamen Def. Intervall