УДК 514.764.2, MSC 53C20

О ЗАМКНУТОСТИ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ ЛИ, ПОРОЖДЁННОЙ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ КИЛЛИНГА

Попов В.А. (email:vlapopov@gmail.com)

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и её стационарную подалгебру $\mathfrak{h}$. Для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow X(p) = 0$. Алгебра $\mathfrak{g}$ порождает локальную группу локальных изометрий на M, однако, аналитическое продолжение этих изометрий до изометрий какого-нибудь риманова аналитического многообразия локально изометричного M возможно не всегда. Принципиальным препятствием служит возможная незамкнутость подгруппы Ли H, порождённой подалгеброй $\mathfrak{h}$, в односвязной группе Ли G, порожденной алгеброй $\mathfrak{g}$. Укажем свойства алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, выполнение которых необходимо в случае незамкнутости H в G.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом вещественно аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ – её стационарная подалгебра в некоторой точке $p \in M$, G – группа, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если H не замкнута в G, то алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ обладают следующими свойствами.*

1. *$\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центр $\mathfrak{z}$.*
2. *Существует векторное поле $Z \in \mathfrak{z}$, не принадлежащее коммутанту алгебры $\mathfrak{g}$, $Z \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Следовательно, существует подалгебра $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}_0 \oplus \{tZ\} = \mathfrak{g}$ и для любой такой подалгебры имеет место равенство $dim(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h}) = dim\mathfrak{h} - 1$.*

Приведём идею доказательства теоремы. Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G и подалгебру Ли $\bar{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $\overline{H} \subset G$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальной подалгеброй алгебры $\bar{\mathfrak{h}}$ [1]. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\bar{h}_t \in \overline{H}$, $\bar{h}_t \notin H$ Тогда внутренний автоморфизм $x \mapsto \bar{h}_t x h_t^{-1}$, $x \in G$, являются пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x \mapsto h_n x \bar{h}_t^{-1}$, $h_n \in H$. Так как внутренние автоморфизмы $x \mapsto h_n x h_n^{-1}$ определяют изометрии $x \mapsto h_n x$ шара $B \subset M$, то внутренний автоморфизм определяет изометрию $x \mapsto \bar{h}_t x \bar{h}_t^{-1}$ шара B. Тогда для всех достаточно малых t определена локальная изометрия $x \mapsto \bar{h}_t x$ и, следовательно, локальная изометрия $x \mapsto x\bar{h}_t$. Таким образом, умножения справа на элементы локальной однопараметрической группы $\bar{h}_t$ порождает векторное поле Киллинга, коммутирующее со всеми элементами алгебры $\mathfrak{g}$.

Как было показано выше, группа G содержит однопараметрическую подгруппу z_t умножений справа. Тогда по определению $\forall g \in G\ z_t g = g\bar{h}_t$. Равенство $(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = z_t$ означает, что $\forall x \in G$ $(g_1, g_2)x = x\bar{h}_t$, что невозможно, так как $\bar{h}_t$ не принадлежит центру группы G. Это доказывает, что $(G, G) \neq G$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$. Следовательно, существует подгруппа G_0, $(G, G) \subset G_0 \subset G$, и подалгебра $\mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, такие, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z}$, а группа G является прямым произведением группы G_0 и однопараметрической подгруппы $exp(tz)$. Причём, локально действие $exp(tz)$ на многообразии M совпадает с локальной изометрией $x \mapsto x\bar{h}_t$ (умножением справа). Поэтому $G_0 p$ содержит открытую окрестность точки $p \in M$ и, следовательно, $dim(G_0 \cap H) = dimH - 1$.

Работа является естественным продолжением работ [2;3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. On the theory of Lie groups in the large // Матем. сб., 1945, т. 16(38), с. 163 – 190.
2. Попов В.А. Продолжаемость локальных групп изометрий // Матем. сб. 1988. Т.135 (177). №1. С.45 – 64.
3. Popov V.A. On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. – Kharkov: “Apostrof”, 2011.