УДК 514.764.2, MSC 53C20

 **о замкнутости подгруппы в группе лИ, порождённой векторными полями КИЛЛИНГА**

***Попов В.А*.** (email:vlapopov@gmail.com)

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Рассмотрим алгебру Ли $g$ всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии $M$ и её стационарную подалгебру $h$. Для фиксированной точки $p\in M$ $X\in h ⟺X\left(p\right)=0$. Алгебра $g$ порождает локальную группу локальных изометрий на $M$, однако, аналитическое продолжение этих изометрий до изометрий какого-нибудь риманова аналитического многообразия локально изометричного $M$ возможно не всегда. Принципиальным препятствием служит возможная незамкнутость подгруппы Ли $H$, порождённой подалгеброй $h$, в односвязной группе Ли $G$, порожденной алгеброй $g$. Укажем свойства алгебр $g$ и $h$, выполнение которых необходимо в случае незамкнутости $H$ в $G$.

**Теорема.** *Пусть* $g$ *– алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом вещественно аналитическом многообразии* $M$*,* $h$ *– её стационарная подалгебра в некоторой точке* $p\in M$*,* $G$ *– группа, порожденная алгеброй* $g$ *и* $H$ *– подгруппа, порождённая подалгеброй* $h$*. Если* $H$ *не замкнута в* $G$*, то алгебры Ли* $g$ *и* $ h⊂h$ *обладают следующими свойствами.*

1. $g$ *имеет ненулевой центр* $z$*.*
2. *Существует векторное поле* $Z\in z$*, не принадлежащее коммутанту алгебры* $g$*,* $Z\notin \left[g,g\right]$*. Следовательно, существует подалгебра* $g\_{0}⊂g$ *такая, что* $g\_{0}⨁\left\{tZ\right\}=g$ *и для любой такой подалгебры имеет место равенство* $dim\left(g\_{0}⋂h\right)=dimh-1$*.*

Приведём идею доказательства теоремы. Рассмотрим замыкание $\overbar{H}$ группы $H$ в $G$ и подалгебру Ли $\overbar{h}⊂g$ подгруппы $\overbar{H}⊂G$. Подалгебра $h$ является нормальной подалгеброй алгебры $\overbar{h}$ [1]. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\overbar{h}\_{t}\in \overbar{H}$, $\overbar{h}\_{t}\notin H$ Тогда внутренний автоморфизм $x↦\overbar{h}\_{t}xh\_{t}^{-1}$, $x\in G$, являются пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x↦h\_{n}x\overbar{h}\_{t}^{-1}$, $h\_{n}\in H$. Так как внутренние автоморфизмы $x↦h\_{n}xh\_{n}^{-1}$ определяют изометрии $x↦h\_{n}x$ шара $B⊂M$, то внутренний автоморфизм определяет изометрию $x↦\overbar{h}\_{t}x\overbar{h}\_{t}^{-1}$ шара $B$. Тогда для всех достаточно малых $t$ определена локальная изометрия $x↦\overbar{h}\_{t}x$ и, следовательно, локальная изометрия $x↦x\overbar{h}\_{t}$. Таким образом, умножения справа на элементы локальной однопараметрической группы $\overbar{h}\_{t}$ порождает векторное поле Киллинга, коммутирующее со всеми элементами алгебры $g$.

Как было показано выше, группа $G$ содержит однопараметрическую подгруппу $z\_{t}$ умножений справа. Тогда по определению $∀g\in G$ $z\_{t}g=g\overbar{h}\_{t}$. Равенство $\left(g\_{1},g\_{2}\right)=g\_{1}^{-1}g\_{2}^{-1}g\_{1}g\_{2}=z\_{t}$ означает, что $∀x\in G$ $\left(g\_{1},g\_{2}\right)x=x\overbar{h}\_{t}$, что невозможно, так как $\overbar{h}\_{t}$ не принадлежит центру группы $G$. Это доказывает, что $\left(G,G\right)\ne G$, $\left[g,g\right]\ne g$. Следовательно, существует подгруппа $G\_{0}$, $\left(G,G\right)⊂G\_{0}⊂G$, и подалгебра $g\_{0}$, $\left[g,g\right]⊂g\_{0}⊂g$, такие, что $g=g\_{0}⨁z$, а группа $G$ является прямым произведением группы $G\_{0}$ и однопараметрической подгруппы $exp\left(tz\right)$. Причём, локально действие $exp\left(tz\right)$ на многообразии $M$ совпадает с локальной изометрией $ x↦x\overbar{h}\_{t}$ (умножением справа). Поэтому $G\_{0}p$ содержит открытую окрестность точки $p\in M$ и, следовательно, $dim\left(G\_{0}∩H\right)=dimH-1$.

Работа является естественным продолжением работ [2;3].

 ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. On the theory of Lie groups in the large // Матем. сб., 1945, т. 16(38), с. 163 ─ 190.
2. Попов В.А. Продолжаемость локальных групп изометрий // Матем. сб. 1988. Т.135 (177). №1. С.45 – 64.
3. Popov V.A. On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. ─ Kharkov: “Apostrof”, 2011.