УДК 514.764.2, MSC 53C20

**о замкнутости подгруппы в группе лИ, порождённой векторными полями КИЛЛИНГА**

***Попов В.А*.** (email:vlapopov@gmail.com)

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Рассмотрим алгебру Ли всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии и её стационарную подалгебру . Для фиксированной точки . Алгебра порождает локальную группу локальных изометрий на , однако, аналитическое продолжение этих изометрий до изометрий какого-нибудь риманова аналитического многообразия локально изометричного возможно не всегда. Принципиальным препятствием служит возможная незамкнутость подгруппы Ли , порождённой подалгеброй , в односвязной группе Ли , порожденной алгеброй . Укажем свойства алгебр и , выполнение которых необходимо в случае незамкнутости в .

**Теорема.** *Пусть – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом вещественно аналитическом многообразии , – её стационарная подалгебра в некоторой точке , – группа, порожденная алгеброй и – подгруппа, порождённая подалгеброй . Если не замкнута в , то алгебры Ли и обладают следующими свойствами.*

1. *имеет ненулевой центр .*
2. *Существует векторное поле , не принадлежащее коммутанту алгебры , . Следовательно, существует подалгебра такая, что и для любой такой подалгебры имеет место равенство .*

Приведём идею доказательства теоремы. Рассмотрим замыкание группы в и подалгебру Ли подгруппы . Подалгебра является нормальной подалгеброй алгебры [1]. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу , Тогда внутренний автоморфизм , , являются пределом последовательности внутренних автоморфизмов , . Так как внутренние автоморфизмы определяют изометрии шара , то внутренний автоморфизм определяет изометрию шара . Тогда для всех достаточно малых определена локальная изометрия и, следовательно, локальная изометрия . Таким образом, умножения справа на элементы локальной однопараметрической группы порождает векторное поле Киллинга, коммутирующее со всеми элементами алгебры .

Как было показано выше, группа содержит однопараметрическую подгруппу умножений справа. Тогда по определению . Равенство означает, что , что невозможно, так как не принадлежит центру группы . Это доказывает, что , . Следовательно, существует подгруппа , , и подалгебра , , такие, что , а группа является прямым произведением группы и однопараметрической подгруппы . Причём, локально действие на многообразии совпадает с локальной изометрией (умножением справа). Поэтому содержит открытую окрестность точки и, следовательно, .

Работа является естественным продолжением работ [2;3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. On the theory of Lie groups in the large // Матем. сб., 1945, т. 16(38), с. 163 ─ 190.
2. Попов В.А. Продолжаемость локальных групп изометрий // Матем. сб. 1988. Т.135 (177). №1. С.45 – 64.
3. Popov V.A. On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. ─ Kharkov: “Apostrof”, 2011.