



## 第四章

# 一元一次不等式和一元一次不等式组

在现实世界中，两个量之间不仅有相等关系，还有不等关系，而且随处可见。这一章我们将要研究两个量之间的不等关系，学习有关不等式的概念、性质以及一元一次不等式和一元一次不等式组的解法等内容，并研究如何运用这些知识来解决一些简单的问题。



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

## 一 不等式与不等式的基本性质

### 4.1

### 不等式

#### 思考

1. 你能举出生活中一些表示不等关系的例子吗?
2. 你知道不等关系怎样用数学符号表示吗?

符号“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\neq$ ”都是不等号，用它们可以分别表示两个量或两个表达式之间大于、小于、不等于的数量关系。例如  $4 > -1$ ,  $2x > 5$ ,  $a \neq b$ ,  $5 - 9 < 3 + 7$  等。用不等号表示不等关系的式子叫做**不等式**。

比如，太阳的体积比地球大，如果用  $a$ ,  $b$  分别表示太阳、地球的体积，那么就可表示成： $a > b$ 。

又如，2011 年底北京地区注册博物馆数量已超过 159 家，如果用  $n$  表示博物馆数，那么就可表示成： $n > 159$ 。

我们还经常把大于号“ $>$ ”和等号“ $=$ ”结合起来使用，写成“ $\geq$ ”，读作“大于或等于”，也就是“不小于”；同样地，符号“ $\leq$ ”读作“小于或等于”，也就是“不大于”。用符号“ $\geq$ ”或“ $\leq$ ”连接起来的式子也叫做不等式。

#### 探索

1. 在电脑前连续工作不宜超过 1 小时，怎样用不等式表示?
2. 如图 4-1，高速公路上对机动车时速的限制怎样用不等式表示?



图 4-1



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

**例 1** 用不等式表示下面的不等关系:

- (1) 张平的年龄比杨洋大;
- (2) 某种电梯标明“载客不超过 13 人”;
- (3) 北京某一天的最低气温是  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 最高气温是  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**解:** (1) 设张平的年龄为  $a$ , 杨洋的年龄为  $b$ .

张平的年龄比杨洋大, 用不等式表示为

$$a > b.$$

(2) 设电梯的载客人数为  $x$ .

载客不超过 13 人, 用不等式表示为

$$x \leq 13.$$

(3) 设北京某一天的气温为  $x\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

最低气温是  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 最高气温是  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 用不等式表示为

$$-3 \leq x \leq 12.$$

**例 2** 用不等式表示下列关系:

- |                      |                                     |
|----------------------|-------------------------------------|
| (1) $a$ 的一半大于 3;     | (2) $x$ 与 6 的差是负数;                  |
| (3) $x$ 的 5 倍不小于 20; | (4) $b$ 的 $\frac{1}{5}$ 与 7 的和是非正数. |

**解:** (1)  $\frac{a}{2} > 3$ ;

(2)  $x - 6 < 0$ ;

(3)  $5x \geq 20$ ;

(4)  $\frac{1}{5}b + 7 \leq 0$ .

### 交流

有两根都是  $l$  米长的细铁丝, 一个围成正方形, 另一个围成长比宽多 1 米的长方形, 它们的面积谁大?

### 练习

1. 用不等式表示下列关系:

- (1) 哥哥存款  $x$  元, 弟弟存款  $y$  元, 兄弟二人的存款总数少于 1 000 元;



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

(2) 今年父亲的年龄是 40 岁，儿子的年龄是 13 岁， $x$  年后父亲的年龄与儿子的年龄的关系.

2. 用不等式表示：

(1)  $a$  是正数；

(2)  $b$  不是负数；

(3)  $x$  与 8 的和小于 6；

(4)  $y$  的一半大于 6.

3. 用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空：

(1)  $6+5$  \_\_\_  $9+5$ ；

(2)  $6+(-3)$  \_\_\_  $9+(-3)$ ；

(3)  $6 \times 5$  \_\_\_  $9 \times 5$ ；

(4)  $6 \div 3$  \_\_\_  $9 \div 3$ ；

(5)  $6 \times (-5)$  \_\_\_  $9 \times (-5)$ ；

(6)  $6 \div (-3)$  \_\_\_  $9 \div (-3)$ .

4. 举出生活中的两个不等关系，并用不等式表示.



## 4.2

### 不等式的基本性质

我们学习过等式的性质，不等式是否也有类似的性质呢？

在 4.1 节的练习中我们练习过用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空：

(1)  $6+5$  \_\_\_  $9+5$ ；

(2)  $6+(-3)$  \_\_\_  $9+(-3)$ ；

(3)  $6 \times 5$  \_\_\_  $9 \times 5$ ；

(4)  $6 \div 3$  \_\_\_  $9 \div 3$ ；

(5)  $6 \times (-5)$  \_\_\_  $9 \times (-5)$ ；

(6)  $6 \div (-3)$  \_\_\_  $9 \div (-3)$ .

从中我们可以看到，对于不等式  $6 < 9$ ：

(1) 当不等式两边同时加上 5 时，不等号的方向 \_\_\_\_\_；

(2) 当不等式两边同时加上  $-3$  时，不等号的方向 \_\_\_\_\_；

(3) 当不等式两边同时乘 5(即  $+5$ ) 时，不等号的方向 \_\_\_\_\_；

(4) 当不等式两边同时除以 3(即  $+3$ ) 时，不等号的方向 \_\_\_\_\_；

(5) 当不等式两边同时乘  $-5$  时，不等号的方向 \_\_\_\_\_；

(6) 当不等式两边同时除以  $-3$  时，不等号的方向 \_\_\_\_\_.

#### 探索

请你做一些类似的计算进行比较，并从中概括出不等式的性质.



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

一般地，不等式具有下面的基本性质：

### 不等式的基本性质

- 1. 不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变；
- 2. 不等式两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；
- 3. 不等式两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变。

#### 思考

1. 不等式的基本性质和等式的基本性质有什么相同之处，有什么不同之处？
2. 怎样用数学式子表示不等式的这些性质？

不等式的基本性质可表示为：

1. 如果  $a > b$ ，那么  $a \pm c > b \pm c$ ；
2. 如果  $a > b$ ，且  $c > 0$ ，那么  $ac > bc$ （或  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ）；
3. 如果  $a > b$ ，且  $c < 0$ ，那么  $ac < bc$ （或  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ）。

**例 1** 设  $a > b$ ，用不等号连接下列各题中的两个式子，并说明理由：

- (1)  $a - 3$  与  $b - 3$ ；      (2)  $2a$  与  $2b$ ；      (3)  $-\frac{1}{2}a$  与  $-\frac{1}{2}b$ 。

**解：**(1) 根据不等式的基本性质 1，在不等式  $a > b$  的两边都加上  $-3$ ，不等号的方向不变，所以得

$$a - 3 > b - 3.$$

(2) 根据不等式的基本性质 2，在不等式  $a > b$  的两边都乘 2，不等号的方向不变，所以得

$$2a > 2b.$$

(3) 根据不等式的基本性质 3，在不等式  $a > b$  的两边都乘  $-\frac{1}{2}$ ，不等号的方向改变，所以得

$$-\frac{1}{2}a < -\frac{1}{2}b.$$

乘负数时别忘了  
改变不等号的方向！



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

**例 2** 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成  $x < a$  或  $x > a$  的形式：

(1)  $x - 1 < 1$  ;

(2)  $6x > 5x - 1$  ;

(3)  $\frac{1}{3}x > 5$  ;

(4)  $-2x < -3$ .

**解：**(1) 根据不等式的基本性质 1，不等式的两边都加上 1，不等号的方向不变，得

$$x < 2.$$

(2) 根据不等式的基本性质 1，不等式的两边都减去  $5x$ ，不等号的方向不变，得

$$x > -1.$$

(3) 根据不等式的基本性质 2，不等式的两边都乘 3，不等号的方向不变，得

$$x > 15.$$

(4) 根据不等式的基本性质 3，不等式的两边都除以  $-2$ ，不等号的方向改变，得

$$x > \frac{3}{2}.$$

不等式的两边都除以  $-2$ ，  
不等号的方向要改变！

### 交流

如果  $a, b, c$  为有理数，其中  $c \neq 0$ ，而且  $a > b > c$ ，下列不等式中哪些正确？

(1)  $ab > bc$  ;

(2)  $a + b > b + c$  ;

(3)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$  .

### 练习

1. 设  $a < b$ ，用“ $<$ ”或“ $>$ ”填空：

(1)  $a + c$  \_\_\_  $b + c$  ;

(2)  $4a$  \_\_\_  $4b$  ;

(3)  $-7a$  \_\_\_  $-7b$  ;

(4)  $\frac{a}{6}$  \_\_\_  $\frac{b}{6}$  .



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

2. 根据不等式的基本性质, 把下列不等式化成  $x < a$  或  $x > a$  的形式:

(1)  $x - 2 < 3$ ;

(2)  $4x > 3x - 5$ ;

(3)  $\frac{1}{10}x < \frac{7}{10}$ ;

(4)  $-8x < 10$ .

3. 当  $x = -3$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 7$ ,  $x = 8$  时, 不等式  $x - 2 < 5$  分别成立吗?



### 习题 4-1

#### ★ 基础 ★

1. 根据下列数量关系, 列出不等式:

(1)  $5x$  与  $4$  的和是负数;

(2)  $x$  小于它的相反数;

(3)  $y$  的  $\frac{1}{4}$  与  $x$  的  $\frac{1}{3}$  的和不大于  $0$ ;

(4)  $m$  的  $3$  倍大于或等于  $10$ ;

(5)  $2a$  与  $3b$  的差是非负数.

2. 用不等式表示下列不等关系:

(1) 学生甲的身高是  $a$  厘米, 学生乙的身高是  $b$  厘米, 甲与乙身高的差是正数.

(2) 姐姐每月上网  $20$  小时, 妹妹每月上网  $x$  小时, 妹妹每月上网的时间超过了姐姐上网时间的  $2$  倍.

(3) 小明家每月的电话费  $m$  元在  $150$  元以内 (不含  $150$  元).

3. 设  $a > b$ , 用 “ $>$ ” 或 “ $<$ ” 填空:

(1)  $a - \frac{5}{3}$  \_\_\_\_\_  $b - \frac{5}{3}$ ;

(2)  $a + c$  \_\_\_\_\_  $b + c$ ;

(3)  $26a$  \_\_\_\_\_  $26b$ ;

(4)  $-\frac{2}{3}a$  \_\_\_\_\_  $-\frac{2}{3}b$ .

4. 根据不等式的基本性质, 把下列不等式化成  $x < a$  或  $x > a$  的形式:

(1)  $x + 2 > 1$ ;

(2)  $10 + x < 9$ ;

(3)  $6 - x > 5$ ;

(4)  $2x > -3$ .

5. 下列数值中哪些能使不等式  $x + 3 < 6$  成立?

$0$ ,  $-2.5$ ,  $-4$ ,  $3$ ,  $\pi$ ,  $4$ ,  $4.5$ .



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

### ★★★提升★★★

1. 用“>”、“=”或“<”填空：

(1) 如果  $a-b < 0$ ，那么  $a$        $b$ ；

(2) 如果  $a-b = 0$ ，那么  $a$        $b$ ；

(3) 如果  $a-b > 0$ ，那么  $a$        $b$ ；

(4) 如果  $b > 0$ ，那么  $a+b$        $a$ ；

(5) 如果  $b = 0$ ，那么  $a+b$        $a$ ；

(6) 如果  $b < 0$ ，那么  $a+b$        $a$ 。

2. 用“<”或“>”填空：

(1) 当  $a > 0$ ， $b$        $0$  时， $ab > 0$ ；

(2) 当  $a > 0$ ， $b$        $0$  时， $ab < 0$ ；

(3) 当  $a < 0$ ， $b$        $0$  时， $ab > 0$ ；

(4) 当  $a < 0$ ， $b$        $0$  时， $ab < 0$ 。

3. 用“>”或“<”填空：

(1) 如果  $a > b$ ，那么  $b$        $a$ ；

(2) 如果  $a > b$ ， $b > c$ ，那么  $a$        $c$ 。

### ★★★★拓展★★★★

判断以下各题的结论是否正确，并说明理由：

(1) 如果  $a > b$ ，那么  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ；

(2) 如果  $a > b$ ， $c = d$ ，那么  $ac > bd$ ；

(3) 如果  $ac^2 > bc^2$ ，那么  $a > b$ ；

(4) 如果  $ax < b$ ，且  $a \neq 0$ ，那么  $x < \frac{b}{a}$ ；

(5) 如果  $ab > 0$ ，那么  $\frac{a}{b} > 0$ ；

(6) 如果  $a, b, c$  为有理数，其中  $c \neq 0$ ，而且  $a > b > c$ ，那么  $a - b > b - c$ 。

## 二 一元一次不等式

### 4.3

### 不等式的解集

由 4.2 节练习第 3 题的结果我们知道，当  $x = -3$ ， $x = 0$ ， $x = 2$  时，不等式  $x - 2 < 5$  成立；当  $x = 7$ ， $x = 8$  时，不等式  $x - 2 < 5$  不成立。与方程类似，





$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**。

不等式  $x - 2 < 5$  还有其他的解吗？这个不等式有多少个解？

**思考**

可以发现，当  $x$  取小于 7 的任何一个数时，不等式  $x - 2 < 5$  都成立；而当  $x$  取大于或等于 7 的任何一个数时，不等式  $x - 2 < 5$  都不成立。也就是说，任何一个小于 7 的数都是不等式  $x - 2 < 5$  的解， $x - 2 < 5$  有无穷多个解。

我们把不等式  $x - 2 < 5$  所有的解组成一个集合，称为不等式  $x - 2 < 5$  的解的集合，简称解集。 $x < 7$  表示了不等式  $x - 2 < 5$  的解集。

一般来说，一个不等式的所有解组成的集合，简称为这个不等式的**解集**。不等式的解集，可以在数轴上直观地表示出来。

例如，不等式  $x - 2 < 5$  的解集  $x < 7$ ，可以用数轴上表示 7 的点的左边部分来表示，如图 4-2。

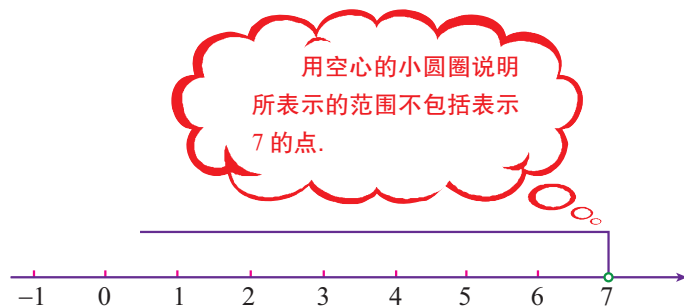


图 4-2

不等式  $x + 5 \geq 4$  的解集  $x \geq -1$  可以用数轴上表示 -1 的点和它的右边部分来表示，如图 4-3。

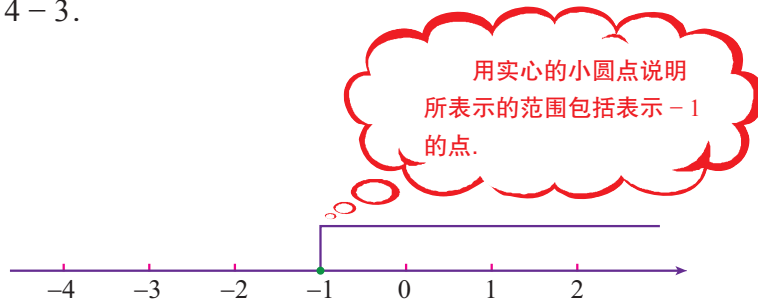


图 4-3



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y = kx + b$$

$$m \geq -1$$

### 交流

如何用含  $x$  的不等式表示图 4-4 和图 4-5 中所表示的不等式的解集？表示  $-5$ ,  $-4.999$ ,  $-\frac{1}{\pi}$ ,  $0$ ,  $0.5$ ,  $2.999$ ,  $3$ ,  $\frac{22}{7}$  的点分别在哪个不等式的解集中？

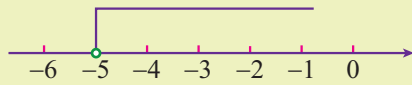


图 4-4

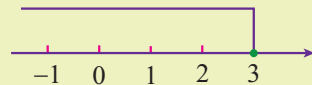


图 4-5

### 练习

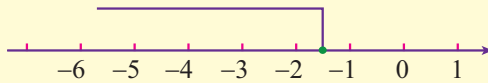
1. 在数轴上表示下列不等式的解集：

(1)  $x \leq 0$  ;

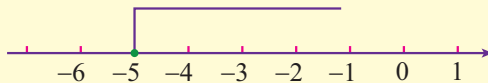
(2)  $x > -3.5$  .

2. 下列在数轴上表示的不等式的解集是否正确？如果不正确，该如何改正？

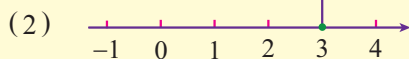
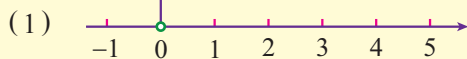
(1)  $x < -\frac{3}{2}$  ;

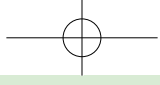


(2)  $x \leq -5$  .



3. 分别用含  $x$  的不等式表示下列数轴中所表示的不等式的解集：





$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

## 4.4

### 一元一次不等式及其解法

像  $x - 2 < 5$ ,  $x + 5 \geq 4$ ,  $y - 1 < 1$ ,  $6x > 5x - 1$ ,  $\frac{1}{3}x > 5$ , ... 的不等式, 它们都只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 1, 系数不等于 0, 我们把这样的不等式叫做**一元一次不等式**.

求不等式的解集的过程, 叫做**解不等式**.

同解一元一次方程类似, 解一元一次不等式的过程, 就是要利用不等式的基本性质将不等式变形成为  $x < a$  或  $x > a$  的形式.

#### 思考

在解方程时“移项要变号”的法则, 在解不等式的变形中是否仍然成立? 为什么?

**例 1** 解不等式  $2 + 5x > 12$ , 并把它的解集在数轴上表示出来.

**解:** 根据不等式的基本性质 1, 两边都减去 2, 得

$$5x > 12 - 2.$$

合并同类项, 得

$$5x > 10.$$

这一过程是否相当于把 2 变号后移到了不等号的右边?

根据不等式的基本性质 2, 两边都除以 5, 把系数化为 1, 得

$$x > 2.$$

这个不等式的解集在数轴上表示, 如图 4-6.

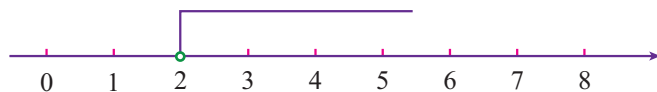


图 4-6

可以发现, 解一元一次不等式与解一元一次方程类似, 也可以“移项”, 即把不等式一边的某项变号后移到另一边, 而不改变不等号的方向.

$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

**例 2** 解不等式  $\frac{x-1}{2} > \frac{2(2x-1)}{3}$ ，并把它的解集在数轴上表示出来。

**解：**去分母，得

$$3(x-1) > 4(2x-1).$$

去括号，得

$$3x-3 > 8x-4.$$

移项，得

$$3x-8x > 3-4.$$

合并同类项，得

$$-5x > -1.$$

两边都除以  $-5$ ，得

$$x < \frac{1}{5}.$$

这个不等式的解集在数轴上表示，如图 4-7.



图 4-7

### 与解方程比较

解方程  $\frac{x-1}{2} = \frac{2(2x-1)}{3}$ .

解：去分母，得  $3(x-1) = 4(2x-1)$ .

去括号，得  $3x-3 = 8x-4$ .

移项，得  $3x-8x = 3-4$ .

合并同类项，得  $-5x = -1$ .

两边都除以  $-5$ ，得  $x = \frac{1}{5}$ .

一元一次方程的解只有一个，而一元一次不等式的解有无穷多个。

### 交流

解一元一次不等式的一般步骤是什么？它和解一元一次方程的主要区别在哪里？

### 练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1)  $0.3x < 0.8 - 0.1x$ ;

(2)  $10 + 3x \geq -5$ ;

(3)  $2(x+5) < 13 + 5x$ ;

(4)  $3(x+2) \geq 4(x-1) + 6$ .

2. 解不等式： $\frac{x+4}{6} - \frac{x}{3} \leq x-4$ .

3. 求下列不等式的正整数解：

(1)  $2x-1 \leq 3$ ;

(2)  $-3x+2 > -10$ .



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

**例 3** 当  $x$  取何值时, 代数式  $\frac{1}{3}(2-x)$  的值比代数式  $3x-1$  的值小?

**解:** 根据题意, 得

$$\frac{1}{3}(2-x) < 3x-1.$$

去分母, 得  $2-x < 3(3x-1).$

去括号, 得  $2-x < 9x-3.$

移项, 得  $-x-9x < -3-2.$

合并同类项, 得  $-10x < -5.$

系数化为 1, 得  $x > \frac{1}{2}.$

所以当  $x$  取大于  $\frac{1}{2}$  的值时, 代数式  $\frac{1}{3}(2-x)$  的值小于代数式  $3x-1$  的值.

**例 4** 两位搬运工人要将若干箱同样的货物用电梯运到楼上. 已知一箱货物的质量是 55 千克, 两位工人的体重之和是 160 千克, 电梯的载重量是 1 600 千克, 算一算两位工人一次最多能运多少箱货物.

**解:** 设一次能运  $x$  箱货物.

根据题意, 得  $55x + 160 \leq 1\,600.$

解这个不等式, 得

$$55x \leq 1\,600 - 160.$$

$$55x \leq 1\,440.$$

$$x \leq 26\frac{2}{11}.$$

解集在数轴上表示, 如图 4-8.

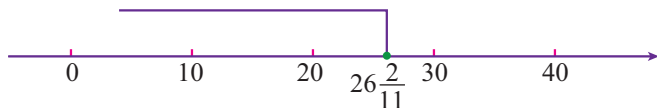
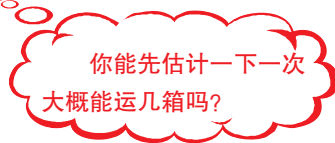


图 4-8



由于货物是按箱计算的, 所以符合题意的解只能取整数 26.

答: 两位工人用电梯一次最多能运 26 箱货物.



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

### 思考

一次知识竞赛共有 15 道题. 竞赛规则是: 答对 1 题记 8 分, 答错 1 题扣 4 分, 不答记 0 分. 结果神箭队有 2 道题没答, 飞艇队答了所有题, 两队的成绩都超过了 90 分. 请你分析一下两队分别至少答对几道题.

### 练习

- 当  $x$  取何值时, 代数式  $6x+7$  的值:
  - 小于 1;
  - 不小于 1;
  - 是负数;
  - 是非负数.
- 到 6 月份为止, 小力集邮票 91 张, 小亮集邮票 53 张. 从 7 月份开始, 小力每月集邮票 10 张, 小亮每月集邮票 4 张, 那么至少从几个月后小力的邮票张数比小亮的 2 倍还多?



## 习题 4-2

### ★ 基础 ★

- 下面不等式的两种解法对不对? 如果不对, 怎样改正?

解不等式  $-4x-3 \geq 2x+6$ .

**解法 1:**  $-4x-2x \geq 6+3$ .

$$-6x \geq 9.$$

$$\therefore x \geq -1.5.$$

**解法 2:**  $-3-6 \geq 2x+4x$ .

$$6x \leq -9.$$

$$\therefore x \leq -1.5.$$



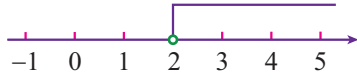
$AB \perp CD$



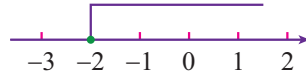
$\triangle ABC$

2. 选择题:

(1) 不等式  $x - 3 \leq 3x + 1$  的解集在数轴上表示如下, 正确的是( ).



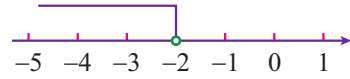
A



B



C



D

(2) 不等式  $3 - 7x < 12 - 5(x - 1)$  的解集是( ).

A.  $x > 7$

B.  $x < -7$

C.  $x > -7$

D.  $x > -10$

3. 在数轴上表示下列不等式的解集:

(1)  $x > 4$ ;

(2)  $x \geq 0$ ;

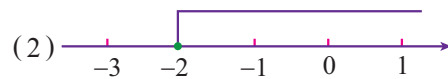
(3)  $x \leq 2$ ;

(4)  $x < -\frac{3}{2}$ .

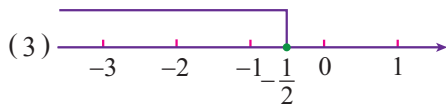
4. 用含  $x$  的不等式表示下列数轴所表示的解集:



(1)



(2)



(3)



(4)

5. 解下列不等式, 并把它们的解集在数轴上表示出来:

(1)  $2(5 - 2x) \leq -3(x - 2)$ ;

(2)  $2(x - 1) - 3(2x + 1) \geq 0$ ;

(3)  $\frac{1}{3}(1 - 2x) < \frac{3}{2}(2x - 1)$ ;

(4)  $x - \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} < 1 + \frac{x+8}{6}$ .

6. 当  $x$  在什么范围内取值时, 代数式  $-2x + 1$  的值:

(1) 是负数;

(2) 大于  $-3$ ;

(3) 小于  $-3x + 5$ ;

(4) 不大于  $4x - 7$ .

7. 求不等式  $3(x + 1) \leq 5x + 9$  的负整数解, 并在数轴上表示出来.

8. 一双鞋的成本是 50 元, 那么定价至少是多少元, 打 8 折后才不会亏本?



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

### ★★提升★★

- $k$  取什么值时, 代数式  $\frac{1}{2}(1-5k-\frac{1}{3}k^2) + \frac{2}{3}(\frac{k^2}{4}-k)$  的值:
  - 小于 0;
  - 等于 0;
  - 大于 0.
- 王老师要用 1 000 元去买 60 元一套和 90 元一套的两种演出服装共 15 套, 请问王老师最多能买 90 元一套的服装多少套?
- 姐姐现有存款 300 元, 每月存款 60 元; 妹妹现有存款 200 元, 每月存款 20 元. 几个月后, 姐姐的存款是妹妹存款的 2 倍以上?
- 某旅游公司规定, 旅游大巴的个人零售票价是每人 10 元, 20 人以上(含 20 人)的团体票价可以享受 8 折优惠. 蓝鸟小队参加活动的同学预计在 16 人左右, 分析一下他们如何购票更实惠.

### ★★★★拓展★★★★

- $x$  取哪些整数时, 能使下面各题中的两个不等式都成立:
  - $x+1 > 3$  与  $x-6 < 0$ ;
  - $2x \geq -4$  与  $2x \leq 4$ ;
  - $\frac{x}{2} > -3$  与  $-x \geq 1$ ;
  - $2x \geq 7$  与  $4x < 23$ .
- 在进行矿山爆破时, 为了确保安全, 点燃引火线后要在爆破前转移到 300 米以外的安全地区. 已知引火线的燃烧速度是 0.8 厘米/秒, 人离开速度是 5 米/秒, 算一算引火线至少需要多少厘米.

## 三 一元一次不等式组

### 4.5

### 一元一次不等式组及其解法

#### 思考

从北京到天津某地, 有几条可供选择的路线, 它们的路程在 240 千米到 300 千米之间(包括 240 千米和 300 千米), 如果汽车的平均速度是每小时 80 千米, 那么从北京到天津某地所需的行驶时间大约在什么范围内?





$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

设汽车从北京到天津某地大约需要  $x$  小时, 根据题意, 汽车行驶的距离  $80x$  千米应该在 240 千米到 300 千米之间. 即行驶时间  $x$  应同时满足不等式

$$80x \geq 240 \quad \text{①}$$

和

$$80x \leq 300. \quad \text{②}$$

由于不等式①和②是同时存在的, 我们可以把这两个不等式放在一起, 写为  $\begin{cases} 80x \geq 240, \\ 80x \leq 300 \end{cases}$  的形式, 这样就组成一个一元一次不等式组.

不等式组中的各个不等式的解集的公共部分, 就是不等式组中  $x$  的可取值的范围.

由不等式①解得  $x \geq 3$ .

由不等式②解得  $x \leq 3.75$ .

在同一数轴上表示不等式①、②的解集, 如图 4-9.



图 4-9

可以看出, 使不等式①、②同时成立的  $x$  的值是 3 和 3.75 之间的所有数 (包括 3 和 3.75), 记作  $3 \leq x \leq 3.75$ . 它们是不等式①、②的解集的公共部分. 不等式①、②的解集的公共部分, 叫做由不等式①、②所组成的一元一次不等式组的解集.

这样, 上面问题的答案应该是: 从北京到天津某地大约需要 3 至 3.75 小时.

一般地, 当两个或两个以上的含有同一个未知数的一元一次不等式合在一起时, 就组成了一个**一元一次不等式组**. 不等式组中的几个一元一次不等式的解集的公共部分, 叫做由它们所组成的不等式组的**解集**. 求不等式组的解集的过程叫做**解不等式组**.

解一元一次不等式组, 通常可以先分别求出不等式组中每个不等式的解集, 再确定这些解集的公共部分. 利用数轴可以直观地确定出不等式组的解集.

**例 1** 解不等式组 
$$\begin{cases} 3x - 2 < 2x - 5, & \text{①} \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} < \frac{x-2}{3}. & \text{②} \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

**解：**解不等式①，得  $x < -3$ 。

解不等式②，得  $x < -1$ 。

在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4-10。

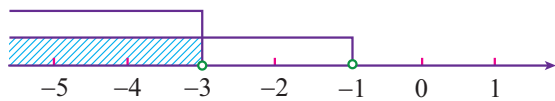


图 4-10

所以这个不等式组的解集是  $x < -3$ 。

**例 2** 解不等式组  $\begin{cases} 5x - 6 \geq 2x + 6, & \text{①} \\ 3x - 4 > 4(x - 1). & \text{②} \end{cases}$

**解：**解不等式①，得  $x \geq 4$ 。

解不等式②，得  $x < 0$ 。

在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4-11。



图 4-11

由图 4-11 可以看出，这两个不等式的解集没有公共部分，就说不等式组无解。

**例 3** 求适合不等式  $-11 < -2a - 5 \leq 3$  的  $a$  的整数解。

**解：**由  $-11 < -2a - 5 \leq 3$ ，得

$$\begin{cases} -2a - 5 > -11, \\ -2a - 5 \leq 3. \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$\begin{cases} a < 3, \\ a \geq -4. \end{cases}$$

所以原不等式的解集为  $-4 \leq a < 3$ 。

适合原不等式的整数解是  $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ 。

### 交流

解一元一次不等式组的一般步骤是什么？一元一次不等式组一定有解吗？



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

### 练习



1. 填表:

不等式组	$\begin{cases} x > 2, \\ x > -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 2, \\ x < -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x > 2, \\ x < -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 2, \\ x > -1 \end{cases}$
在数轴上表示不等式的解集				
不等式组的解集				

2. 解下列不等式组:

(1)  $\begin{cases} 3x + 2 < 2x - 3, \\ 2(x - 1) > 4x - 7; \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} 3x + 2 > 2(x - 1), \\ 4x - 3 \leq 3x - 2; \end{cases}$

(3)  $\begin{cases} \frac{2x - 1}{3} < 1, \\ \frac{3x - 1}{2} > x + \frac{3}{2}. \end{cases}$

3. 求适合不等式  $-10 \leq 3x - 7 < 8$  的所有的整数解.



### 习题 4-3

#### ★ 基础 ★

1. 填表:

不等式组 ( $a > b$ )	在数轴上表示不等式的解集	不等式组的解集
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$		
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$		
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$		
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$		



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

2. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 9 - 0.1x \geq -1, \\ 1 - 0.2x \leq -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2(x+1) < 0, \\ 2x-1 < 1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geq 1, \\ 3x - 7 > -1; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < -1, \\ 2(x-3) - 3(x-2) < 0. \end{cases}$$

3. 求同时适合不等式  $6x + \frac{5}{7} > 4x + 7$  和不等式  $8x + 3 < 4x + 40$  的  $x$  的整数解.

4. 求适合不等式  $-12 \leq 6x - 10 < 23$  的非正整数解.

### ★★★提升★★★

1. 长比宽多 8 米的长方形花坛, 它的周长在 120 米和 180 米之间 (包括 120 米和 180 米), 那么它的宽可能在什么范围内?
2. 一个两位数, 它的个位上的数字比十位上的数字大 3, 并且这个两位数小于 44 且大于 25, 求这个两位数.
3. 某校在一次课外活动中, 需要抽调一部分学生并把他们平均编为 9 个组. 若每组比预定人数多 1 人, 则所需学生总数超过 200 人; 若每组比预定人数少 1 人, 则所需学生总数不到 190 人. 求每组学生的预定人数是多少.

### ★★★★拓展★★★★

1. 试求下列不等式组的解集:

$$(1) \begin{cases} x > -2, \\ x - 3 > 0, \\ 6 - x \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 2 \geq 2x, \\ x - 4 < 5 - 2x, \\ \frac{x+3}{2} > 3x. \end{cases}$$

2.  $k$  取什么值时, 解方程  $6x - k = 0$  得到的  $x$  的值:

(1) 都小于 1;

(2) 都不小于 1.

3. 把若干颗花生分给若干只猴子. 如果每只猴子分 3 颗, 就剩下 8 颗; 如果每只猴子分 5 颗, 那么最后一只猴子虽分到了花生, 但不足 5 颗. 求猴子有多少只, 花生有多少颗.



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

## 综合与实践

### 如何上网最划算

某地区家用电脑上网实行两种收费标准，包月制或计时制。

包月制：每月 50 元（限一部个人住宅电话上网）。

计时制：每小时 3 元。

两种收费制都要缴纳话费 0.02 元/分。

请你根据上面上网收费的两种标准，分析一下在什么情况下选用哪种收费标准比较实惠。

也可了解你所居住地区的上网收费情况，解决类似问题。

## 阅读理解



### 符号“>”和“<”的由来

在符号“>”和“<”出现之前，人们用文字、缩写或象征性记号来表示不等关系。

1629 年，生于法国的荷兰数学家吉拉德 (A. Girard, 1595 — 1632) 在他所著的《代数新发现》里，使用了下面象征性的记号表示不等式：

$AffB$  表示  $A > B$ ； $B \xi A$  表示  $B < A$ 。

显然，它书写起来比文字简洁许多，但是记起来并不方便，而且不能突出它们对称的特征。因此，后人认为它更像繁体字的简化，并不是理想的不等号，使用者寥寥无几。

1631 年，创用乘号“ $\times$ ”的奥特雷德在一本广为流行的著作《数学入门》里，创用符号“ $\text{—}\square$ ”表示“大于”，符号“ $\square\text{—}$ ”表示



$$\frac{x+3}{2}$$

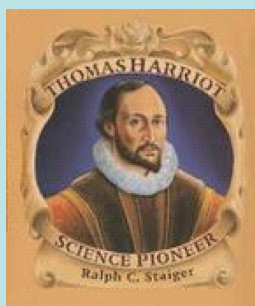
$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

“小于”。这种符号具有明显的对称性、和谐性，到了 18 世纪还有人在使用，但书写起来，还是不及符号“>”和“<”来得干脆利落，最终还是被淘汰了。

同年，英国数学家、天文学家托马斯·哈里奥特 (T. Harriot, 1560—1621) 逝世 10 周年，人们为了纪念他在数学研究方面的丰功伟绩，出版了他的遗著《分析术实例》。该书内容之丰富，论述之深刻，曾被大数学家沃利斯赞美不绝，尤其是书中大于和小于符号的首次创立永载史册。书中写道：

大于的记号： $a > b$  表示  $a$  量大于  $b$  量；  
 小于的记号： $a < b$  表示  $a$  量小于  $b$  量。



托马斯·哈里奥特

这对符号一出现，立刻得到一些学者的赞许和使用。如果按照国际惯例，以出版时间作为诞生时间的话，不等号“>”、“<”是 1631 年诞生的，但若从作者创用的时间来看，还要提早 10~20 年，至少应该从 1621 年算起。

符号“>”和“<”始创于 17 世纪，直到 18 世纪初才被广泛应用，整整花了一个世纪的时间。



$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

## 回顾与整理

### 知识要点

本章我们以熟悉的生活实际为背景,研究了两个量之间的不等关系,探讨了不等式和它的基本性质,一元一次不等式和一元一次不等式组的解法,以及应用一元一次不等式解决一些简单问题.

1. 用不等式可以表示两个量之间的不等关系. 不等式的基本性质与等式的基本性质很类似, 主要区别是: 在等式两边都乘(或除以)同一个不等于零的数时, 所得结果仍是等式; 在不等式两边都乘(或除以)同一个正数时, 不等号的方向不变, 而在不等式两边都乘(或除以)同一个负数时, 不等号的方向要改变.

2. 解一元一次不等式和解一元一次方程也很类似, 主要异同点对比如下:

标准形式	一元一次方程 $ax + b = 0 (a \neq 0)$	一元一次不等式 $ax + b > 0$ 或 $ax + b < 0 (a \neq 0)$
解法步骤	①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化为1	①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化为1 注意: 在步骤①和⑤中, 如果乘数或除数是负数, 要改变不等号的方向
解	只有一个解	有无数多个解

3. 一元一次不等式组的解集是这个不等式组中各个不等式的解集的公共部分. 解不等式组的一般步骤是:

- (1) 求出不等式组中每个不等式的解集;
- (2) 借助数轴求出这些不等式的解集的公共部分, 即求出了

$$\frac{x+3}{2}$$

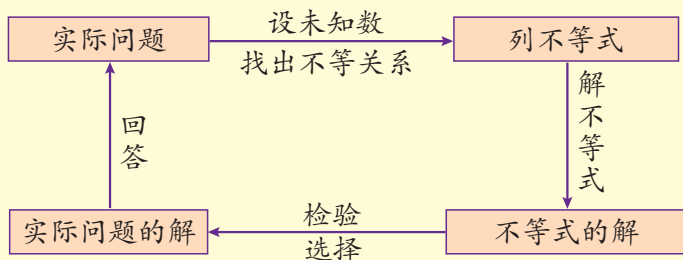
$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

### 知识要点

不等式组的解集.

4. 列一元一次不等式解实际问题的一般步骤如下:



### 学习指导

1. 现实生活中的数量关系既有相等的,也有不等的.方程和不等式是我们研究相等与不等关系的两个重要工具.一元一次不等式是研究不等关系的基本工具,也是学习其他不等式和其他知识的基础.

2. 一元一次不等式与一元一次方程,有许多类似之处,要特别注意它们之间的相同点和不同点.这是学好本章内容很重要的学习方法.

3. 不等式的基本性质是解一元一次不等式和解一元一次不等式组的依据.

4. 在不等式两边都乘同一个数(正数、零、负数),会出现三种不同的情形.以不等式 $5 < 6$ 为例,在不等式 $5 < 6$ 两边都乘同一个数 $a$ 时,有下面三种情形:

①  $5a < 6a(a > 0)$ ; ②  $5a = 6a(a = 0)$ ; ③  $5a > 6a(a < 0)$ .

请注意:如果在不等式的两边都乘零(情形②),就改变了问题的性质,不能用它对不等式进行变形.

5. 借助数轴可以直观地表示不等式的解集,这有助于我们确定一元一次不等式组的解集.在数轴上表示 $x > a$ 与 $x \geq a$ (或 $x < a$ 与 $x \leq a$ )这两个解集时,用空心圆圈还是用实心圆点是有区别的,空心圆圈表示不含 $a$ ,而实心圆点表示含有 $a$ .

6. 把实际问题中的不等关系抽象为不等式,需要把实际问题中一些表示不等关系的词语准确地转化为数学符号.比如,“大





$AB \perp CD$



$\triangle ABC$

学习  
指导

于”、“超过”等一般抽象为“ $>$ ”；“小于”、“不足”等一般抽象为“ $<$ ”；“不大于”、“不小于”一般抽象为“ $\leq$ ”、“ $\geq$ ”。

7. 借助不等式或不等式组解决实际问题时，在求出不等式或不等式组的解集以后，要认真地检验它是否符合实际问题。

复 习 题

★ 基础 ★

1. 判断题：

(1) 若  $a < b$ ，则  $-3a < -3b$ ； ( )

(2) 若  $a < b$ ，则  $-5 + a < -5 + b$ ； ( )

(3) 若  $a > b$ ，则  $-\frac{a}{3} < -\frac{b}{3}$ . ( )

2. 若  $x > y$ ，试用不等号连接下列各对式子：

(1)  $x + 2$  与  $y - 2$ ； (2)  $-(x - y)^2$  与  $0$ ；

(3)  $-5x$  与  $-5y$ ； (4)  $\frac{x}{5}$  与  $\frac{y}{5}$  .

3. 解下列不等式，并把解集表示在数轴上：

(1)  $-\frac{2}{3}x < -1$ ； (2)  $6x - 3 > 2x + 7$ ；

(3)  $\frac{2}{3}(5 - x) \geq 6$ ； (4)  $\frac{2(x - 1)}{5} \geq \frac{3(1 - x)}{10}$  .

4.  $x$  取什么值时，代数式  $\frac{2x + 7}{3}$  的值：

(1) 是正数； (2) 是负数； (3) 是零 .

5. 求下列不等式的正整数解：

(1)  $2x - 5 < 5 - 2x$ ； (2)  $4x - 6 \geq 7x - 15$ .

6. 解下列不等式组：

(1)  $\begin{cases} 4x > 3x - 1, \\ 2x < 4; \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x + 3 > 6; \end{cases}$



$$\frac{x+3}{2}$$

$$y=kx+b$$

$$m \geq -1$$

$$(3) \begin{cases} 5x+1 \leq 3(x+1), \\ \frac{x-1}{2} \geq \frac{2x-1}{5}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x-3 \leq x+2, \\ \frac{x-1}{6} - \frac{3x-1}{2} > 2 - \frac{x}{2}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{1}{3}x-1 < \frac{1}{2}x, \\ \frac{x+2}{5} \leq \frac{x-1}{4}; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{2x}{3} - 1 > 4 - \frac{x}{4}, \\ x - \frac{x-1}{2} \geq 2 - \frac{x+2}{3}. \end{cases}$$

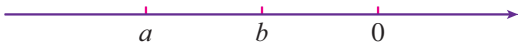
7. 解不等式:

$$(1) -2 \leq \frac{3-x}{2} \leq 3;$$

$$(2) -8 < -6 - \frac{3x-2}{4} < -5.$$

8. (1) 一个两位数加上它的一半, 所得的数大于 45 且小于 48, 求这个两位数;  
 (2) 一个两位数, 它的十位上的数字比个位上的数字小 3, 已知它大于 36 且小于 68, 求这个两位数.
9. 某次数学竞赛中出了 10 道题, 每答对 1 题得 5 分, 每答错 1 题或不答扣 3 分. 问至少要答对几道题, 得分才不低于 10 分.

### ★★★提升★★★

1. 求  $x - \frac{x}{2} - \frac{x+8}{6} \leq 1 - \frac{x-1}{3}$  的非负整数解.
2. 有理数  $a, b$  在数轴上的位置如图所示, 用 “>” 或 “<” 填空:  
 (1)  $a - b$       0;  
 (2)  $a + b$       0;  
 (3)  $|a|$        $|b|$ .
- 
- (第 2 题)
3. 一个负整数的 45% 与 2 的和的 3 倍不小于这个数的 75%, 求满足条件的所有负整数.

### ★★★★拓展★★★★

1. 求下列不等式组的整数解:
- $$(1) \begin{cases} \frac{x+1}{4} > x - \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}(3x-1) \leq 2 - \frac{1}{2}x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2(x+2) < x+8, \\ x-3 \geq 3x-7, \\ 3(x-2)+8 > 2x. \end{cases}$$
2. 学校图书馆准备购买定价分别为 8 元和 14 元的杂志和小说共 80 本, 计划用钱在 750 元到 850 元之间 (包括 750 元和 850 元), 那么 14 元一本的小说最少可以买多少本? 最多可以买多少本?